

TÍCH PHÂN

5.1. Tích phân bất định

5.1.1. Nguyên hàm và tích phân bất định

Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng (a, b) , nếu:

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in (a, b).$$

Nếu hàm số $G(x)$ là một nguyên hàm khác của hàm số $f(x)$ trên khoảng (a, b) thì

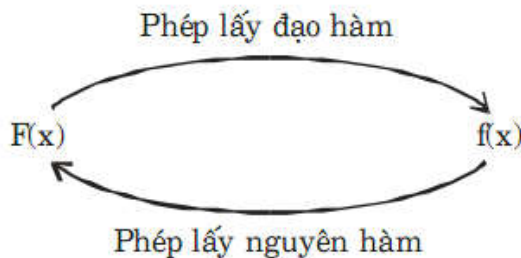
$$G(x) = F(x) + C, \quad \text{với } C \text{ là hằng số.}$$

Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng (a, b) được gọi là tích phân bất định của hàm số $f(x)$ trên khoảng (a, b) .

Ký hiệu: $\int f(x)dx$.

Vậy

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x) \quad (5.1)$$



Tính chất

a) $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

b) $\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

c) $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$ với k là hằng số

d) Tính bất biến của biểu thức tích phân:

Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ thì $\int f(u)du = F(u) + C$ trong đó $u = \varphi(x)$.

Ví dụ 1. Cho hàm số: $F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + k})$. Tính đạo hàm của hàm số trên rồi suy ra

nguyên hàm của tích phân sau: $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + k}} dx$.

Giải

Ta có

$$F'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + k}}}{x + \sqrt{x^2 + k}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + k}} = f(x)$$

Suy ra

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + k}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2 + k}| + C.$$

5.1.2. Bảng công thức các tích phân cơ bản

$$a) \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$$

$$g) \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$b) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$h) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$c) \int e^x dx = e^x + C$$

$$i) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\arccos x + C$$

$$d) \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$k) \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$e) \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$l) \int \frac{1}{1+x^2} dx = -\operatorname{arccot} x + C$$

$$f) \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

5.1.3. Các phương pháp tính tích phân bất định

5.1.3.1. Sử dụng bảng tích phân cơ bản và phương pháp khai triển

Ta có thể tính tích phân của một hàm phức tạp bằng cách khai triển nó thành tổng (hiệu) tích phân của các hàm đơn giản.

Ví dụ 2. Tính tích phân bất định

$$\int x\sqrt[3]{x-1} dx$$

Giải

Nếu ta khai triển $x = x - 1 + 1$, ta chuyển tích phân trên về tổng 2 tích phân sau:

$$\int x\sqrt[3]{x-1} dx = \int (x-1+1)\sqrt[3]{x-1} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int (x-1)^{\sqrt[3]{x-1}} dx + \int \sqrt[3]{x-1} dx \\
&= \int (x-1)^{4/3} dx + \int (x-1)^{1/3} dx \\
&= \frac{3}{7}(x-1)^{7/3} + \frac{3}{4}(x-1)^{4/3} + C
\end{aligned}$$

5.1.3.2. Phương pháp đổi biến số

Xét tích phân bất định $I = \int f(x) dx$, trong đó $f(x)$ là một hàm số liên tục. Để tính tích phân này ta có thể chuyển sang một tích phân khác bằng cách thay $x = \varphi(t)$. Với giả thiết hàm $x = \varphi(t)$ đơn điệu có đạo hàm liên tục, ta có: $dx = \varphi'(t)dt$

Vậy

$$I = \int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = \int g(t) dt \quad (5.2)$$

với $g(t) = f[\varphi(t)] \varphi'(t)$

Nếu ta tính được tích phân $\int g(t) dt = G(t) + C$ thì $I = \int g(t) dt = G[\varphi^{-1}(x)] + C$.

Công thức (5.2) được gọi là công thức đổi biến số.

