

Lời nói đầu

Tài liệu **Toán rời rạc** được biên soạn nhằm phục vụ công việc giảng dạy và học tập môn học Toán rời rạc của các ngành học thuộc khoa Công nghệ thông tin trường Đại học sư phạm kỹ thuật Nam Định.

Với thời lượng 60 tiết nội dung của tài liệu chỉ đề cập đến các kiến thức cơ bản của lý thuyết tổ hợp và lý thuyết đồ thị là hai lĩnh vực có nhiều ứng dụng của toán rời rạc. Nội dung tài liệu gồm 10 chương: Từ chương 1 đến chương 5 nhằm giới thiệu các kiến thức cơ bản của lý thuyết tổ hợp, từ chương 6 đến chương 10 nhằm giới thiệu các kiến thức cơ bản của lý thuyết đồ thị.

Trong từng chương các vấn đề đưa ra đều được minh họa bằng các ví dụ. Cuối mỗi chương đều có một hệ thống các bài tập nhằm giúp người học củng cố các kiến thức đã được học đồng thời rèn luyện khả năng vận dụng các kiến thức để giải quyết một số bài toán trong thực tế.

Tài liệu được biên soạn theo chương trình môn học Toán rời rạc của các ngành học thuộc khoa Công nghệ thông tin trường Đại học sư phạm kỹ thuật Nam Định. Nội dung tài liệu được biên soạn dựa trên cơ sở nội dung các bài giảng môn học này của tác giả trong một số năm qua tại khoa Công nghệ thông tin trường Đại học sư phạm kỹ thuật Nam Định.

Trong quá trình biên soạn, tác giả đã nhận được nhiều ý kiến đóng góp cùng với sự động viên, khích lệ của bạn bè đồng nghiệp trong khoa và trong trường. Tác giả xin được tỏ lòng cảm ơn với những ý kiến đóng góp và động viên khích lệ này.

Với lần biên soạn đầu tiên, mặc dù đã hết sức cố gắng song chắc chắn tài liệu không thể tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong nhận được các ý kiến đóng góp để tài liệu ngày càng hoàn thiện hơn.

Phạm Cao Hào

Chương 1

MỘT SỐ KIẾN THỨC MỞ ĐẦU VỀ LÝ THUYẾT TỔ HỢP

1.1. Giới thiệu về tổ hợp

Toán rời rạc là một lĩnh vực của toán học nghiên cứu về các đối tượng rời rạc. Các tập hợp dùng để nhóm các đối tượng lại với nhau. Thông thường, các đối tượng trong một tập hợp có các tính chất tương tự nhau. Ví dụ, các sinh viên vừa mới nhập trường lập nên một tập hợp. Tương tự như vậy, các sinh viên khoa CNTT lập nên một tập hợp. Các dãy nhị phân có độ dài n cũng lập nên một tập hợp. Có thể nói tập hợp là một cấu trúc rời rạc cơ bản từ đó lập nên các cấu trúc khác. Tổ hợp như là một lĩnh vực của toán học rời rạc. Hiện nay, lý thuyết tổ hợp được áp dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau: tin học, lý thuyết số, xác suất thống kê, quy hoạch thực nghiệm,... Tổ hợp liên quan đến nhiều vấn đề khác nhau của toán học, do đó khó có thể định nghĩa nó một cách hình thức. Nói chung, lý thuyết tổ hợp gắn liền với việc nghiên cứu phân bố các phần tử vào các tập hợp. Thông thường, các phần tử này là hữu hạn và việc phân bố chúng phải thỏa mãn những điều kiện nhất định nào đó. Mỗi cách phân bố như thế được gọi là một cấu hình tổ hợp.

Vài nét về lịch sử

Có thể nói tư duy về tổ hợp ra đời từ rất sớm. Thời nhà Chu, người ta đã biết đến các hình vẽ có liên quan đến các hình vuông thần bí. Thời cổ Hy Lạp có nhà triết học đã biết cách tính số các từ khác nhau lập từ một bảng chữ cái cho trước. Nhà toán học Pitago đã tìm ra được nhiều con số có các tính chất đặc biệt, chẳng hạn số 36 không những là tổng của 4 số chẵn và 4 số lẻ đầu tiên mà còn là tổng lập phương của 3 số tự nhiên đầu tiên. Một định lý nổi tiếng của trường phái này là định lý về độ dài các cạnh của một tam giác vuông, và từ đó đã tìm ra các số mà bình phương của một số này bằng tổng bình phương của hai số khác. Việc tìm ra được các số như vậy, đòi hỏi phải có

một nghệ thuật tổ hợp nhất định. Tuy nhiên, có thể nói rằng, lý thuyết tổ hợp được hình thành như một ngành toán học mới là vào khoảng thế kỷ 17 bằng một loạt các công trình nghiên cứu nghiêm túc của các nhà toán học như Pascal, Fermat, Euler,

Trong thời gian hiện nay, mối tương quan giữa toán học hữu hạn và toán học cổ điển đã có nhiều thay đổi, đặc biệt khi máy tính điện tử ra đời và phát triển. Nhiều bài toán nổi tiếng đã được giải trên máy tính bằng những thuật toán của toán học hữu hạn. Các lĩnh vực trừu tượng của toán học như đại số logic, ngôn ngữ hình thức, ... đã trở thành khoa học ứng dụng để xây dựng các ngôn ngữ lập trình cho máy tính. Trong thời đại phát triển của toán học hữu hạn, vai trò của lý thuyết tổ hợp cũng khác xưa. Từ lĩnh vực nghiên cứu các trò chơi tiêu khiển hay phân tích giải mã các bức thư cổ, tổ hợp đã chuyển sang lĩnh vực toán ứng dụng với sự phát triển mạnh mẽ.

