

Chương 6

CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN CỦA LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ TRONG MÁY TÍNH

6.1. Các khái niệm cơ bản của lý thuyết đồ thị

Lý thuyết đồ thị là một lĩnh vực đã được nghiên cứu từ lâu và có nhiều ứng dụng hiện đại. Chẳng hạn, đồ thị có thể sử dụng để xác định các mạch vòng trong vấn đề giải tích mạch điện. Chúng ta có thể phân biệt hai hợp chất hoá học có cùng công thức phân tử nhưng có cấu trúc khác nhau nhờ đồ thị. Chúng ta cũng có thể xác định xem hai máy tính trong mạng có thể trao đổi thông tin được với nhau hay không nhờ mô hình đồ thị của mạng máy tính. Đồ thị với các trọng số được gán cho các cạnh của nó có thể dùng để giải các bài toán như: bài toán tìm đường đi ngắn nhất giữa hai thành phố trong một mạng giao thông. Chúng ta cũng còn sử dụng đồ thị để giải các bài toán về lập lịch, thời khoá biểu và phân chia kênh cho các đài truyền hình...

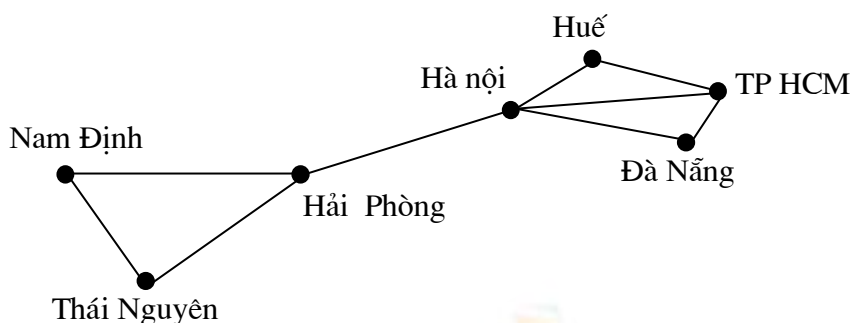
6.1.1. Định nghĩa đồ thị

Đồ thị là một cấu trúc rời rạc bao gồm các đỉnh và các cạnh nối các đỉnh đó. Chúng ta phân biệt các loại đồ thị khác nhau bởi kiểu và số lượng cạnh nối các cặp đỉnh của đồ thị.

Nhiều bài toán thuộc những lĩnh vực rất khác nhau có thể giải được bằng mô hình đồ thị. Chẳng hạn, ngày nay ta có thể dùng đồ thị để biểu diễn kết quả của cuộc thi đấu thể thao. Chúng ta cũng sẽ chỉ ra rằng có thể dùng đồ thị để giải các bài toán như: bài toán tính số tổ hợp khác nhau của các chuyến bay giữa hai thành phố trong một mạng hàng không, hay để giải bài toán ngày du lịch, hoặc bài toán tìm số màu cần thiết để tô các vùng khác nhau của một bản đồ,...

Định nghĩa 6.1. Đơn đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ bao gồm một tập không rỗng V là tập các đỉnh, và một tập E là tập các cặp không có thứ tự gồm hai phần tử khác nhau của V gọi là các cạnh.

Ví dụ 6.1. Giả sử một mạng máy tính gồm các máy tính và các đ-ờng điện thoại. Ta có thể biểu diễn vị trí của mỗi máy tính bằng một điểm và mỗi đ-ờng điện thoại bằng một cung nh- trong hình 6.1.

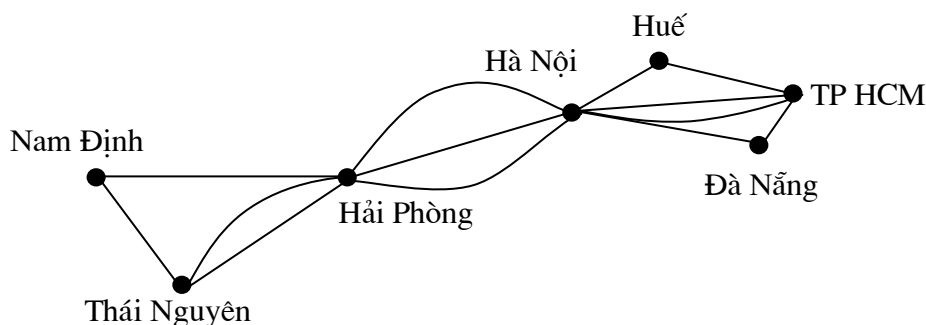


Hình 6.1

Trong mạng máy tính này ta thấy có nhiều nhất một đ-ờng điện thoại giữa hai máy, mỗi đ-ờng hoạt động theo cả hai chiều và không có máy tính nào có đ-ờng điện thoại nối đến chính nó. Do vậy mạng này có thể mô hình bằng một đơn đồ thị vô h-ớng.

Định nghĩa 6.2. Đa đồ thị vô h-ớng $G = (V, E)$ bao gồm V là tập các đỉnh, E là họ các cặp không có thứ tự gồm hai phần tử khác nhau của V gọi là các cạnh. Hai cạnh e_1 và e_2 đ-ợc gọi là cạnh lặp nếu chúng cùng t-ơng ứng với một cặp đỉnh.

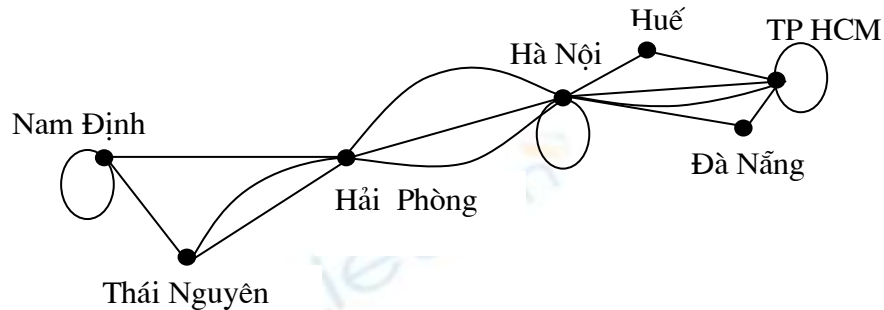
Ví dụ 6.2. Với mạng máy tính ở ví dụ 6.1, trong tr-ờng hợp giữa hai máy tính nào đó th-ờng xuyên phải truyền tải nhiều thông tin, ng-ời ta phải nối hai máy này bởi nhiều kênh thoại. Mạng với đa kênh thoại giữa các máy đ-ợc minh hoạ bởi hình 6.2.