Ví dụ 3. Cho tích phân

$$\int f(ax+b) dx$$

Đặt $t = ax + b \Rightarrow dt = a dx$

Ta có

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} \int f(t) dt$$

Hệ quả

$$a) \int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$$

$$b) \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$$

$$c) \int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$$

$$d) \int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$$

$$e) \int \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + C$$

$$f) \int \frac{1}{\cos^2(ax + b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax + b) + C$$

$$g) \int \frac{1}{\sin^2(ax + b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax + b) + C$$

$$h) \int \frac{1}{\sqrt{1 - (ax + b)^2}} dx = \frac{1}{a} \arcsin(ax + b) + C = -\frac{1}{a} \arccos(ax + b) + C$$

$$i) \int \frac{1}{1 + (ax + b)^2} dx = \frac{1}{a} \arctan(ax + b) + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arccot}(ax + b) + C$$

Ví dụ 4. Tính các tích phân sau:

$$a) I = \int \frac{1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})} dx$$

$$b) J = \int \frac{1}{1 + \sin x} dx$$

Giải

$$a) I = \int \frac{1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})} dx$$

Ta có thể đổi biến như sau. Đặt

$$x = t^6 \quad (t > 0), \quad dx = 6t^5 dt$$

Áp dụng công thức (5.2), ta có

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{6t^5}{t^3(1 + t^2)} dt = 6 \int \frac{t^2}{1 + t^2} dt = 6 \int \left(1 - \frac{1}{1 + t^2}\right) dt \\ &= 6(t - \arctan t) + C = 6(\sqrt[6]{x} - \arctan \sqrt[6]{x}) + C. \end{aligned}$$

$$b) J = \int \frac{1}{1 + \sin x} dx$$

Ta có thể đổi biến như sau. Đặt

$$t = \tan \frac{x}{2}, \text{ ta có } x = 2 \arctan t, \quad dx = \frac{2}{1 + t^2} dt, \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$$

Áp dụng công thức (5.2), ta có

$$J = \int \frac{1}{1 + \sin x} dx = \int \frac{1}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$= 2 \int \frac{1}{(t+1)^2} dt = -\frac{2}{t+1} + C = -\frac{2}{\tan \frac{x}{2} + 1} + C.$$

5.1.3.3. Phương pháp tích phân từng phần

Giả sử $u = u(x)$ và $v = v(x)$ là các hàm số có đạo hàm liên tục.

Ta có

$$d(uv) = vdu + udv \Leftrightarrow udv = d(uv) - vdu$$

Lấy tích phân 2 vế, ta có

$$\int udv = uv - \int vdu \quad (5.3)$$

hay

$$\int v(x)u'(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx \quad (5.4)$$

với $u = u(x) \Rightarrow du = u'(x)dx$; $v = v(x) \Rightarrow dv = v'(x)dx$

Công thức (5.4) được gọi là công thức tích phân từng phần.

Ví dụ 5. Tính các tích phân bất định sau

a) $I = \int x \ln x dx$

b) $I = \int x e^x dx$

c) $I = \int x \sin x dx$

d) $I = \int x \arctan x dx$

Giải

a) $I = \int x \ln x dx$

Đặt $u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx$; $dv = x dx \rightarrow v = \frac{1}{2} x^2$

Vậy

$$I = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C.$$

b) $I = \int x e^x dx$

Đặt $u = x \rightarrow du = dx$; $dv = e^x dx \rightarrow v = e^x$

Vậy

$$I = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

c) $I = \int x \sin x dx$

Đặt $u = x \rightarrow du = dx$; $dv = \sin x dx \rightarrow v = -\cos x$

Vậy

$$I = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

d) $I = \int x \arctan x dx$

Đặt $u = \arctan x \rightarrow du = \frac{1}{1+x^2} dx$; $dv = x dx \rightarrow v = \frac{1}{2} x^2$