Các bài toán tổng quát

Trong các tài liệu về tổ hợp, thường gặp các dạng bài toán dưới đây:

* *Bài toán đếm*: Đây là các bài toán nhằm trả lời câu hỏi “ Có bao nhiêu cấu hình thoả mãn điều kiện đã nêu? “. Phương pháp đếm thường dựa vào một số nguyên lý cơ bản và một số kết quả đếm các cấu hình đơn giản. Bài toán đếm được áp dụng một cách có hiệu quả vào những công việc mang tính chất đánh giá như tính xác suất của một sự kiện, tính độ phức tạp của một thuật toán,...

* *Bài toán liệt kê*: Bài toán này quan tâm đến tất cả cấu hình có thể có được, vì thế lời giải của nó cần được biểu diễn dưới dạng thuật toán “*vét cạn*” tất cả các cấu hình. Lời giải trong từng trường hợp cụ thể sẽ được máy tính điện tử giải quyết theo thuật toán đã nêu. Bài toán liệt kê được làm “*nền*” cho nhiều bài toán khác như: bài toán đếm, bài toán tối ưu,...

* *Bài toán tồn tại*: Nếu như trong các bài toán trên, việc tồn tại các cấu hình là hiển nhiên thì trong bài toán này, vấn đề “*có hay không có*” cấu hình còn là điều nghi vấn. Lịch sử toán học thường để lại những bài toán khó trong

lĩnh vực này và việc cố gắng giải quyết chúng đã thúc đẩy không ít sự phát triển của nhiều ngành toán học.

* *Bài toán tối ưu*: Khác với bài toán liệt kê, bài toán tối ưu chỉ quan tâm đến cấu hình “*tốt nhất*” theo một nghĩa nào đấy. Đây là bài toán có nhiều ứng dụng trong thực tiễn và lý thuyết tổ hợp đã góp một phần đáng kể trong việc xây dựng được những thuật toán hữu hiệu.

1.2. Sơ lược về lý thuyết tập hợp

1.2.1. Một số khái niệm và ký hiệu

* Người ta thường dùng các chữ cái hoa để ký hiệu các tập hợp. Chẳng hạn các chữ N , Z và R sẽ được dùng để ký hiệu tập các số tự nhiên, tập các số nguyên và tập các số thực.

* Các đối tượng trong một tập hợp được gọi là các phần tử của tập hợp đó. Các phần tử được ký hiệu bằng các chữ cái nhỏ $a, b, \dots, x, y, \dots$. Để chỉ x là phần tử của X ta viết $x \in X$, trái lại ta viết $x \notin X$.

* Có nhiều cách mô tả một tập hợp. Một trong số những cách đó là liệt kê hết các phần tử của một tập hợp, khi có thể. Chúng ta sẽ dùng ký hiệu trong đó tất cả các phần tử của một tập hợp được liệt kê ở giữa hai dấu móc. Chẳng hạn ký hiệu $\{a, b, c, d\}$ biểu diễn một tập hợp có bốn phần tử là a, b, c, d . (Trong tài liệu để cho gọn có chỗ ta sẽ dùng tập thay cho tập hợp).

Ví dụ 1.1. $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Ví dụ 1.2. Tập O của các số nguyên, dương, lẻ nhỏ hơn 10 có thể được biểu diễn bởi :

$$O = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

Một cách khác để mô tả tập hợp là *chỉ rõ các tính chất đặc trưng* của các phần tử của tập hợp đó.

Ví dụ 1.3. Tập hợp tất cả các số thực được viết như sau:

$$R = \{x \mid x \text{ là số thực}\}$$

* A và B là hai tập hợp, nếu mỗi phần tử của A cũng là phần tử của B thì ta nói A là tập con của B và ký hiệu là $A \subseteq B$. A và B được gọi là hai tập hợp bằng và ký hiệu là $A=B$ nếu A là tập con của B và B là tập con của A.

Ví dụ 1.4. $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$

$$B = \{ 2, 4, 6, \}$$

$$\text{Thì } B \subseteq A$$

* Tập rỗng là tập hợp không có phần tử nào, nó được ký hiệu là $\emptyset$. Tập rỗng được coi là tập con của mọi tập hợp.

* Tập hợp vũ trụ **X** là tập hợp chứa tất cả các đối tượng đang xét. Số các phần tử của một tập hợp A được ký hiệu là $N(A)$ hoặc $|A|$.

Ví dụ 1.5. với các tập hợp trong ví dụ 1.4 ta có

$$N(A) = 7$$

$$N(B) = 3$$

1.2.2. Một số phép toán trên tập hợp

* Cho hai tập hợp A và B. Hợp của hai tập A và B được ký hiệu là $A \cup B$ là tập gồm tất cả các phần tử hoặc thuộc A, hoặc thuộc B hoặc thuộc cả hai.

Ví dụ 1.6. $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$

$$B = \{ 2, 4, 6, 8, 10, 12 \}$$

$$A \cup B = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12 \}$$

Tổng quát: Hợp của n tập hợp là một tập hợp chứa tất cả các phần tử thuộc ít nhất một trong n tập hợp đó.

$$\text{Ta dùng ký hiệu: } A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$$

để chỉ hợp của các tập hợp $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Ví dụ 1.7. Cho $A = \{ 1, 2, 3, 4, 6, 8 \}$, $B = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$ và $C = \{ 2, 3, 6, 9 \}$

Hãy xác định $A \cup B \cup C$.

Tập hợp $A \cup B \cup C$ chứa tất cả các phần tử thuộc ít nhất một trong ba tập hợp A, B, C. Từ đó: $A \cup B \cup C = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9 \}$

* Cho A và B là hai tập hợp. Giao của hai tập A và B được ký hiệu là

$A \cap B$, là tập chứa tất cả các phần tử đồng thời thuộc cả A và B.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

Ví dụ 1.8. Cho A, B là hai tập trong ví dụ 1, khi đó $A \cap B = \{2, 4, 6\}$

Tổng quát: Giao của n tập hợp là một tập hợp chứa các phần tử thuộc tất cả n tập hợp đó.