Hình 6.2

Định nghĩa 6.3. Giả đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ bao gồm V là tập các đỉnh, E là họ các cặp không có thứ tự gồm hai phần tử (không nhất thiết phải khác nhau) của V gọi là các cạnh. Cạnh e được gọi là khuyên nếu có dạng $e=(u, u)$

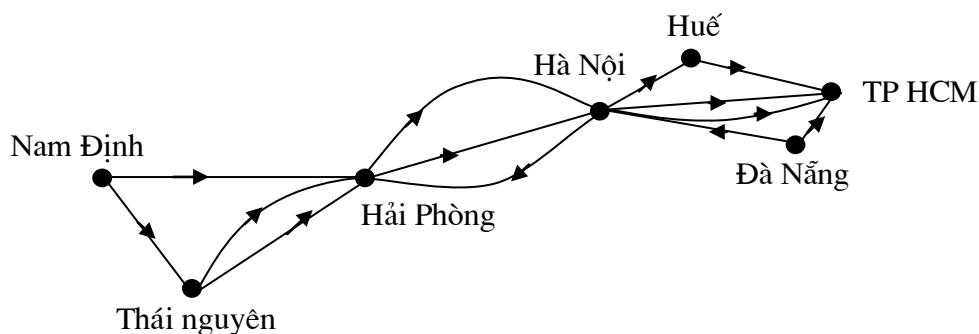
Ví dụ 6.3. Một mạng máy tính có đường điện thoại từ một máy tính đến chính nó. Đó là mạng trên hình 6.3. Trong trường hợp này ta có giả đồ thị vô hướng như hình 6.3.



Hình 6.3.

Định nghĩa 6.4. Đơn đồ thị có hướng $G = (V, E)$ bao gồm V là tập các đỉnh, E là tập các cặp có thứ tự gồm hai phần tử khác nhau của V gọi là các cung.

Ví dụ 6.4. Các đường điện thoại trong một mạng máy tính có thể chỉ hoạt động theo một chiều. Chẳng hạn trên hình 6.4 máy chủ ở TP HCM có thể chỉ nhận dữ liệu từ các máy khác mà không thể gửi dữ liệu đi. Các đường điện thoại 2 chiều được biểu diễn bằng một cặp cạnh có chiều ngược nhau. Khi đó ta có một đơn đồ thị có hướng



Hình 6.4.

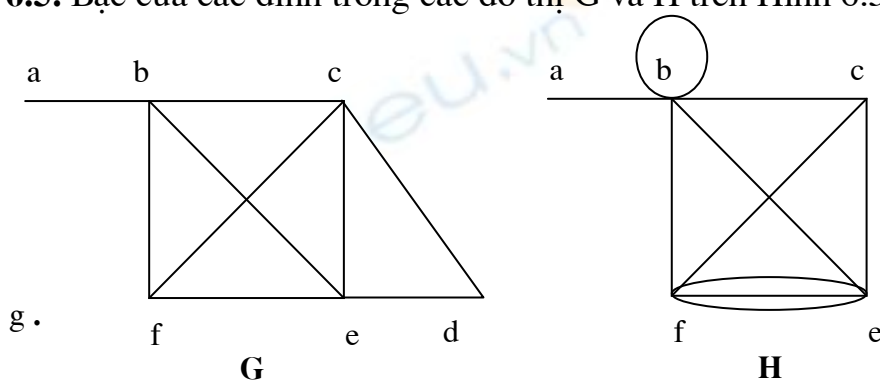
Định nghĩa 6.5. Đa đồ thị có hướng $G = (V, E)$ bao gồm V là tập các đỉnh, E là họ các cặp có thứ tự gồm hai phần tử khác nhau của V gọi là các cung. Hai cung e_1, e_2 tương ứng với cùng một cặp đỉnh được gọi là cung lặp.

6.1.2. Các thuật ngữ cơ bản

Định nghĩa 6.6. Hai đỉnh u và v của đồ thị vô hướng G được gọi là kề nhau nếu (u, v) là cạnh của đồ thị G . Nếu $e = (u, v)$ là cạnh của đồ thị thì ta nói cạnh này là liên thuộc với hai đỉnh u và v , hoặc cũng nói là cạnh e là nối đỉnh u và đỉnh v , đồng thời các đỉnh u và v sẽ được gọi là các đỉnh đầu của cạnh (u, v)

Định nghĩa 6.7. Ta gọi bậc của đỉnh v trong đồ thị vô hướng là số cạnh liên thuộc với nó, riêng khuyên tại một đỉnh được tính hai lần cho bậc của nó. Bậc của đỉnh kí hiệu là $\deg(v)$.

Ví dụ 6.5. Bậc của các đỉnh trong các đồ thị G và H trên Hình 6.5 là bao nhiêu



Hình 6.5

Giải: Trong G , $\deg(a) = 1$, $\deg(b) = \deg(e) = \deg(c) = 4$, $\deg(f) = 3$, $\deg(g) = 0$

Trong H , $\deg(a) = 1$, $\deg(b) = 6$, $\deg(e) = \deg(f) = 5$, $\deg(c) = 3$.

Đỉnh bậc 0 gọi là đỉnh cô lập. Đỉnh bậc 1 được gọi là đỉnh treo.

Định lý 6.1. Giả sử $G = (V, E)$ là đồ thị vô hướng với m cạnh. Khi đó

$$2m = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

Chứng minh: Rõ ràng mỗi cạnh $e = (u, v)$ được tính một lần trong $\deg(u)$ và một lần trong $\deg(v)$. Từ đó suy ra tổng tất cả các bậc của các đỉnh bằng 2 lần số cạnh.

Ví dụ 6.6. Có bao nhiêu cạnh trong đồ thị vô hướng có n đỉnh, mỗi đỉnh có bậc bằng 6.

Giải: Vì tổng tất cả các bậc của đồ thị là $6n$, nên theo định lý 1 suy ra $2m = 6n$ hay $m = 3n$. Vậy số cạnh của đồ thị là $3n$

Định lý 6.2. Một đồ thị vô hướng có một số chẵn các đỉnh bậc lẻ.

Chứng minh: Giả sử V_1 và V_2 tương ứng là tập các đỉnh bậc chẵn và tập các đỉnh bậc lẻ của đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ khi đó:

$$2m = \sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in V_1} \deg(v) + \sum_{v \in V_2} \deg(v)$$

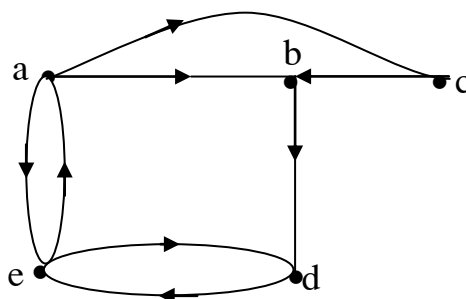
Vì $\deg(v)$ là chẵn với $v \in V_1$ nên suy ra $\sum_{v \in V_1} \deg(v)$ là chẵn. Do $2m$ là một số chẵn, vì vậy $\sum_{v \in V_2} \deg(v)$ là chẵn, do $\deg(v)$ là lẻ với $v \in V_2$ nên số đỉnh bậc lẻ là một số chẵn.

Định nghĩa 6.8. Nếu $e = (u, v)$ là cung của đồ thị có hướng G thì ta nói hai đỉnh u và v là kề nhau, và nói cung (u, v) nối đỉnh u với đỉnh v hoặc cũng nói cung này là đi ra khỏi đỉnh u và đi vào đỉnh v . Đỉnh u sẽ được gọi là đỉnh đầu, đỉnh v sẽ được gọi là đỉnh cuối của cung (u, v) . Đỉnh đầu và đỉnh cuối của khuyên là trùng nhau.

Vì các cạnh của đồ thị có hướng là các cặp có thứ tự, nên định nghĩa bậc của đỉnh cần phải phản ánh được số các cạnh nhận đỉnh này là đỉnh đầu (ra khỏi đỉnh này) và số các cạnh nhận đỉnh này là đỉnh cuối (đi vào đỉnh này).