Vậy

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctan x + C. \end{aligned}$$

5.1.3.4. Phương pháp tích phân của các hàm hữu tỉ

a. Tích phân của phân thức hữu tỉ với mẫu bậc nhất

Xét tích phân $\int \frac{P(x)}{ax+b} dx$, với $P(x)$ là một đa thức. Ta biểu diễn biểu thức dưới dấu

tích phân dưới dạng:

$$\frac{P(x)}{ax+b} = Q(x) + \frac{c}{ax+b}$$

Trong đó: $Q(x)$ là thương của phép chia đa thức và c là phần dư của phép chia. Tích phân của đa thức $Q(x)$ có thể tính dễ dàng, còn tích phân của phân thức thứ hai được tính theo công thức:

$$\int \frac{c}{ax+b} dx = \frac{c}{a} \ln|ax+b| + C.$$

Ví dụ 6. Tính tích phân

$$I = \int \frac{x^3 + 3x^2}{1 - 2x} dx$$

Giải

Biểu thức dưới dấu tích phân ta lấy tử chia cho mẫu, ta được

$$\begin{aligned} I &= \int \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{4}x - \frac{7}{8} + \frac{7}{8} \frac{1}{1-2x} \right) dx \\ &= -\frac{1}{6}x^3 - \frac{7}{8}x^2 - \frac{7}{8}x - \frac{7}{16}x \ln|1-2x| + C \end{aligned}$$

b. Tích phân của phân thức hữu tỉ với mẫu bậc hai

Xét tích phân $\int \frac{P(x)}{ax^2 + bx + c} dx$, với $P(x)$ là một đa thức. Ta biểu diễn biểu thức dưới dấu tích phân dưới dạng:

$$\frac{P(x)}{ax^2 + bx + c} = Q(x) + \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

Trong đó: $Q(x)$ là thương của phép chia đa thức và $Ax + B$ là phần dư của phép chia. Tích phân của đa thức $Q(x)$ có thể tính dễ dàng.

Để tính tích phân $I = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx$ ta biến đổi như sau:

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} = \frac{A}{2} \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} + \left(B - \frac{Ap}{2} \right) \frac{1}{ax^2 + bx + c}$$

Khi đó ta được:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{A}{2} \int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx + \left(B - \frac{Ap}{2} \right) \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx \\ &= \frac{A}{2} \ln|ax^2 + bx + c| + \left(B - \frac{Ap}{2} \right) J \end{aligned}$$

Tích phân: $J = \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx$ được tính như sau:

Xét tam thức bậc 2 ở mẫu ta có $\Delta = b^2 - 4ac$

+) Trường hợp 1. Tam thức bậc 2 ở mẫu có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 :

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} dx \\ &= \frac{1}{a} \frac{1}{x_1 - x_2} \int \left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2} \right) dx = \frac{1}{a} \frac{1}{x_1 - x_2} \ln \left| \frac{x - x_1}{x - x_2} \right| + C. \end{aligned}$$

+) Trường hợp 2. Tam thức bậc 2 ở mẫu có nghiệm kép x_0 :

$$J = \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{(x - x_0)^2} dx = -\frac{1}{a} \frac{1}{x - x_0} + C.$$

+) Trường hợp 3. Tam thức bậc 2 ở mẫu vô nghiệm:

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \arctan\left(\frac{2ax + b}{\sqrt{-\Delta}}\right) + C. \end{aligned}$$

Ví dụ 7. Tính tích phân

a) $I = \int \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx$

b) $J = \int \frac{1}{x^2 + 6x + 9} dx$

c) $K = \int \frac{1}{x^2 - 2x + 5} dx$

Giải

$$\begin{aligned} \text{a) } I &= \int \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx = \int \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx \\ &= \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} \right) dx = \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| + C. \end{aligned}$$

$$\text{b) } J = \int \frac{1}{x^2 + 6x + 9} dx = \int \frac{1}{(x+3)^2} dx = -\frac{1}{x+3} + C.$$

$$\text{c) } K = \int \frac{1}{x^2 - 2x + 5} dx = \int \frac{1}{(x-1)^2 + 2^2} dx = \frac{1}{2} \arctan \frac{x-1}{2} + C.$$

5.1.3.5. Phương pháp tính tích phân của các hàm lượng giác

a. Tích phân có dạng: $I = \int \sin^m x \cos^n x dx$

Nếu một trong hai số m, n là số lẻ thì tích phân loại này có thể đưa về tích phân của đa thức bằng cách đổi biến số:

+) Nếu m là số lẻ thì ta đặt: $t = \cos x$, ta có $d(\cos x) = -\sin x dx$.