Ta dùng ký hiệu:

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i$$

để chỉ giao của các tập hợp $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Ví dụ 1.9. Cho A, B, C là các tập hợp trong ví dụ 3, hãy xác định $A \cap B \cap C$

Tập hợp $A \cap B \cap C$ chứa tất cả các phần tử thuộc cả ba tập hợp A, B, C. Từ đó: $A \cap B \cap C = \{2, 3\}$

* Phần bù của A trong X, ký hiệu $\bar{A}$, là tập các phần tử của X không thuộc A.

Ví dụ 1.10. $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$$B = \{2, 4, 6\}$$

$$\text{Khi đó } \bar{A} = \{1, 3, 5, 7\}$$

* Cho A và B là hai tập hợp, tích Đề các của A và B, được ký hiệu là $A \times B$, là tập hợp gồm tất cả các cặp (a, b) với $a \in A$ và $b \in B$

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ và } b \in B\}$$

Ví dụ 1.11. $A = \{a, b, c\}$

$$B = \{2, 4\}$$

$$\text{Khi đó } A \times B = \{(a, 2), (a, 4), (b, 2), (b, 4), (c, 2), (c, 4)\}$$

Tích Đề các được mở rộng tự nhiên cho nhiều tập hợp:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i, i=1, 2, \dots, n\}$$

Ta cũng dùng ký hiệu lũy thừa để biểu diễn tích Đề các của cùng một tập hợp: $A^n = A \times A \times \dots \times A$ (n lần)

1.2.3. Các tính chất cho trên tập hợp

Các tập hợp cùng với các phép toán hợp, giao, phần bù lập nên một đại số gọi là đại số tập hợp.

Mỗi tập con của một tập hợp sẽ tương ứng với một tính chất (còn gọi là mệnh đề) xác định nó trên tập đã cho. Với tương ứng đó, các phép toán tập hợp sẽ tương ứng với các phép toán mệnh đề:

Phép phủ định A, ký hiệu $\bar{A}$ (NOT A) tương ứng với phép lấp phần bù.

Tuyển của A và B, ký hiệu $A \vee B$ (A or B) tương ứng với phép hợp của A và B

Hội của A và B, ký hiệu $A \& B$ (A and B) tương ứng với phép giao của A và B

Các mệnh đề cùng với các phép toán trên nó, lập nên một đại số gọi là đại số mệnh đề. Như vậy, đại số mệnh đề và đại số tập hợp là hai đại số đẳng cấu với nhau. Tùy tình huống, một bài toán có thể phát biểu bằng ngôn ngữ của đại số tập hợp hoặc bằng ngôn ngữ của đại số mệnh đề.

1.2.4. Quan hệ tương đương và phân hoạch

Trong nhiều vấn đề, người ta cần quan tâm đến một quan hệ nào đó giữa hai phần tử của tập hợp đang xét. Có nhiều kiểu quan hệ, nhưng hay gặp hơn cả là quan hệ tương đương. Một quan hệ được gọi là tương đương nếu nó thỏa mãn các tính chất sau:

- * Phản xạ: mọi phần tử có quan hệ với chính nó
- * Đối xứng: a có quan hệ với b thì b có quan hệ với a
- * bắc cầu: a có quan hệ với b, b có quan hệ với c thì a có quan hệ với c

Một quan hệ tương đương xác định trên một tập hợp sẽ chia tập hợp đó thành các lớp, gọi là các lớp tương đương sao cho hai phần tử thuộc cùng một lớp thì có quan hệ với nhau, hai phần tử thuộc hai lớp khác nhau thì không có quan hệ với nhau.

Các lớp tương đương có tính chất phủ kín tập đã cho (tức là hợp của các

lớp tương đương bằng tập đã cho) và rời nhau (tức là giao của hai lớp bất kỳ bằng rỗng). Ta gọi một họ các tập con khác rỗng của một tập hợp có tính chất nêu trên là một phân hoạch của tập hợp đó. Như vậy một quan hệ tương đương trên một tập hợp sẽ xác định một phân hoạch trên tập đó, và ngược lại một phân hoạch trên tập hợp đã cho sẽ tương ứng với một quan hệ tương đương trên tập hợp đó.

Ví dụ 1.12. $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Trên X ta xác định một quan hệ R như sau :

Với a thuộc X , b thuộc X , a và b được gọi là có quan hệ R với nhau nếu chúng có cùng số dư khi chia cho 3.

$$a R b \leftrightarrow a \bmod 3 = b \bmod 3$$

Dễ thấy rằng quan hệ R là một quan hệ tương đương trên X (bạn đọc tự kiểm chứng lại điều này), và khi đó quan hệ R sẽ chia tập X thành các lớp tương đương như sau :

$$L1 = \{ 3, 6, 9 \}$$

$$L2 = \{1, 4, 7, 10\}$$

$$L3 = \{ 2, 5, 8 \}$$

1.2.5. Biểu diễn các tập hợp trên máy tính

Có nhiều cách biểu diễn tập hợp trên máy tính. Một phương pháp là lưu trữ các phần tử của tập hợp theo cách không sắp thứ tự. Tuy nhiên, nếu điều đó đã làm được, thì việc tìm giao, hợp hoặc hiệu của tập hợp sẽ rất mất thời gian, vì mỗi phép tính đó đòi hỏi một lượng thời gian tìm kiếm rất lớn đối với các phần tử. Vì vậy chúng ta sẽ sử dụng phương pháp lưu trữ các phần tử bằng cách dùng sự sắp tùy ý các phần tử của tập vũ trụ. Phương pháp biểu diễn tập hợp này làm cho việc tính những tổ hợp của các tập hợp trở nên dễ dàng hơn.