Định nghĩa 6.9. Trong đồ thị có hướng ta gọi bậc ra của đỉnh v kí hiệu là $\deg^+(v)$ là số cung của đồ thị đi ra khỏi nó, ta gọi bậc vào của đỉnh v kí hiệu là $\deg^-(v)$ là số cung của đồ thị đi vào nó

Ví dụ 6.7. Tìm bậc vào và bậc ra của mỗi đỉnh của đồ thị có hướng cho trong hình 6.6



Hình 6.6

Giải : $\deg^+(a) = 3, \deg^+(b) = \deg^+(c) = \deg^+(d) = 1, \deg^+(e) = 2$

$\deg^-(a) = 1, \deg^-(b) = 1, \deg^-(c) = 2, \deg^-(d) = 2, \deg^-(e) = 2$

Định lý 6.3. Giả sử $G = (V, E)$ là đồ thị có hướng. Khi đó:

$$\sum_{v \in V} \deg^-(v) = \sum_{v \in V} \deg^+(v) = |E|$$

Chứng minh: Vì mỗi cung có một đỉnh đầu và một đỉnh cuối nên tổng các bậc vào và tổng các bậc ra của tất cả các đỉnh trong một đồ thị có hướng là bằng nhau và bằng số cạnh của nó.

Một số tính chất của đồ thị có hướng không phụ thuộc vào hướng của các cung của nó. Do đó, sẽ thuận lợi hơn nếu ta bỏ qua hướng trên các cung của đồ thị. Đồ thị thu được bằng cách này được gọi là đồ thị vô hướng tương ứng. Đồ thị có hướng và đồ thị vô hướng tương ứng có cùng số cạnh.

6.1.3. Đường đi, chu trình, đồ thị liên thông

Định nghĩa 6.10. Đường đi độ dài n từ đỉnh u đến đỉnh v , trong đó n là số nguyên dương, trên đồ thị vô hướng $G=(V, E)$ là dãy:

$x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ trong đó $u = x_0, v = x_n, (x_i, x_{i+1}) \in E; i=0, 1, 2, \dots, n-1$.

Đường đi nói trên còn có thể biểu diễn dưới dạng dãy các cạnh $(x_0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, x_n)$. Đỉnh u gọi là đỉnh đầu, còn đỉnh v là đỉnh cuối của đường đi.

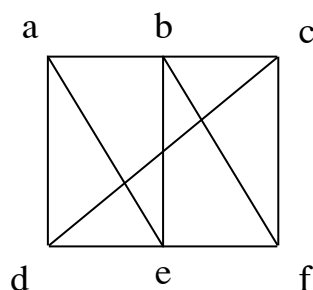
Đường đi có đỉnh đầu trùng với đỉnh cuối (tức là $u = v$) được gọi là chu trình.

Đường đi hoặc chu trình khi đó gọi là đi qua các đỉnh $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$.

Đường đi hay chu trình được gọi là đơn nếu nó không chứa cùng một cạnh quá một lần.

Ví dụ 6.8. Trên đồ thị vô hướng cho trong hình 6.7 ta có a, d, c, f, e là đường đi đơn độ dài 4. Còn d, e, c, a không là đường đi, do (e, c) không phải là cạnh của đồ thị. Dãy b, c, f, e, b là chu trình độ dài 4. Đường đi a, b, e, d, a, b có độ dài là 5 không phải là đường đi đơn, do cạnh (a, b) có mặt trong nó hai lần.

Hình 6.7



Khái niệm đường đi trên đồ thị có hướng được định nghĩa hoàn toàn tương tự như đồ thị vô hướng chỉ khác là ta có chú ý đến hướng trên các cung.

Định nghĩa 6.11. Đường đi độ dài n từ đỉnh u đến đỉnh v , trong đó n là số nguyên dương, trên đồ thị có hướng $G=(V, E)$ là dãy $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$

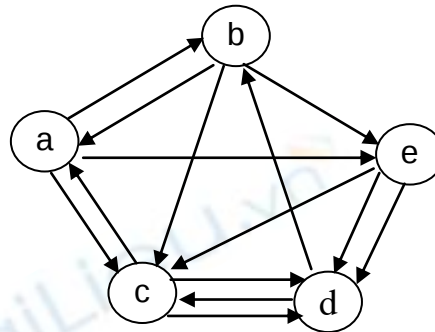
Trong đó $u = x_0, v = x_n, (x_i, x_{i+1}) \in E, i = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Đ-ờng đi nói trên còn có thể biểu diễn dãy các cung:

$$(x_0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, x_n).$$

Đỉnh u gọi là đỉnh đầu, còn đỉnh v gọi là đỉnh cuối của đ-ờng đi. Đ-ờng đi có đỉnh đầu trùng với đỉnh cuối (tức là $u = v$) đ-ợc gọi là chu trình. Đ-ờng đi hay chu trình đ-ợc gọi là đơn nếu nó không chứa cùng một cung quá một lần.

Ví dụ 6.9.

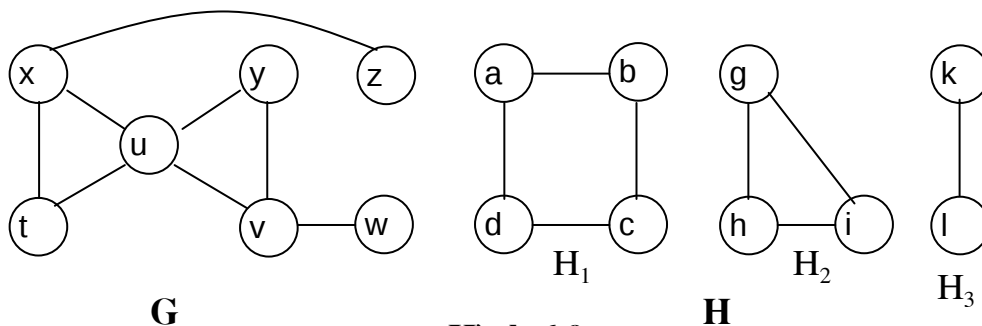


Hình 6.8

Trên đồ thị có hướng cho trong hình 6.8 ta có a, b, c, d là đ-ờng đi đơn độ dài 3. Còn a, b, c, d, b, a là chu trình độ dài 4. Đ-ờng đi a, b, e, c, a, b có độ dài là 5 không phải là đ-ờng đi đơn, do cung (a, b) có mặt trong nó 2 lần.

Định nghĩa 6.12. Đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ đ-ợc gọi là liên thông nếu có đ-ờng đi giữa mọi cặp đỉnh phân biệt của đồ thị.

Ví dụ 6.10. Trong hình 6.9: Đồ thị G là liên thông, còn đồ thị H là không liên thông. Đồ thị H gồm 3 thành phần liên thông H_1, H_2, H_3



Hình 6.9

Định lý 6.4. Giữa mọi cặp đỉnh phân biệt của một đồ thị vô hướng liên thông luôn có đ-ờng đi đơn.