+) Nếu n là số lẻ thì ta đặt: $t = \sin x$, ta có $d(\sin x) = \cos x dx$.

+) Nếu m, n là số chẵn thì ta sử dụng công thức hạ bậc:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}; \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

Ví dụ 8. Tính tích phân:

$$I = \int \sin^4 x \cos^5 x dx$$

Giải

Đặt $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$. Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int \sin^4 x \cos^4 x \cos x dx = \int t^4 (1 - t^2)^2 dt = \int (t^8 - 2t^6 + t^4) dt \\ &= \frac{1}{9} t^9 - \frac{2}{7} t^7 + \frac{1}{5} t^5 + C = \frac{1}{9} \sin^9 x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + C \end{aligned}$$

b. Nếu hàm dưới dấu tích phân không chẵn, không lẻ theo $\sin x$, $\cos x$

Để tính tích phân loại này ta có thể đặt $t = \tan \frac{x}{2}$, khi đó:

Ta có

$$x = 2 \arctan t, dx = \frac{1}{1+t^2} dt, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

Ví dụ 9. Tính tích phân

$$I = \int \frac{1}{a \sin x + b \cos x + c} dx \quad (a, b, c \text{ là hằng số cho trước})$$

Giải

Đặt $t = \tan \frac{x}{2}$, khi đó:

$$x = 2 \arctan t, dx = \frac{1}{1+t^2} dt, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Ta có

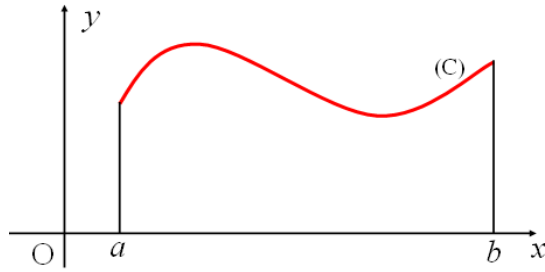
$$I = \int \frac{1}{a \frac{2t}{1+t^2} + b \frac{1-t^2}{1+t^2} + c} \frac{1}{1+t^2} dt = 2 \int \frac{1}{(c-b)t^2 + 2at + b+c} dt$$

Đây là tích phân của phân thức hữu tỉ có mẫu là tam thức bậc 2.

5.2. Tích phân xác định

5.2.1. Định nghĩa các tính chất của tích phân xác định

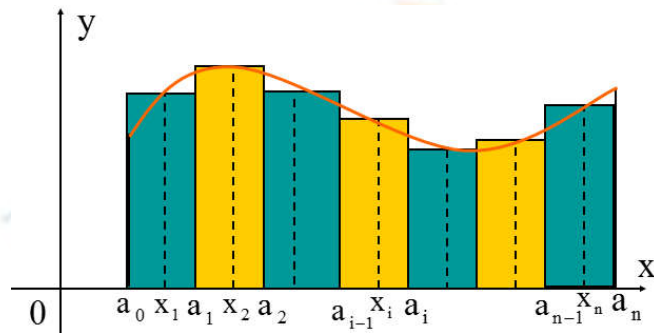
Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đường thẳng $x = a$, $x = b$ và đường cong $(C): y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$.