Giả sử rằng tập vũ trụ X là hữu hạn (và có kích thước hợp lý để số phần tử của X không lớn hơn dung lượng bộ nhớ của máy tính mà ta đang dùng). Trước hết, hãy chỉ rõ sự sắp tùy ý các phần tử của X , ví dụ $a_1, a_2, \dots, a_n$ sau đó biểu diễn tập con A của X bằng một xâu nhị phân có chiều dài n , trong đó bit

thứ i có giá trị bằng 1 nếu a_i thuộc A và là 0 nếu a_i không thuộc A .

Ví dụ 1.13. Cho $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ và sự sắp xếp các phần tử trong X theo thứ tự tăng dần; tức là $a_i = i$. Xác định các xâu nhị phân biểu diễn tập con các số nguyên lẻ trong X , tập con các số nguyên chẵn trong X và tập con các số nguyên chia hết cho 3 trong X .

Giải: Xâu nhị phân biểu diễn tập các số chẵn trong X là : 0101010101

Xâu nhị phân biểu diễn tập các số lẻ trong X là: 1010101010

Xâu nhị phân biểu diễn tập các số nguyên chia hết cho 3 trong X là:
0010010010

1.3. Một số nguyên lý cơ bản

1.3.1. Nguyên lý cộng

Giả sử có hai công việc. Việc thứ nhất có thể làm bằng n_1 cách, việc thứ hai có thể làm bằng n_2 cách và nếu hai việc này không thể làm đồng thời, khi đó sẽ có $n_1 + n_2$ cách làm một trong hai việc đó.

Ví dụ 1.14. Giả sử cần chọn hoặc là một cán bộ của khoa Tin hoặc là một sinh viên Tin làm đại biểu trong hội đồng của một trường đại học. Hỏi có bao nhiêu cách chọn vị đại biểu này nếu khoa Tin có 50 cán bộ và 800 sinh viên?.

Giải : Ta gọi việc thứ nhất là việc chọn một cán bộ của khoa Tin. Nó có thể làm bằng 50 cách. Việc thứ hai, chọn một sinh viên Tin, có thể làm bằng 800 cách. Theo nguyên lý cộng ta có $50 + 800 = 850$ cách chọn vị đại diện này.

Ví dụ.1.15. Một sinh viên có thể chọn bài thực hành máy tính từ một trong ba danh sách tương ứng có 23, 15 và 19 bài. Có bao nhiêu cách chọn bài thực hành.

Giải : Có 23 cách chọn bài thực hành từ danh sách thứ nhất, 15 cách chọn từ danh sách thứ hai và 19 cách chọn từ danh sách thứ ba. Vì vậy, có :

$$23 + 15 + 19 = 57 \text{ cách chọn bài thực hành.}$$

Ví dụ 1.16. Giá trị của biến k bằng bao nhiêu sau khi đoạn chương trình sau được thực hiện?

$$k = 0$$

for $i_1 := 1$ to n_1 do $k := k + 1$;

for $i_2 := 1$ to n_2 do $k := k + 1$;

.....

.....

for $i_m := 1$ to n_m do $k := k + 1$;

Giải : Giá trị khởi tạo của k bằng không. Khối lệnh này gồm m vòng lặp khác nhau. Sau mỗi bước lặp của từng vòng lặp giá trị của k được tăng lên một đơn vị. Sau vòng lặp thứ nhất $k = n_1$. Do các vòng lặp không thực hiện đồng thời nên sau vòng lặp thứ hai $k = n_1 + n_2$ và tương tự như vậy sau khi đoạn chương trình được thực hiện xong $k = n_1 + n_2 + \dots + n_m$.

Nguyên lý cộng có thể được phát biểu dưới dạng của ngôn ngữ tập hợp như sau:

Nếu $A_1, A_2, \dots, A_n$ là các tập rời nhau thì

$$N(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = N(A_1) + N(A_2) + \dots + N(A_n)$$

1.3.2. Nguyên lý nhân

Giả sử một nhiệm vụ nào đó được tách ra làm hai việc. Việc thứ nhất có thể làm bằng n_1 cách, việc thứ hai có thể làm bằng n_2 cách sau khi việc thứ nhất được làm, khi đó sẽ có $n_1 \cdot n_2$ cách thực hiện nhiệm vụ này.

Ví dụ 1.17. Người ta có thể ghi nhãn cho những chiếc ghế trong một giảng đường bằng một chữ cái và một số nguyên dương không vượt quá 100. Bằng cách như vậy, nhiều nhất có bao nhiêu chiếc ghế có thể được ghi nhãn khác nhau.

Giải: Thủ tục ghi nhãn cho một chiếc ghế gồm hai việc, gán một trong 26 chữ cái và sau đó gán một trong 100 số nguyên dương. Quy tắc nhân chỉ ra rằng có $26 \cdot 100 = 2600$ cách khác nhau để gán nhãn cho một chiếc ghế. Vậy nhiều nhất có 2600 chiếc ghế có thể được ghi nhãn.

Ví dụ 1.18. Từ Hà Nội đến Huế có 3 cách đi: máy bay, ô tô, tàu hỏa. Từ Huế đến Sài Gòn có 4 cách đi: máy bay, ô tô, tàu hỏa, tàu thủy. Hỏi từ Hà Nội đến Sài Gòn (qua Huế) có bao nhiêu cách đi?

Giải : Mỗi cách đi từ Hà Nội đến Sài Gòn (qua Huế) được xem gồm 2 chặng: Hà Nội – Huế và Huế – Sài Gòn. Từ đó theo nguyên lý nhân, số cách đi từ Hà Nội đến Sài Gòn là $3 \cdot 4 = 12$ cách.