Chứng minh: Giả sử u và v là hai đỉnh phân biệt của một đồ thị vô hướng liên thông $G = (V, E)$. Vì G là liên thông nên có ít nhất một đ-ờng đi giữa u

và v . Gọi $x_0, x_1, \dots, x_n$, với $x_0=u$ và $x_n=v$, là dãy các đỉnh của đ-ờng đi có độ dài ngắn nhất. Dãy này chính là đ-ờng đi đơn cần tìm. Thật vậy, giả sử nó không là đ-ờng đi đơn, khi đó $x_i=x_j$ với $0 \leq i < j$. Điều này có nghĩa là giữa các đỉnh u và v có đ-ờng đi ngắn hơn qua các đỉnh $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, \dots, x_n$ nhận được bằng cách xóa đi các cạnh tương ứng với dãy các đỉnh $x_i, \dots, x_{j-1}$.

Định nghĩa 6.13. Ta gọi đồ thị con của đồ thị $G=(V, E)$ là đồ thị $H=(W, F)$ trong đó $W \subseteq V$ và $F \subseteq E$.

Một đồ thị không liên thông là hợp của hai hay nhiều đồ thị con liên thông, mỗi cặp các đồ thị con này không có đỉnh chung. Các đồ thị con liên thông rời nhau như vậy được gọi là các thành phần liên thông của đồ thị đang xét. Như vậy, một đồ thị là liên thông khi và chỉ khi nó chỉ có một thành phần liên thông

Ví dụ 6.11. Đồ thị H trong hình 6.9 gồm 3 thành phần liên thông H_1, H_2, H_3 .

Trong mạng máy tính có thể có những máy (những kênh nối) mà sự hỏng hóc của nó sẽ ảnh hưởng đến việc trao đổi thông tin trong mạng. Các khái niệm tương ứng với tình huống này được đưa ra trong định nghĩa sau.

Định nghĩa 6.14. Đỉnh v được gọi là đỉnh rẽ nhánh nếu việc loại bỏ v cùng với các cạnh liên thuộc với nó khỏi đồ thị làm tăng số thành phần liên thông của đồ thị. Cạnh e được gọi là cầu nếu việc loại bỏ nó khỏi đồ thị làm tăng số thành phần liên thông của đồ thị.

Ví dụ 6.12. Trong đồ thị G ở hình 6.9, đỉnh u, x, v là các đỉnh rẽ nhánh còn các cạnh (x, z) và (v, w) là cầu.

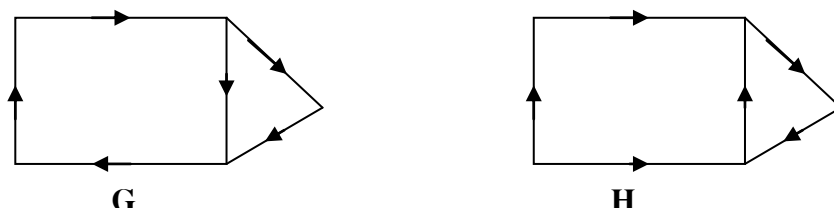
Đối với đồ thị có hướng có hai khái niệm liên thông phụ thuộc vào việc ta có xem xét đến hướng trên các cung hay không.

Định nghĩa 6.15. Đồ thị có hướng $G=(V, E)$ được gọi là liên thông mạnh nếu luôn tìm được đ-ờng đi giữa hai đỉnh bất kỳ của nó.

Định nghĩa 6.16. Đồ thị có hướng $G=(V, E)$ được gọi là liên thông yếu nếu đồ thị vô hướng tương ứng với nó là đồ thị vô hướng liên thông.

Rõ ràng nếu muốn đồ thị là liên thông mạnh thì nó cũng là liên thông yếu, nhưng điều ngược lại không luôn đúng, như chỉ ra trong thí dụ dưới đây.

Ví dụ 6.13: Trong hình 6.10 đồ thị G là liên thông mạnh, còn H là liên thông yếu nhưng không là liên thông mạnh.



Hình 6.10

Vấn đề đặt ra là khi nào có thể định hướng các cạnh của một đồ thị vô hướng liên thông để có thể thu được đồ thị có hướng liên thông mạnh. Ta sẽ gọi đồ thị như vậy là đồ thị định hướng được.

Định lý 6.5. Đồ thị vô hướng liên thông là định hướng được khi và chỉ khi mỗi cạnh của nó nằm trên ít nhất một chu trình.

Chứng minh.

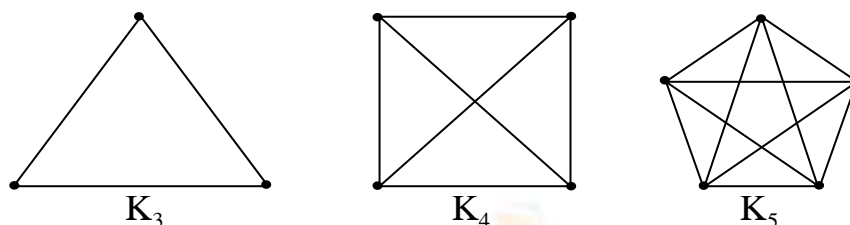
Điều kiện cần. Giả sử (u, v) là một cạnh của đồ thị. Từ sự tồn tại đường đi có hướng từ u đến v và ngược lại suy ra (u, v) phải nằm trên ít nhất một chu trình.

Điều kiện đủ. Thủ tục sau đây cho phép định hướng các cạnh của đồ thị để thu được đồ thị có hướng liên thông mạnh. Giả sử C là một chu trình nào đó trong đồ thị. Định hướng các cạnh trên chu trình này theo một hướng đi vòng theo nó. Nếu tất cả các cạnh của đồ thị là đã định hướng thì kết thúc thủ tục. Ngược lại, chọn e là một cạnh chưa định hướng có chung đỉnh với ít nhất một trong số các cạnh đã định hướng. Theo giả thiết tìm được chu trình C' chứa cạnh e . Định hướng các cạnh chưa định hướng của C' theo một hướng dọc theo chu trình này (không định hướng lại các cạnh đã có hướng). Thủ tục trên sẽ được lặp lại cho đến khi tất cả các cạnh của đồ thị đã định hướng. Khi đó ta thu được đồ thị có hướng liên thông mạnh.

6.1.4. Một số dạng đồ thị đặc biệt

Đồ thị đầy đủ. Đồ thị đầy đủ n đỉnh, ký hiệu là K_n , là một đơn đồ thị chứa đúng một cạnh nối mỗi cặp đỉnh phân biệt. Đồ thị đầy đủ K_n có tất cả $n(n-1)/2$ cạnh, mỗi đỉnh của K_n có bậc là $n-1$.

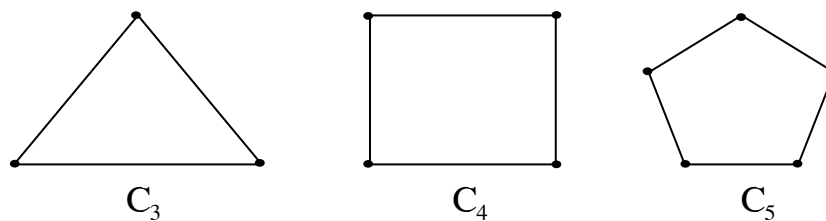
Ví dụ 6.14. Các đồ thị K_3, K_4, K_5 cho trong hình 6.11 là các đồ thị đầy đủ.



Hình 6.11.

Đồ thị vòng. Đồ thị vòng $C_n, n \geq 3$, gồm n đỉnh $v_1, v_2, \dots, v_n$ và các cạnh $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1)$. Mỗi đỉnh của C_n có bậc là 2.