Chia đoạn $[a, b]$ thành n đoạn nhỏ đều nhau

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b \quad \text{với} \quad a_i - a_{i-1} = \frac{b-a}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Trên mỗi đoạn $[a_{i-1}, a_i]$ lấy điểm x_i tùy ý



Diện tích của n hình chữ nhật nhỏ

$$S_n = f(x_1)(a_1 - a_0) + f(x_2)(a_2 - a_1) + \dots + f(x_n)(a_n - a_{n-1})$$

hay

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i)(a_i - a_{i-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

Diện tích hình thang cong S

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

Đặt

$$\int_a^b f(x) dx = S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \quad (5.5)$$

Trong đó a là cận dưới, b là cận trên và $f(x)$ là hàm lấy tích phân

Trường hợp đặc biệt $a = 0$, $b = 1$, $x_i = a_i$, ta có

$$\int_0^1 f(x) dx = S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \quad (5.6)$$

Ví dụ 10. Dùng định nghĩa tính các tích phân xác định sau:

$$\text{a) } I = \int_0^1 x dx$$

$$\text{b) } J = \int_0^1 x^2 dx$$

$$\text{c) } K = \int_0^1 x^3 dx$$

Giải

$$\text{a) } I = \int_0^1 x dx$$

Dùng công thức (5.6), ta có

$$\begin{aligned} I = \int_0^1 x dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1+2+\dots+n}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{b) } J = \int_0^1 x^2 dx$$

Dùng công thức (5.6), ta có

$$\begin{aligned} J = \int_0^1 x^2 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{c) } K = \int_0^1 x^3 dx$$

Dùng công thức (5.6), ta có

$$\begin{aligned} K = \int_0^1 x^3 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} \right)^3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{n^3} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{n(n+1)}{2n^2} \right)^2 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

5.2.2. Các tính chất cơ bản của tích phân xác định

$$a) \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$b) \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$c) \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$d) \int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$e) \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

$$f) \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx \text{ với } k \text{ là hằng số}$$

$$g) \text{ Nếu } a < b \text{ và } f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b] \text{ thì } \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

5.2.3. Công thức Newton – Leibnitz

Với $F(x)$ là một nguyên hàm bất kỳ của hàm số liên tục $f(x)$, ta có công thức:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b \quad (5.7)$$

Công thức (5.7) được gọi là công thức Newton – Leibnitz.

Ví dụ 11. Tính các tích phân xác định sau

$$a) I = \int_0^{\sqrt{5}} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

$$b) J = \int_{-2}^2 \frac{1}{x^2 - 4x + 20} dx$$

Giải

$$a) I = \int_0^{\sqrt{5}} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}}. \text{ Ta có}$$

$$I = \int_0^{\sqrt{5}} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}} = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 4} \right) \Big|_0^{\sqrt{5}} = \ln(\sqrt{5} + 3) - \ln 2 = \ln \frac{\sqrt{5} + 3}{2}.$$

b) $J = \int_{-2}^2 \frac{1}{x^2 - 4x + 20} dx$. Ta có

$$J = \int_{-2}^2 \frac{1}{x^2 - 4x + 20} dx = \int_{-2}^2 \frac{1}{(x-2)^2 + 4^2} dx = \frac{1}{4} \arctan\left(\frac{x-2}{4}\right) \Big|_{-2}^2 = \frac{\pi}{16}.$$

5.2.4. Các phương pháp tính tích phân xác định

5.2.4.1. Phương pháp đổi biến

Giả sử ta cần tính tích phân:

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Thay $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)dt$ với giả thiết hàm số $\varphi(t)$ thỏa mãn các điều kiện sau:

+) Hàm số $\varphi(t)$ xác định, liên tục và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[\alpha, \beta]$

+) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, tức là cận $x = a$ tương ứng với cận $t = \alpha$ và cận $x = b$

tương ứng với cận $t = \beta$.

+) Khi t biến thiên trên đoạn $[\alpha, \beta]$ hàm số $x = \varphi(t)$ nhận giá trị không vượt ra ngoài đoạn $[a, b]$.

Khi đó, ta có

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt \quad (5.8)$$

Với $g(t) = f[\varphi(t)] \varphi'(t)$.