Ví dụ 1.19. Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài 7?

Giải : Mỗi một trong 7 bit của xâu nhị phân có thể chọn bằng hai cách vì mỗi bit hoặc bằng 0 hoặc bằng 1. Vì vậy, theo nguyên lý nhân cho thấy có tổng cộng $2^7 = 128$ xâu nhị phân khác nhau có độ dài bằng 7.

Nhận xét: Có 2^n xâu nhị phân khác nhau có độ dài n.

Ví dụ 1.20. Giá trị của biến k bằng bao nhiêu sau khi chương trình sau được thực hiện?

```

k = 0
for i1:= 1 to n1 do
  for i2:= 1 to n2 do
    .....
    .....
  for im:= 1 to nm do
    k := k + 1;

```

Giải : Đầu tiên giá trị của k được khởi tạo bằng 0. Có m vòng lặp lồng nhau. Sau mỗi lần lặp của vòng lặp for k tăng lên 1. Vòng lặp thứ nhất lặp n₁ lần, vòng lặp thứ 2 lặp n₂ lần, vòng lặp thứ m lặp n_m lần. Theo nguyên lý nhân, sau khi kết thúc đoạn chương trình trên $k = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_m$.

Nguyên lý nhân có thể được phát biểu dưới dạng của ngôn ngữ tập hợp như sau:

Nếu mỗi thành phần a_i của bộ có thứ tự k thành phần (a₁, a₂, ..., a_k) có n_i khả năng lựa chọn (i= 1, 2, ..., k), thì số bộ sẽ được tạo ra là tích số của các khả năng này n₁. n₂. n_k

Một hệ quả trực tiếp của nguyên lý nhân:

$$N(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k) = N(A_1) \times N(A_2) \times N(A_3) \times \dots \times N(A_k)$$

Với A₁ , A₂ , ... , A_k là những tập hợp nào đó, nói riêng $N(A^k) = N(A)^k$

1.4. Các cấu hình tổ hợp đơn giản

1.4.1. Chinh hợp lặp

Định nghĩa 1.1. Một chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử là một bộ có thứ tự gồm k thành phần lấy từ n phần tử đã cho. Các thành phần có thể được lặp lại.

Như vậy, một chỉnh hợp lặp chập k của n có thể xem như một phần tử của tập tích Đề các A^k với A là tập đã cho. Do đó theo nguyên lý nhân, số chỉnh hợp lặp chập k của n sẽ là n^k .

Ví dụ 1.2. Có thể thành lập được bao nhiêu số gồm 4 chữ số từ 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Giải: Mỗi một số gồm 4 chữ số lấy từ 6 chữ số đã cho sẽ là một chỉnh hợp lặp chập 4 của 6. Do đó số các số có thể thành lập được sẽ là 6^4

Ví dụ 1.22. Cho tập $X = \{ a, b, c \}$. Hỏi có thể đặt được bao nhiêu tên biến có 4 ký tự lấy từ tập X .

Giải: Mỗi tên biến có 4 ký tự lấy từ tập X là một chỉnh hợp lặp chập 4 của 3. Do đó số biến có thể đặt tên sẽ là $3^4 = 81$

Ví dụ 1.23. Tính số dãy nhị phân độ dài n

Giải: Mỗi dãy nhị phân độ dài n là một bộ gồm n thành phần, trong đó mỗi thành phần chỉ nhận một trong hai giá trị 0 hoặc 1. Do đó mỗi dãy nhị phân độ dài n sẽ là một chỉnh hợp lặp chập n của 2, vì vậy số dãy nhị phân độ dài n sẽ là 2^n

1.4.2. Chinh hợp không lặp

Định nghĩa 1.2. Một chỉnh hợp không lặp chập k của n phần tử là một bộ có thứ tự gồm k thành phần lấy từ n phần tử đã cho. Các thành phần không được lặp lại

Định lý 1.1. Số chỉnh hợp không lặp chập k của n là: $n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$

Chứng minh: Thành phần đầu tiên của chỉnh hợp có thể chọn bằng n cách, thành phần thứ hai của chỉnh hợp được chọn từ $n-1$ phần tử còn lại (vì các thành phần không được lặp lại). Tương tự có $(n-2)$ cách chọn thành phần thứ

ba ... có $(n-k+1)$ cách để chọn thành phần thứ k . Theo nguyên lý nhân ta sẽ có $n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$ chỉnh hợp không lặp chập k của n .

Ví dụ 1.24. Có bao nhiêu cách chọn bốn cầu thủ khác nhau trong mười cầu thủ của đội bóng quần vợt để chơi bốn trận đấu đơn, các trận đấu là có thứ tự.

Giải : Mỗi cách chọn có thứ tự bốn cầu thủ khác nhau trong mười cầu thủ là một chỉnh hợp không lặp chập 4 của 10. Theo định lý 1.1, ta có

$$10.9.8.7 = 5040 \text{ cách chọn.}$$

Ví dụ 1.25. Có bao nhiêu số gồm 4 chữ số khác nhau có thể thành lập được từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6

Giải : Mỗi số gồm 4 chữ số thỏa mãn điều kiện đã cho là một chỉnh hợp không lặp 4 của 6, do đó theo định lý ta có số các số gồm 4 chữ số khác nhau có thể thành lập được từ 6 chữ số đã cho là:

$$6.5.4.3 = 360$$

1.4.3. Hoán vị

Định nghĩa 1.3 : Ta gọi một hoán vị của n phần tử là một cách xếp có thứ tự các phần tử đó.

Ví dụ 1.26. Cho tập $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Khi đó a, b, d, c, e, f là một hoán vị của A .

Định lý 1.2. Số hoán vị của n phần tử là $n!$.