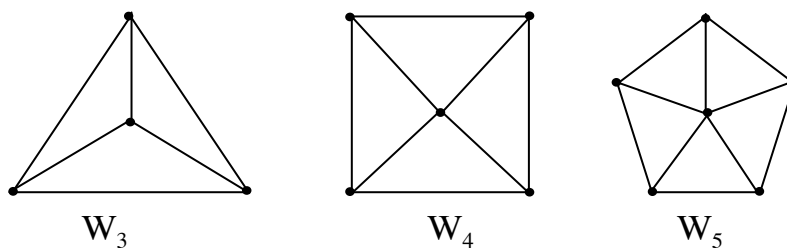
Ví dụ 6.15. Đồ thị vòng C_3, C_4, C_5 cho trong hình 6.12



Hình 6.12

Đồ thị bánh xe. Đồ thị W_n thu được từ C_n bằng cách bổ xung vào một đỉnh mới nối với tất cả các đỉnh của C_n . Như vậy, đồ thị W_n có $n+1$ đỉnh, $2n$ cạnh, một đỉnh bậc n và n đỉnh bậc 3.

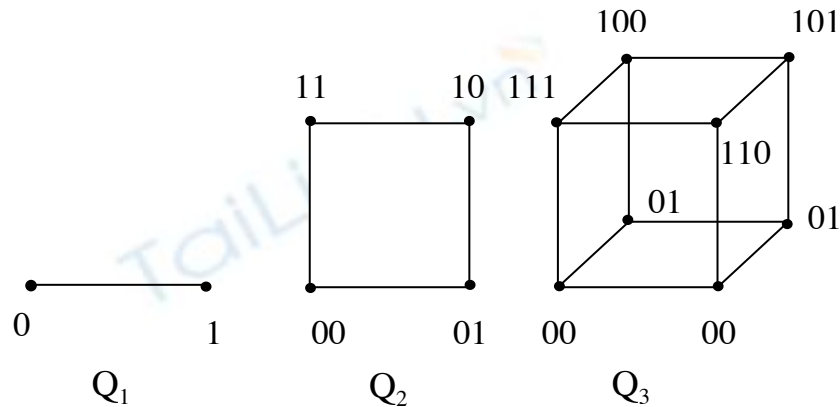
Ví dụ 6.16. Đồ thị bánh xe W_3, W_4, W_5



Hình 6.13

Đồ thị lập ph-ong. Đơn đồ thị 2^n đỉnh t-ong ứng với 2^n xâu nhị phân độ dài n và hai đỉnh kề nhau khi và chỉ khi hai xâu nhị phân t-ong ứng với hai đỉnh này chỉ khác nhau đúng một bit đ-ợc gọi là đồ thị lập ph-ong, ký hiệu là Q_n . Nh- vậy mỗi đỉnh của Q_n có bậc là n và số cạnh của Q_n là $n.2^{n-1}$ (từ công thức $2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v)$)

Ví dụ 6.17. Đồ thị lập ph-ong Q_1, Q_2, Q_3

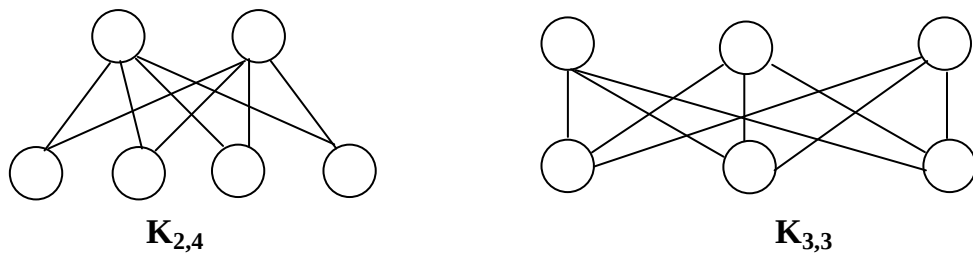


Hình 6.14

Đồ thị phân đôi (Đồ thị hai phía). Một đồ thị đơn G đ-ợc gọi là phân đôi nếu tập các đỉnh V có thể phân làm hai tập con không rỗng, rời nhau V_1 và V_2 sao cho mỗi cạnh của đồ thị nối một đỉnh của V_1 với một đỉnh của V_2 .

Nếu đồ thị phân đôi $G = (V_1 \cup V_2, E)$ sao cho với mọi $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, (v_1, v_2) \in E$ thì G được gọi là đồ thị phân đôi đầy đủ. Nếu $|V_1|=m, |V_2|=n$ thì đồ thị phân đôi đầy đủ G ký hiệu là $K_{m,n}$. Như vậy $K_{m,n}$ có $m.n$ cạnh, các đỉnh của V_1 có bậc n và các đỉnh của V_2 có bậc m .

Ví dụ 6.18. Trong hình 6.15 là các đồ thị phân đôi đầy đủ $K_{2,4}, K_{3,3}$



Hình 6.15

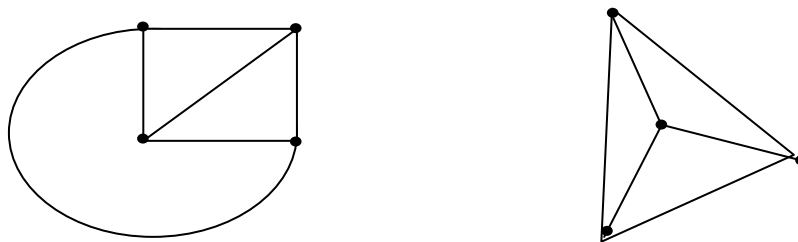
Định lý 6.6. Một đơn đồ thị là đồ thị phân đôi khi và chỉ khi nó không chứa chu trình độ dài lẻ.

Định lý trên cho phép nhận biết một đơn đồ thị có phải là phân đôi hay không.

Để kiểm tra xem một đồ thị liên thông có phải là phân đôi hay không có thể áp dụng thủ tục sau. Chọn v là một đỉnh bất kì của đồ thị. Đặt $X = \{v\}$, còn Y là tập các đỉnh kề của v . Khi đó các đỉnh kề của các đỉnh trong Y phải thuộc vào X kí hiệu tập các đỉnh nh- vậy là T . Vì thế nếu phát hiện $T \cap Y \neq \emptyset$ thì đồ thị không phải là phân đôi, kết thúc. Ngược lại đặt $X = X \cup T$. Tiếp tục xét như vậy đối với T' là tập các đỉnh kề của T ,...

Đồ thị phẳng. Đồ thị đ-ợc gọi là đồ thị phẳng nếu ta có thể vẽ nó trên mặt phẳng sao cho các cạnh của nó không cắt nhau ngoài ở đỉnh. Cách vẽ nh- vậy sẽ đ-ợc gọi là biểu diễn phẳng của đồ thị

Trong ví dụ hình 6.16 đồ thị K_4 là phẳng, vì có thể vẽ nó trên mặt phẳng sao cho các cạnh của nó không cắt nhau ngoài ở đỉnh.



Hình 6.16.