Ví dụ 12. Tính tích phân xác định sau

$$I = \int_1^e \frac{(\ln x + 1)^3}{x} dx$$

Giải

Đặt

$$t = \ln x + 1 \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$$

Đổi cận

Với $x = 1$ thì $t = 1$ và $x = e$ thì $t = 2$

Ta có

$$I = \int_1^2 t^3 dt = \frac{1}{4} t^4 \Big|_1^2 = \frac{1}{4} (2^4 - 1^4) = \frac{15}{4}.$$

5.2.4.2. Phương pháp tích phân từng phần

Nếu các hàm $u(x)$, $v(x)$ khả vi liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì ta có

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx \quad (5.9)$$

với $u = u(x) \Rightarrow du = u'(x)dx$; $v = v(x) \Rightarrow dv = v'(x)dx$

Ví dụ 13. Tính tích phân xác định sau

$$I = \int_1^e x \ln x dx$$

Giải

Đặt $u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx$; $dv = x dx \rightarrow v = \frac{1}{2} x^2$

$$I = \frac{1}{2} x^2 \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 \Big|_1^e = \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4}.$$

5.2.5. Ứng dụng tích phân

5.2.5.1. Ứng dụng tích phân bất định

Cho hai đại lượng kinh tế x, y và hàm cận biên $Mf(x)$ với điều kiện đầu $y_0 = f(x_0)$. Tìm hàm $y = f(x)$ như sau

$$y = f(x) = \int Mf(x) dx \quad (5.10)$$

Ví dụ 14. Cho hàm sản phẩm biên của lao động $MPL = 40L^{0,5}$. Tìm hàm sản xuất ngắn hạn $Q = f(L)$, biết $Q(100) = 4000$.

Giải

Áp dụng công thức (5.10), ta có

$$Q(L) = \int MPL dL = 40 \int L^{0,5} dL = \frac{80}{3} L^{1,5} + c$$

Từ giả thiết : $Q(100) = 4000 \Leftrightarrow c = -\frac{68000}{3}$

Vậy

$$Q(L) = \frac{80}{3}L^{1,5} - \frac{68000}{3}.$$

Ví dụ 15. Cho hàm chi phí cận biên ở mỗi mức sản lượng Q là : $MC(Q) = 8e^{0,2Q}$ và chi phí cố định $FC = 50$. Tìm hàm tổng chi phí.

Giải

Áp dụng công thức (5.10), ta có

$$TC(Q) = \int MC(Q)dQ = 8 \int e^{0,2Q}dQ = 40e^{0,2Q} + c$$

Từ chi phí cố định : $FC = 50 \Leftrightarrow c = 10$

Vậy

$$TC(Q) = 40e^{0,2Q} + 10.$$

5.2.5.2. Ứng dụng tích phân xác định

Cho hàm cung $Q_s = S(P)$ và hàm cầu $Q_D = D(P)$. Tính thặng dư người tiêu dùng và thặng dư nhà sản xuất như sau

Thặng dư của người tiêu dùng (Consumers' Surplus)

$$CS = \int_0^{Q_0} D^{-1}(Q)dQ - P_0Q_0 \quad (5.11)$$

Thặng dư của nhà sản xuất (Producers' Surplus)

$$PS = P_0Q_0 - \int_0^{Q_0} S^{-1}(Q)dQ \quad (5.12)$$

Trong đó (P_0, Q_0) là điểm cân bằng của thị trường.

Ví dụ 16. Cho hàm cung và hàm cầu đối với một loại sản phẩm như sau:

$$Q_S = \sqrt{P} - 1; \quad Q_D = \sqrt{113 - P}$$

Tính thặng dư của nhà sản xuất và thặng dư của người tiêu dùng.