Chứng minh : Số hoán vị của n phần tử chính là số chỉnh hợp không lặp chập n của n phần tử và bằng $n(n-1)(n-2)\dots 1 = n!$

Ví dụ 1.27. Có 5 người xếp thành một hàng ngang để chụp ảnh. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 5 người đó để chụp ảnh.

Giải : Mỗi cách xếp là một hoán vị của 5 người. Theo định lý 1.2 sẽ có

$$5! = 120 \text{ cách xếp khác nhau.}$$

Ví dụ 1.28. Một người bán hàng rong định đi bán hàng tại tám địa điểm trong thành phố. Người đó bắt đầu cuộc hành trình của mình từ một địa điểm nào đó và có thể đến 7 địa điểm kia theo bất kỳ thứ tự nào mà người đó muốn. Hỏi người đó có thể đi qua tám địa điểm này theo bao nhiêu lộ trình khác nhau.

Giải: Vì địa điểm đầu tiên đã được xác định, còn 7 địa điểm còn lại có thể đi theo thứ tự tùy ý, nên số lộ trình khác nhau chính là số hoán vị của tập gồm 7 phần tử. Do đó có $7! = 5040$ cách để người bán hàng chọn hành trình của mình.

1.4.4. Tổ hợp

Định nghĩa 1.4 : Một tổ hợp chập k của n phần tử là một bộ không kể thứ tự gồm k thành phần khác nhau lấy từ n phần tử đã cho.

Như vậy, ta có thể coi một tổ hợp chập k của n phần tử là một tập con gồm k phần tử của nó.

Ví dụ 1.29. Cho tập $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ thì các bộ $(1, 3, 4), (2, 4, 5)$ là các tổ hợp chập 3 của A . Còn các bộ $(1, 3, 1), (2, 2, 5)$ không phải là các tổ hợp chập 3 của A . Theo định nghĩa hai bộ $(1, 3, 4), (4, 1, 3)$ chỉ được tính là một tổ hợp chập 3 của A .

Ta nhận thấy rằng với mỗi tổ hợp chập k từ n phần tử, sau khi hoán vị ta sẽ được $k!$ chỉnh hợp không lặp chập k của n phần tử đó, tức là số chỉnh hợp không lặp chập k của n phần tử sẽ bằng $k!$ lần số tổ hợp chập k của n phần tử. Do vậy, nếu ta ký hiệu C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử thì ta có:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Từ công thức trên có thể thấy (bạn đọc tự chứng minh):

$$* \quad C_n^k = C_n^{n-k}$$

$$* \quad C_n^0 = C_n^n = 1$$

$$* \quad C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

Ví dụ 1.30. Một tổ học sinh có 12 em. Có bao nhiêu cách thành lập một nhóm gồm 5 em học sinh của tổ đó.

Giải: Mỗi nhóm gồm 5 học sinh của tổ gồm 10 học sinh sẽ là một tổ hợp chập 5 của 10. Do đó số nhóm thành lập được sẽ là:

$$C_{10}^5 = \frac{10!}{5!(10-5)!} = 252$$

Ví dụ 1.31. Có n đội bóng thi đấu vòng tròn một lượt. Hỏi phải tổ chức bao nhiêu trận đấu?

Giải: Cứ 2 đội thì có một trận. Từ đó suy ra số trận đấu là tổ hợp chập 2 của n , nghĩa là bằng:

$$C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Ví dụ 1.32. Một lớp học có 60 học sinh trong đó có 40 nam và 20 nữ. Lớp cần thành lập đội xung kích gồm 10 nam và 10 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách thành lập đội xung kích của lớp mà trong đó không đồng thời có em nam A và em nữ B?

Giải:

Cách 1: Tất cả các cách thành lập đội xung kích của lớp là: $C_{40}^{10} \cdot C_{20}^{10}$

Các cách thành lập đội xung kích của lớp mà đồng thời có A và B là $C_{39}^9 \cdot C_{19}^9$

Do đó số cách thành lập đội xung kích theo điều kiện đầu bài là:

$$C_{40}^{10} \cdot C_{20}^{10} - C_{39}^9 \cdot C_{19}^9$$

Cách 2: Các cách thành lập đội xung kích không đồng thời có A và B được chia thành:

- Các cách thành lập đội xung kích có A và không có B. Số cách thành lập như vậy là $C_{39}^9 \cdot C_{19}^{10}$

- Các cách thành lập đội xung kích có B và không có A. Số cách thành lập như vậy là $C_{39}^{10} \cdot C_{19}^9$

- Các cách thành lập đội xung kích không có B và không có A. Số cách thành lập như vậy là $C_{39}^{10} \cdot C_{19}^{10}$

Do vậy số cách thành lập đội xung kích của lớp thỏa mãn điều kiện là:

$$C_{39}^9 \cdot C_{19}^{10} + C_{39}^{10} \cdot C_{19}^9 + C_{39}^{10} \cdot C_{19}^{10}$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 1

1. Liệt kê các phần tử của các tập hợp sau:

a) $\{x \mid x \text{ là số thực sao cho } x^2 = 1\}$

b) $\{x \mid x \text{ là số nguyên dương nhỏ hơn } 12\}$

2. Cho các tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 5\}$, $C = \{2, 4, 5, 6\}$ và $D = \{2, 4\}$ hãy xác định các tập hợp nào là những tập hợp con của tập hợp nào?

3. Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ và $B = \{a, b, c\}$. Tìm

a) $A \times B$

b) $B \times A$

4. Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ và $B = \{2, 3, 6, 8\}$. Tìm

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

5. Có bao nhiêu người có họ tên viết tắt bằng 3 chữ cái?

6. Có bao nhiêu người có họ tên viết tắt bằng 3 chữ cái, trong đó không có chữ cái nào được lặp lại?

7. Có bao nhiêu người có họ tên viết tắt bằng 3 chữ cái, trong đó chữ cái đầu tiên là chữ A?

8. Một tổ học sinh có 12 em, trong đó có 7 em nam và 5 em nữ. Hỏi có bao nhiêu cách lấy 6 em của tổ gồm 4 em nam và 2 em nữ đi lao động cho nhà trường.

9. Một tổ học sinh có 12 em, trong đó có 7 em nam và 5 em nữ. Hỏi có bao nhiêu cách lấy 6 em của tổ trong đó có ít nhất 4 em là nam đi lao động cho nhà trường.

10. Cho tập X gồm n phần tử. Chứng minh rằng số tập con của X bằng 2^n .

11. Cho tập X gồm n phần tử. Chứng minh rằng số tập con gồm một số chẵn phần tử của X bằng số tập con gồm một số lẻ phần tử của X .

Chương 2

BÀI TOÁN ĐẾM

2.1. Giới thiệu bài toán

Một trong những vấn đề đầu tiên của việc nghiên cứu tổ hợp là đếm xem có bao nhiêu cấu hình tổ hợp có thể được tạo ra với những quy tắc đã nêu?. Những bài toán như vậy gọi là bài toán đếm. Chúng ta cần phải đếm các đối tượng để giải quyết nhiều bài toán khác nhau. Thông thường, lời giải của bài toán đếm phụ thuộc vào một số giá trị tham số ban đầu và người ta cố gắng biểu diễn sự phụ thuộc này bằng những công thức toán học. Để đếm các cấu hình theo yêu cầu, người ta thường tìm cách đưa về các cấu hình quen thuộc bằng cách thiết lập một tương ứng 1-1 giữa chúng. Nhiều khi, một bài toán đếm được phân thành những bài toán đếm nhỏ hơn bằng cách chia việc đếm thành từng lớp để áp dụng nguyên lý cộng hoặc phân tích cấu hình cần đếm như là việc ghép một số cấu hình khác để áp dụng nguyên lý nhân.

Dưới đây là một số ví dụ đơn giản nhằm minh họa một số kỹ thuật đếm.

Ví dụ 2.1. Có bao nhiêu cách xếp 5 người thành một hàng ngang sao cho A không đứng cạnh B.

Giải: Các cách xếp 5 người thành một hàng ngang gồm 2 loại: một loại gồm những cách xếp A đứng cạnh B, một loại gồm những cách xếp A không đứng cạnh B. Do đó, để đếm số cách xếp A không đứng cạnh B, ta đi đếm số cách xếp A đứng cạnh B. Xem A và B như một chổ, ta có $4! = 24$ cách xếp. Nhưng A có thể đứng bên trái hoặc bên phải B. Do đó số cách xếp A đứng cạnh B là $24 \cdot 2 = 48$ cách. Số cách xếp 5 người thành một hàng ngang là $5! = 120$. Nên số cách xếp A không đứng cạnh B sẽ là:

$$120 - 48 = 72$$

Ví dụ 2.2. Ngôn ngữ Pascal chuẩn qui định đặt tên biến không quá 8 ký tự. Các ký tự trong tên biến chỉ được phép là các chữ cái (từ a đến z, không phân biệt chữ hoa, chữ thường) hoặc các chữ số (từ 0 đến 9) và phải bắt đầu bằng chữ cái. Hỏi có thể đặt tên được cho bao nhiêu biến khác nhau.

Giải: Ta phân các biến thành các lớp:

- Lớp gồm những biến có tên 1 ký tự.

- Lớp gồm những biến có tên 2 ký tự.

.....

- Lớp gồm những biến có tên 8 ký tự.

Số các biến thuộc lớp có tên k ký tự, theo nguyên lý nhân bằng $26 \times 36^{k-1}$

Do đó, theo nguyên lý cộng ta có số các biến khác nhau là:

$$26 + 26.36 + 26.36^2 + \dots + 26.36^7 = 2\,095\,681\,645\,538$$

Ví dụ 2.3. Một đợt phát hành sổ số với các vé số gồm hai phần: phần đầu gồm 2 chữ cái lấy từ A đến Z (26 chữ cái) và phần sau gồm 4 chữ số lấy từ 0 đến 9 (10 chữ số). Hỏi phát hành được nhiều nhất bao nhiêu vé số?

Giải: Mỗi vé số gồm hai phần: phần chữ và phần số. Phần chữ có 26^2 khả năng, phần số có 10^4 khả năng. Do vậy, theo nguyên lý nhân, số vé nhiều nhất được phát hành sẽ là $26^2 \times 10^4 = 6\,760\,000$.

Ví dụ 2.4. Hai đội bóng chuyền, mỗi đội có 6 cầu thủ, xếp thành một hàng ngang để chụp ảnh. Hỏi có bao nhiêu cách xếp mà các cầu thủ của hai đội đứng xen kẽ nhau (không có hai cầu nào của cùng một đội đứng cạnh nhau).

Giải: Gọi hai đội bóng là đội A và đội B. Ta xếp các cầu thủ của đội A đứng ở các vị trí lẻ khi đó sẽ có $6!$ cách xếp các cầu thủ của đội A, xếp các cầu thủ của đội B đứng ở các vị trí chẵn khi đó sẽ có $6!$ cách xếp các cầu thủ của đội B. Do đó số cách xếp 12 cầu thủ của hai đội mà các cầu thủ của đội A đứng ở các vị trí lẻ, các cầu thủ của đội B đứng ở các vị trí chẵn sẽ là $6! \times 6! = (6!)^2$. Đảo vị trí chẵn lẻ của hai đội thì ta sẽ được số cách xếp 12 cầu thủ của hai đội đứng xen kẽ nhau sẽ là $2 \times (6!)^2$

2.2. Nguyên lý bù trừ

Như ta đã biết, số các phần tử trong hợp của hai tập A và B bằng tổng các phần tử của mỗi tập trừ đi số phần tử của giao hai tập, tức là:

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B) \quad (1)$$

Công thức xác định số phần tử của hợp hai tập hợp thường được dùng trong các bài toán đếm.