6.2. Biểu diễn đồ thị trên máy tính

Để l- u trữ đồ thị và thực hiện các thuật toán khác nhau với đồ thị trên máy tính cần phải tìm những cấu trúc dữ liệu thích hợp để mô tả đồ thị. Việc chọn cấu trúc dữ liệu nào để biểu diễn đồ thị có tác động rất lớn đến hiệu quả của một thuật toán. Vì vậy, việc lựa chọn cấu trúc để biểu diễn đồ thị phụ thuộc vào từng tình huống cụ thể (bài toán và thuật toán cụ thể). Trong mục này chúng ta sẽ xét một số ph-ơng pháp cơ bản đ-ợc sử dụng để biểu diễn đồ

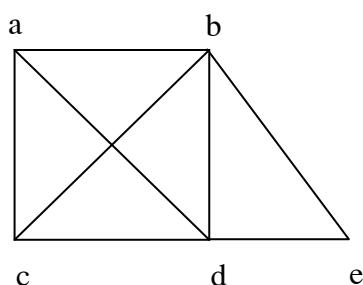
thị trên máy tính. Đồng thời cũng phân tích một cách ngắn gọn những ưu điểm cũng như những nhược điểm của chúng.

Trong rất nhiều vấn đề ứng dụng của lý thuyết đồ thị, mỗi cạnh $e=(u, v)$ của đồ thị đều gắn với một con số $c(e)$ (còn viết là $c(u,v)$) gọi là trọng số của cạnh e . Đồ thị trong trường hợp như vậy được gọi là đồ thị có trọng số.

6.2.1. Biểu diễn đồ thị bằng danh sách cạnh

Trong trường hợp đồ thị thưa (đồ thị có số cạnh m thỏa mãn bất đẳng thức: $m < 6n$) nên ta thường dùng cách biểu diễn đồ thị bởi danh sách cạnh. Trong cách biểu diễn đồ thị bởi danh sách cạnh (cung) chúng ta sẽ lưu trữ danh sách tất cả các cạnh (cung) của đồ thị vô hướng (có hướng). Mỗi cạnh (cung) $e=(x,y)$ của đồ thị sẽ tương ứng với hai biến $Dau[e]$, $Cuoi[e]$. Như vậy, để lưu trữ đồ thị ta cần sử dụng $2m$ đơn vị bộ nhớ. Nhược điểm của cách biểu diễn này là để xác định những đỉnh nào của đồ thị là kề với một đỉnh cho trước chúng ta phải làm cỡ m phép so sánh (khi duyệt qua danh sách tất cả các cạnh của đồ thị). Trong trường hợp đồ thị có trọng số ta cần thêm m đơn vị bộ nhớ để lưu trữ trọng số của các cạnh.

Ví dụ 6.19. Danh sách cạnh của đồ thị cho trong hình 6.17 là:



Hình 6.17

Dau	Cuoi
a	b
a	c
a	d
b	c
b	d
b	e
d	c
d	e

6.2.2. Biểu diễn đồ thị bằng danh sách kề

Trong rất nhiều vấn đề ứng dụng của lý thuyết đồ thị, cách biểu diễn đồ thị dưới dạng danh sách kề là cách biểu diễn thích hợp nhất được sử dụng. Danh sách này chỉ rõ các đỉnh kề với mỗi đỉnh của đồ thị

Ví dụ 6.20. Dùng danh sách kề mô tả đồ thị trên hình 6.17

Đỉnh	Đỉnh kề
a	b, c, d
b	a, c, d, e
c	a, b, d
d	a, b, c, e
e	b, d

6.2.3. Biểu diễn đồ thị bằng ma trận kề

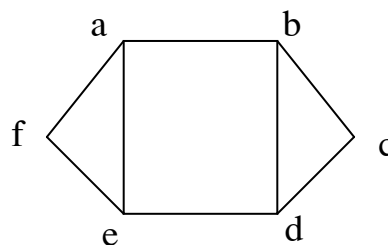
Khi biểu diễn đồ thị bởi danh sách cạnh hay danh sách kề, thì việc thực hiện một số thuật toán sẽ rất cồng kềnh nếu đồ thị có nhiều cạnh. Để đơn giản việc tính toán, ta có thể biểu diễn đồ thị bằng ma trận. Có hai kiểu ma trận thường được dùng để biểu diễn đồ thị sẽ được giới thiệu dưới đây.

Xét đơn đồ thị vô hướng $G=(V, E)$, với tập đỉnh $V=\{1,2, \dots, n\}$ và tập cạnh $E=\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Ta gọi ma trận kề A của đồ thị G ứng với danh sách các đỉnh này là ma trận không-một cấp $n \times n$ với các phần tử được xác định theo quy tắc sau đây:

$$a_{ij}=0 \text{ nếu } i,j \notin E \text{ và } a_{ij}=1, \text{ nếu } (i,j) \in E (i,j=1,2,\dots,n)$$

Ví dụ 6.21. Ma trận kề của đồ thị vô hướng G cho trong hình 6.18 là :

	a	b	c	d	e	f
a	0	1	0	0	1	1
b	1	0	1	1	0	0
c	0	1	0	1	0	0
d	0	1	1	0	1	0
e	1	0	0	1	0	1
f	1	0	0	0	1	0



Hình 6.18

Các tính chất của ma trận kề :

- 1) Ma trận kề của đồ thị vô hướng là ma trận đối xứng tức là

$$A[i,j] = A[j,i] \quad i,j=1,2,\dots,n.$$

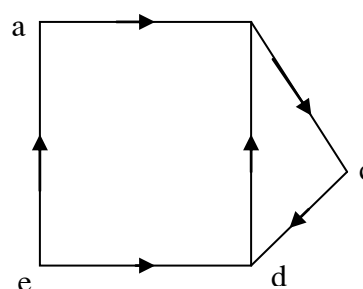
Ngược lại, mỗi ma trận đối xứng cấp n mà các phần tử là 0 hoặc 1 sẽ tương ứng với một đơn đồ thị vô hướng n đỉnh.

2) Tổng các phần tử trên dòng i (cột j) của ma trận kề chính bằng bậc của đỉnh i (đỉnh j)

Ma trận kề của đồ thị có hướng định nghĩa một cách hoàn toàn tương tự.

Ví dụ 6.22. Đồ thị có hướng cho trong hình 6.19 có ma trận kề sau:

	a	b	c	d	e
a	0	1	0	0	0
b	0	0	1	0	0
c	0	0	0	0	0
d	0	1	0	0	0
e	1	0	0	1	0



Hình 6.19.

Chú ý rằng ma trận kề của đồ thị có hướng không phải là ma trận đối xứng.

Chú ý: Trên đây chúng ta chỉ xét đơn đồ thị. Ma trận kề của đa đồ thị có thể xây dựng hoàn toàn tương tự, chỉ khác nhau là thay vì ghi 1 vào vị trí $a[i,j]$ nếu (i,j) là cạnh của đồ thị chúng ta sẽ ghi k là số các cạnh nối hai đỉnh i và j .

Trong trường hợp đồ thị có trọng số, thay vì ma trận kề, để biểu diễn đồ thị ta sử dụng ma trận trọng số.

$$C=c[i,j] \quad i,j=1,2,\dots,n.$$

Với

$$c[i,j]=c(i,j) \quad \text{nếu } (i,j) \in E$$

trong đó $c(i,j)$ là trọng số của cạnh (i,j) , và

$$c[i,j]=0 \quad \text{nếu } (i,j) \notin E$$

trong đó số θ tùy ý từng trường hợp cụ thể, có thể đặt bằng một trong các giá trị sau: $0, +\infty, -\infty$.