Giải

Tìm điểm cân bằng của thị trường ta giải phương trình sau

$$\begin{aligned} Q_D = Q_S &\Leftrightarrow \sqrt{113 - P} = P - 57 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} P \geq 57 \\ P^2 - 113P + 3136 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow P = 64 \rightarrow Q = 7 \end{aligned}$$

Ta có điểm cân bằng thị trường là $P_0 = 64, Q_0 = 7$

Tính thặng dư của người tiêu dùng ta áp dụng công thức (5.11)

$$CS = \int_0^{Q_0} D^{-1}(Q)dQ - P_0 Q_0 = \int_0^7 (113 - Q^2)dQ - 448 = \frac{686}{3}.$$

Tính thặng dư của nhà sản xuất ta áp dụng công thức (5.12)

$$PS = P_0 Q_0 - \int_0^{Q_0} S^{-1}(Q)dQ = 448 - \int_0^7 (Q + 1)^2 dQ = \frac{833}{3}.$$

5.3. Tích phân suy rộng

Khái niệm: Một tích phân được gọi là tích phân xác định nếu thỏa mãn hai điều kiện sau

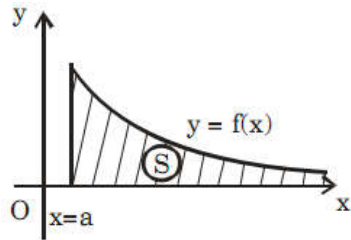
- i) Hàm lấy tích phân bị chặn
- ii) Miền lấy tích phân bị chặn

Nếu một tích phân vi phạm một trong hai điều kiện trên được gọi là tích phân suy rộng

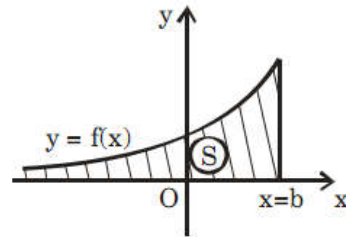
5.3.1. Tích phân suy rộng loại 1: Định nghĩa và phương pháp tính

Nếu một tích phân có miền lấy tích phân không bị chặn thì ta gọi tích phân đó là tích phân suy rộng loại 1.

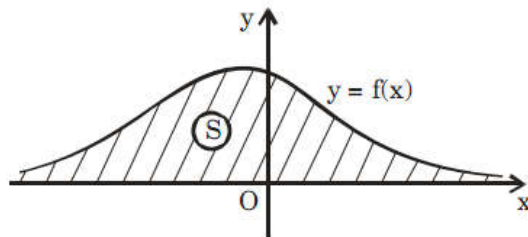
Ví dụ 17. Cho các tích phân suy rộng loại 1: $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$; $\int_{-\infty}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$; $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$



$$S = \int_a^{+\infty} f(x)dx$$



$$S = \int_{-\infty}^b f(x)dx$$



$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

a) Cho $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ hàm số dương thì $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ là tích phân suy rộng loại 1.

Ta có :

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx \quad (5.13)$$

b) Cho $f : (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ hàm số dương thì $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ là tích phân suy rộng loại 1.

Ta có :

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx \quad (5.14)$$

c) Cho $f : (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ hàm số dương thì $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ là tích phân suy rộng loại 1.

Ta có :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 f(x) dx + \lim_{s \rightarrow +\infty} \int_0^s f(x) dx \end{aligned} \quad (5.15)$$

Nếu các giới hạn này không tồn tại hay bằng $\pm\infty$, ta nói tích phân suy rộng này phân kỳ còn nếu giới hạn này bằng một hằng số ta nói tích phân suy rộng này hội tụ.

Ví dụ 18. Tính các tích phân suy rộng sau

$$a) I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 2x + 2} dx$$

$$b) J = \int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx$$

$$c) K = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 4x + 13} dx$$

Giải

$$a) I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 2x + 2} dx$$

Áp dụng công thức (5.13), ta có

$$\begin{aligned} I &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{1}{(x-1)^2 + 1} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\arctan(x-1) \Big|_1^t \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \arctan(t-1) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{b) } J = \int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx$$

Áp dụng công thức (5.14), ta có

$$\begin{aligned} J &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^{-2} \frac{1}{(x+2)^2 + 1} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(\arctan(x+2) \Big|_t^{-2} \right) \\ &= - \lim_{t \rightarrow -\infty} \arctan(t+2) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{c) } K = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 4x + 13} dx$$