Công thức (1) được mở rộng cho hữu hạn tập hợp như sau:

Định lý 2.1. Giả sử $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ là các tập hữu hạn. Khi đó:

$$N(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = N_1 - N_2 + N_3 - \dots + (-1)^{n+1} N_n \quad (2)$$

Trong đó N_k là tổng các phần tử của tất cả các giao của k tập lấy từ n tập đã cho.

Chứng minh: Ta sẽ chứng minh công thức trên bằng cách chỉ ra rằng mỗi phần tử của hợp n tập hợp được đếm đúng một lần. Giả sử a là phần tử chung của k tập trong các tập $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, trong đó $1 \leq k \leq n$. Phần tử này được đếm C_k^1 lần trong tổng N_1 , được đếm C_k^2 lần trong tổng N_2 , ..., được đếm C_k^k lần trong tổng N_k . Như vậy, số lần a được đếm ở vế phải của (2) là:

$$C_k^1 - C_k^2 + C_k^3 - \dots + (-1)^{k+1} C_k^k$$

$$\text{Mà ta có: } C_k^0 - C_k^1 + C_k^2 - \dots + (-1)^k C_k^k = 0$$

$$\text{Nên: } 1 = C_k^0 = C_k^1 - C_k^2 + C_k^3 - \dots + (-1)^{k+1} C_k^k$$

Điều đó có nghĩa là mỗi phần tử của hợp $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ được đếm đúng một lần ở vế phải của (2).

Nguyên lý bù trừ có thể được ứng dụng và phát biểu dưới dạng sau:

Cho tập hữu hạn X . A_k là tập con của tập X thỏa mãn tính chất A_k nào đó cho trên tập X . Khi đó, số phần tử của X không thỏa mãn bất cứ một tính chất A_k nào sẽ là:

$$N(X) - N(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = N - N_1 + N_2 - N_3 + \dots + (-1)^n N_n$$

Trong đó, N_k là số phần tử thỏa mãn k tính chất lấy từ n tính chất đã cho.

Ví dụ 2.5. Trong kỳ thi học sinh giỏi cấp thành phố, một trường PTCS có 20 học sinh đạt giải môn toán, 11 học sinh đạt giải môn văn, trong số đó có 7 em đạt giải cả hai môn văn và toán. Hỏi trường có bao nhiêu học sinh đạt giải học sinh giỏi.

Giải: Gọi A là tập các học sinh đạt giải môn toán, Gọi B là tập các học sinh đạt giải môn văn. Khi đó số học sinh giỏi của trường là $N(A \cup B)$ và $N(A \cap B)$

là số học sinh đạt giải cả hai môn văn và toán. Vì vậy

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B) = 20 + 11 - 7 = 24$$

Ví dụ 2.6. Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài 8 bit hoặc bắt đầu bằng bit 1 hoặc kết thúc bằng hai bit 0.

Giải : Việc thứ nhất, xây dựng các xâu nhị phân độ dài 8 bit bắt đầu bằng bit 1, có 2^7 xâu vì bit đầu tiên chỉ có một cách chọn, 7 bit còn lại mỗi bit có hai cách chọn (0 hoặc 1). Tương tự như vậy, việc thứ hai xây dựng các xâu nhị phân độ dài 8 bit kết thúc bằng hai bit 0, có 2^6 xâu. Số xâu nhị phân độ dài 8 bit bắt đầu bằng bit 1 và kết thúc bằng hai bit 0 là 2^5 xâu. Theo nguyên lý bù trừ, số xâu nhị phân độ dài 8 bit hoặc bắt đầu bằng bit 1 hoặc kết thúc bằng hai bit 00 sẽ là: $2^7 + 2^6 - 2^5 = 160$.

Ví dụ 2.7. Hỏi trong tập $X = \{1, 2, \dots, 1000\}$ có bao nhiêu số không chia hết cho bất cứ số nào trong các số 3, 4, 5?

Giải : Gọi $A_i = \{x \in X \mid x \text{ chia hết cho } i; i = 3, 4, 5\}$

Số các số chia hết cho ít nhất một trong ba số trên là

$$N(A_3 \cup A_4 \cup A_5) = N_1 - N_2 + N_3$$

Ta có

$$\begin{aligned} N_1 &= N(A_3) + N(A_4) + N(A_5) = [1000/3] + [1000/4] + [1000/5] \\ &= 333 + 250 + 200 = 783 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_2 &= N(A_3 \cap A_4) + N(A_3 \cap A_5) + N(A_4 \cap A_5) = [1000/3.4] + [1000/3.5] + \\ &[1000/4.5] = 83 + 66 + 50 = 199 \end{aligned}$$

$$N_3 = N(A_3 \cap A_4 \cap A_5) = [1000/3.4.5] = 16$$

Như vậy số các số chia hết ít nhất một trong các số 3, 4, 5 của X là:

$$N(A_3 \cup A_4 \cup A_5) = 783 - 199 + 16 = 555$$

Do đó số các số không chia hết cho bất cứ số nào trong các số 3, 4, 5 của X sẽ là: $N(X) - N(A_3 \cup A_4 \cup A_5) = 1000 - 555 = 445$

Ví dụ 2.8. Mỗi người sử dụng hệ thống máy tính đều có mật khẩu dài từ sáu đến tám ký tự, trong đó mỗi ký tự là một chữ cái hay chữ số. Hỏi có bao nhiêu mật khẩu?