Ưu điểm lớn nhất của phương pháp biểu diễn đồ thị bằng ma trận kề (hoặc ma trận trọng số) là để trả lời câu hỏi: Hai đỉnh u, v có kề nhau trên đồ thị hay không, chúng ta chỉ phải thực hiện một phép so sánh. Nhược điểm lớn nhất của phương pháp này là không phụ thuộc vào số cạnh của đồ thị, ta luôn sử dụng n^2 đơn vị bộ nhớ để lưu trữ ma trận kề của nó.

6.2.4. Sự đẳng cấu của các đồ thị

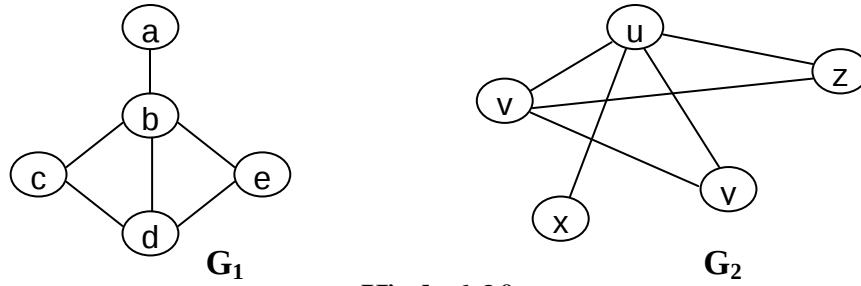
Thông thường, người ta cần biết xem có thể vẽ được hai đồ thị theo cùng một cách không. Chẳng hạn, trong hóa học, đồ thị thường để tạo mô hình các hợp chất. Các hợp chất khác nhau có thể có cùng công thức phân tử nhưng cấu trúc có thể khác nhau. Các hợp chất như vậy sẽ được biểu diễn bằng các đồ thị mà ta không thể vẽ được cùng một cách. Những đồ thị biểu diễn các hợp chất đã biết có thể được dùng để xác định xem một hợp chất đã biết có thể được dùng để xác định xem một hợp chất cho là mới thực ra đã biết từ trước chưa? Sau đây là một vài thuật ngữ đối với các đồ thị có cấu trúc như nhau.

Định nghĩa 6.17. Các đơn đồ thị $G_1=(V_1,E_1)$ và $G_2=(V_2,E_2)$ được gọi là đẳng cấu nếu tồn tại một song ánh f từ V_1 lên V_2 sao cho các đỉnh u và v là liên kề trong G_1 khi và chỉ khi $f(u)$ và $f(v)$ là liên kề trong G_2 với mọi u và v trong V_1 . Ảnh xạ f như thế gọi là một phép đẳng cấu.

Thông thường, để chứng tỏ hai đơn đồ thị là không đẳng cấu, người ta chỉ ra chúng không có chung một tính chất mà các đơn đồ thị đẳng cấu cần phải có. Tính chất như thế gọi là một bất biến đối với phép đẳng cấu của các đơn đồ thị. Chẳng hạn, các đơn đồ thị đẳng cấu có cùng số đỉnh. Hơn thế nữa, các đơn đồ thị đẳng cấu có cùng số cạnh, bởi vì phép tương ứng 1-1 giữa các đỉnh sẽ tạo ra phép tương ứng 1-1 giữa các cạnh. Và sau nữa, bậc của các đỉnh của các đơn đồ thị đẳng cấu phải như nhau. Nghĩa là, đỉnh v bậc k trong G_1 phải tương ứng với đỉnh $f(v)$ bậc k trong G_2 , vì đỉnh w trong G_1 là nối đỉnh v nếu và chỉ nếu $f(v)$ và $f(w)$ là kề trong G_2 .

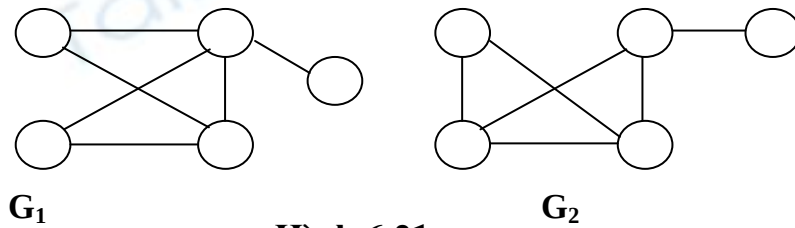
Ví dụ 6.23. Hai đơn đồ thị G_1 và G_2 sau là đẳng cấu qua phép đẳng cấu f :

$a \alpha x, b \alpha u, c \alpha z, d \alpha v, e \alpha y$



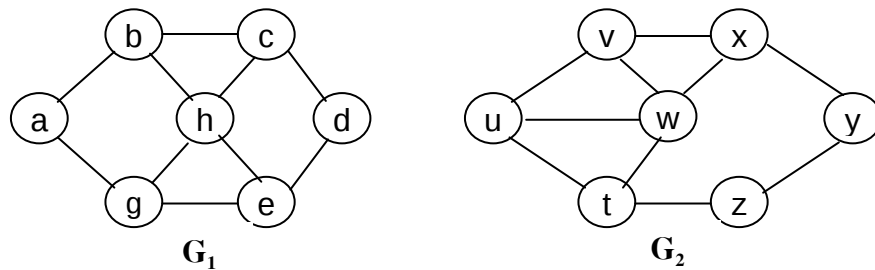
Hình 6.20

Ví dụ 6.24. Hai đồ thị G_1 và G_2 sau đều có 5 đỉnh và 6 cạnh nhưng không đẳng cấu vì trong G_1 có một đỉnh bậc 4 mà trong G_2 không có đỉnh bậc 4 nào.



Hình 6.21

Ví dụ 6.25. Hai đồ thị G_1 và G_2 sau đều có 7 đỉnh, 10 cạnh, cùng có một đỉnh bậc 4, bốn đỉnh bậc 3 và hai đỉnh bậc 2. Tuy nhiên G_1 và G_2 là không đẳng cấu vì hai đỉnh bậc 2 của G_1 (a và d) là không kề nhau, trong khi hai đỉnh bậc 2 của G_2 (y và z) là kề nhau.



Hình 6.22

BÀI TẬP CHƯƠNG 6

1. Có tồn tại đơn đồ thị có 5 đỉnh với số bậc sau đây không? Nếu có hãy vẽ đồ thị đó

a. 3, 3, 3, 3, 2

b. 1, 2, 3, 4, 5

c. 0, 1, 2, 2, 3

d. 1, 1, 1, 1, 1

2. Đồ thị K_2 có bao nhiêu đồ thị con có ít nhất một đỉnh?

3. Đồ thị K_3 có bao nhiêu đồ thị con có ít nhất một đỉnh?

4. Đồ thị W_3 có bao nhiêu đồ thị con có ít nhất một đỉnh?

5. Có thể tồn tại đồ thị đơn có 10 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc bằng 5 không?

6. Đồ thị đơn đ-ợc gọi là chính qui nếu mọi đỉnh của nó có bậc nh- nhau. Đồ thị đ-ợc gọi là n - chính qui nếu mọi đỉnh của nó có bậc n . Với các giá trị nào của n đồ thị sau đây là chính qui:

a. K_n

b. C_n

7. Cho G là đồ thị có v đỉnh và e cạnh, còn M, m tương ứng là bậc lớn nhất và nhỏ nhất của các đỉnh của G . Chứng tỏ rằng

$$m \leq \frac{2e}{v} \leq M.$$

8. Chứng minh rằng nếu G là đơn đồ thị phân đôi có v đỉnh và e cạnh, khi đó

$$e \leq v^2/4.$$

9. Chứng minh rằng trong một đơn đồ thị luôn tồn tại hai đỉnh có cùng bậc.

10. Chứng minh rằng trong một đồ thị với n đỉnh ($n > 2$) mà có đúng hai đỉnh cùng bậc thì hai đỉnh này không thể đồng thời có bậc 0 hoặc $n-1$.

11. Hãy vẽ các đồ thị vô hướng được biểu diễn bởi các ma trận kề sau:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix},$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$

12. Nêu ý nghĩa của tổng các phần tử trên một hàng (t.ư. cột) của một ma trận liên kề đối với một đồ thị vô hướng ? Đối với đồ thị có hướng ?

13. Tìm ma trận kề cho các đồ thị sau:

a) K_n b) C_n c) W_n d) $K_{m,n}$ e) Q_n .

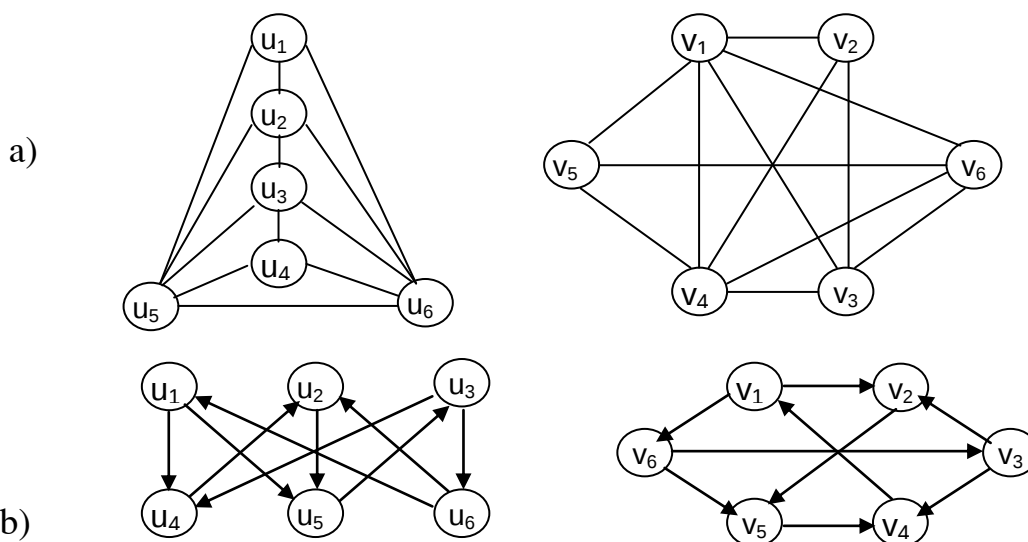
14. Hai đơn đồ thị với ma trận kề sau đây có là đẳng cấu không?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

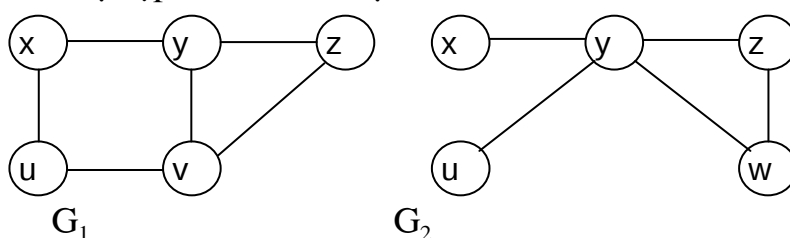
15. Hai đơn đồ thị với ma trận kề sau đây có là đẳng cấu không?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

16. Các đồ thị G và G' sau có đẳng cấu với nhau không?

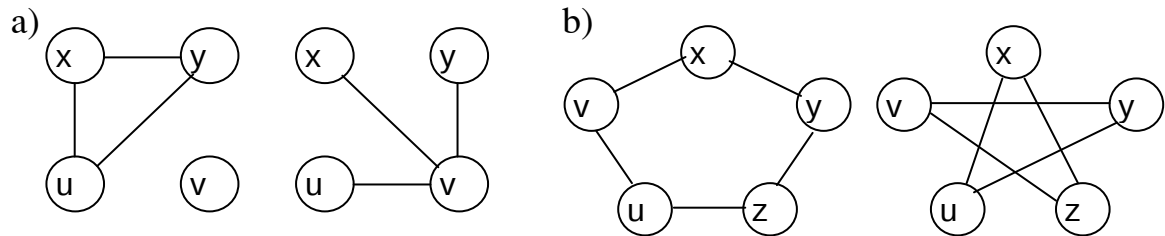


17. Hợp của hai đơn đồ thị $G_1=(V_1, E_1)$ và $G_2=(V_2, E_2)$ là một đơn đồ thị có tập các đỉnh là $V_1 \cup V_2$ và tập các cạnh là $E_1 \cup E_2$ và đ-ợc ký hiệu là $G_1 \cup G_2$. Hãy vẽ đồ thị hợp của hai đồ thị sau:



18. Đơn đồ thị $G'=(V,E')$ được gọi là đồ thị bù của đơn đồ thị $G=(V,E)$ nếu G và G' không có cạnh chung nào ($E \cap E'=\emptyset$) và $G \cup G'$ là đồ thị đầy đủ.

Dễ thấy rằng nếu G' là bù của G thì G cũng là bù của G' . Khi đó ta nói hai đồ thị là bù nhau. Chứng tỏ rằng các đồ thị sau là bù nhau



19. Chứng tỏ rằng mọi đơn đồ thị n đỉnh ($n \geq 2$) có tổng các bậc của hai đỉnh tùy ý không nhỏ hơn n đều là đồ thị liên thông.

20. Chứng tỏ rằng nếu một đồ thị có đúng hai đỉnh bậc lẻ thì hai đỉnh này phải liên thông, tức là có một đường đi giữa chúng.

21. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n > 2$, luôn tồn tại đồ thị n đỉnh mà 3 đỉnh bất kỳ của đồ thị đều không cùng bậc.

22. Cho $V=\{ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \}$ và E là tập hợp các cặp phần tử (u,v) của V sao cho $u < v$ và u, v nguyên tố cùng nhau. Hãy vẽ đồ thị có hướng $G=(V,E)$. Tìm số các đường đi phân biệt độ dài 3 từ đỉnh 2 tới đỉnh 8.

23. Hãy tìm số đường đi độ dài n giữa hai đỉnh liên kề (không liên kề) tùy ý trong $K_{3,3}$ với mỗi giá trị của n sau:

a) $n=2$ b) $n=3$ c) $n=4$

24. Một cuộc họp có ít nhất 3 đại biểu đến dự. Mỗi người quen ít nhất hai đại biểu khác. Chứng minh rằng có thể xếp được một số đại biểu ngồi xung quanh một bàn tròn mà mỗi người ngồi giữa hai người mà đại biểu đó quen.

25. Trong một cuộc họp có đúng hai đại biểu không quen nhau và mỗi đại biểu này có một số lẻ người quen đến dự. Chứng minh rằng luôn luôn có thể xếp một số đại biểu ngồi chen giữa hai đại biểu nói trên, để mỗi người ngồi giữa hai người mà anh ta quen.