Áp dụng công thức (5.15), ta có

$$\begin{aligned} K &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2 - 4x + 13} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 4x + 13} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 \frac{1}{(x-2)^2 + 3^2} dx + \lim_{s \rightarrow +\infty} \int_0^s \frac{1}{(x-2)^2 + 3^2} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{x-2}{3}\right) \Big|_t^0 + \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{x-2}{3}\right) \Big|_0^s \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{3} \left[\arctan\left(\frac{-2}{3}\right) - \arctan\left(\frac{t-2}{3}\right) \right] + \\ &\quad + \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \left[\arctan\left(\frac{s-2}{3}\right) - \arctan\left(\frac{-2}{3}\right) \right] = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

5.3.2. Tích phân suy rộng loại 2: Định nghĩa và phương pháp tính

Nếu một tích phân có hàm lấy tích phân không bị chặn thì ta gọi tích phân đó là tích phân suy rộng loại 2.

Ví dụ 19. Cho tích phân suy rộng loại 2: $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$ và $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

a) $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ và $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$ thì $\int_a^b f(x) dx$ là tích phân suy rộng loại 2.

Ta có :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx \quad (5.16)$$

b) $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$ thì $\int_a^b f(x) dx$ là tích phân suy rộng loại 2.

Ta có :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx \quad (5.17)$$

Ví dụ 20. Tính các tích phân suy rộng sau

a) $I = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt[4]{2-x}} dx$

b) $J = \int_1^e \frac{1}{x \ln x} dx$

Giải

a) $I = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt[4]{2-x}} dx$

Vì $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{\sqrt[4]{2-x}} = +\infty$, áp dụng công thức (5.17), ta có

$$\begin{aligned} I &= \lim_{t \rightarrow 2^-} \int_1^t \frac{1}{\sqrt[4]{2-x}} dx = \lim_{t \rightarrow 2^-} \left[-\frac{4}{3} \sqrt[4]{(2-x)^3} \right]_1^t \\ &= \lim_{t \rightarrow 2^-} \frac{4}{3} \left[1 - \sqrt[4]{(2-t)^3} \right] = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

b) $J = \int_1^e \frac{1}{x \ln x} dx$

Vì $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x \ln x} = +\infty$, áp dụng công thức (5.16), ta có

$$J = \lim_{t \rightarrow 1^+} \int_t^e \frac{1}{\ln x} d(\ln x) = \lim_{t \rightarrow 1^+} \left[\ln(\ln x) \right]_t^e = \lim_{t \rightarrow 1^+} \left[\ln(\ln e) - \ln(\ln t) \right] = +\infty.$$

5.3.3. Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng

5.3.3.1. Mệnh đề

i) Cho hàm số $f : (0,1] \rightarrow \mathbb{R}$. Ta có

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ hội tụ khi và chỉ khi } \alpha < 1$$

ii) Cho hàm số $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Ta có

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ hội tụ và chỉ khi } \alpha > 1$$

5.3.3.2. Các tiêu chuẩn hội tụ

Hệ quả 1. Cho $f, g : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là hai hàm số dương

i) Nếu $f(x) \leq g(x), \forall x \in (a, b]$ và $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ.

ii) Nếu $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in (0, +\infty)$ thì $\int_a^b f(x)dx$ và $\int_a^b g(x)dx$ cùng bản chất.

Lưu ý:

+) Trường hợp: $L = 0$: Nếu $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ.

+) Trường hợp: $L = +\infty$: Nếu $\int_a^b g(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ.

Hệ quả 2. Cho $f, g : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ là hai hàm số dương

i) Nếu $f(x) \leq g(x), x \geq a$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

ii) Nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in (0, +\infty)$ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ cùng bản chất.

Lưu ý:

+) Trường hợp: $L = 0$: Nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

+) Trường hợp: $L = +\infty$: Nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ.