

BỘ NÔNG NGHIỆP VÀ PHÁT TRIỂN NÔNG THÔN
TRƯỜNG CAO ĐẲNG NGHỀ CƠ GIỚI NINH BÌNH

GIÁO TRÌNH
MÔN HỌC: TOÁN RỜI RẠC
NGÀNH/NGHỀ: LẬP TRÌNH MÁY TÍNH
TRÌNH ĐỘ: CAO ĐẲNG

*Ban hành kèm theo Quyết định số: /QĐ-TCGNB ngày.....tháng.....năm
201.... của Trường cao đẳng nghề Cơ giới Ninh Bình*

Ninh Bình, năm 2018

TUYÊN BỐ BẢN QUYỀN

Tài liệu này thuộc loại sách giáo trình nên các nguồn thông tin có thể được phép dùng nguyên bản hoặc trích dùng cho các mục đích về đào tạo và tham khảo.

Mọi mục đích khác mang tính lệch lạc hoặc sử dụng với mục đích kinh doanh thiếu lành mạnh sẽ bị nghiêm cấm.

TaiLieu.vn

LỜI GIỚI THIỆU

Toán rời rạc là một lĩnh vực của toán học nghiên cứu các đối tượng rời rạc, đặc biệt vai trò của Toán rời rạc trong lĩnh vực tin học. Khi phải đếm các đối tượng rời rạc, khi nghiên cứu quan hệ giữa các đối tượng rời rạc và đặc biệt là việc cất giữ và sử lý thông tin trên máy tính.

Cuốn sách nhằm giới thiệu các kiến thức cơ bản về: Lý thuyết tổ hợp, lý thuyết đồ thị nhằm giúp các em ngành Lập trình có tài liệu tham khảo, đồng thời cũng là tài liệu học tập cho các em.

Tài liệu này được biên soạn gồm 5 chương:

Chương 1. Trình bày các vấn đề của lý thuyết tổ hợp, soay quanh các bài toán cơ bản: Bài toán đếm, bài toán tồn tại. Nội dung chương I không những giúp nâng cao tư duy toán học mà còn làm quen với thuật toán để giải quyết các bài toán trong thực tế.

Chương 2. Trình bày các kiến thức cơ bản về lý thuyết đồ thị. Chương này cung cấp các kiến thức cơ bản về lý thuyết đồ thị, giúp người học có kiến thức cơ sở để nghiên cứu về đồ thị trong các chương tiếp theo.

Chương 3. Biểu diễn đồ thị trên máy tính và các thuật toán tìm kiếm. Sau khi người học đã tìm hiểu những kiến thức cơ bản về đồ thị thì tiến hành xây dựng cấu trúc dữ liệu để biểu diễn đồ thị trên máy tính, đồng thời xây dựng các thuật toán tìm kiếm đồ thị được tổ chức trên máy tính.

Chương 4. Trình bày các kiến thức về cây và cây khung của đồ thị, cách xây dựng chu trình của đồ thị.

Chương 5. Giúp người học xây dựng đường đi, tìm đường đi ngắn nhất trong đồ thị.

Mặc dù tác giả đã cố gắng rất nhiều nhưng tài liệu cũng không tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả rất mong nhận được ý kiến đóng góp của bạn đọc quan tâm để tài liệu ngày càng hoàn thiện hơn.

Ninh Bình, ngày.....tháng..... năm 2018

Tham gia biên soạn

1. Nguyễn Văn Thái
2. Nguyễn Xuân Khôi
3. Vũ Ánh Dương

MỤC LỤC

TRANG

Lời giới thiệu.....	3
Chương 1. Lý thuyết tổ hợp	6
1. Sơ lược về tổ hợp	6
2. Bài toán đếm và phương pháp giải.....	8
3. Bài toán tồn tại và phương pháp giải.....	17
Chương 2. Các khái niệm cơ bản của lý thuyết đồ thị.....	20
1. Định nghĩa đồ thị.....	20
2. Các thuật ngữ cơ bản.....	20
3. Đường đi, chu trình đồ thị liên thông.....	21
Chương 3. Biểu diễn đồ thị và các thuật toán tìm kiếm	25
1. Ma trận kề, ma trận trọng số	25
2. Danh sách cạnh, danh sách liên kết	26
3. Tìm kiếm theo chiều rộng và chiều sâu	27
4. Một số ứng dụng	30
5. Bài tập	33
Chương 4. Cây và cây khung của đồ thị	34
1. Cây và các tính chất của cây	34
2. Cây khung nhỏ nhất	37
3. Đồ thị Euler và đồ thị Hamilton.....	40
4. Bài tập	44
Chương 5. Đường đi ngắn nhất.....	46
1. Các khái niệm mở đầu.....	46
2. Thuật toán Dijkstra.....	47
3. Thuật toán Floy	49
4. Bài tập	50

GIÁO TRÌNH MÔN HỌC

Tên môn học: Toán rời rạc

Mã môn học: MH12

Vị trí, tính chất, ý nghĩa và vai trò của môn học/mô đun:

- Vị trí: Đây là môn học bắt buộc giúp người học có kiến thức để học các môn về lập trình và các môn có tính logic.

- Tính chất: Môn học này là môn học dựa trên nền tảng toán học và kiến thức về lập trình căn bản.

- Ý nghĩa và vai trò của môn học/mô đun:

Toán rời rạc là nền tảng của thuật toán và nhiều mô hình quan trọng trong máy tính (Logic, đại số bool, lý thuyết đồ thị, xác suất, tổ hợp...). Nó là cái nền toán học quan trọng của máy tính.

Mục tiêu của môn học:

- Về kiến thức:

Vận dụng các kiến thức đã sinh viên xây dựng các thuật toán tính : tổ hợp, hoán vị, giải hệ phương trình, phương trình, tính tích phân.

- Về kỹ năng:

+ Sử dụng các kiến thức đã sinh viên xây dựng thuật toán quay lại, các bài toán tối ưu, bài toán tồn tại;

+ Là nền tảng để sinh viên học môn cấu trúc dữ liệu và giải thuật, cài đặt các thuật toán trong tin học.

- Về năng lực tự chủ và trách nhiệm:

Có khả năng tổ chức, thực hiện các nhiệm vụ và chịu trách nhiệm đối với kết quả công việc của mình.

Nội dung môn học:

CHƯƠNG 1: LÝ THUYẾT TỔ HỢP

Mã chương: Mh12.1

Giới thiệu:

Trình bày các vấn đề của lý thuyết tổ hợp, soay quanh các bài toán cơ bản: Bài toán đếm, bài toán tồn tại.

Mục tiêu:

- Trình bày được các khái niệm của tổ hợp;
- Thực hiện được các bài toán về lý thuyết tổ hợp;
- Nghiêm túc trong học tập, đảm bảo an toàn cho người và trang thiết bị.

Nội dung chính:

1. Sơ lược về tổ hợp

Tổ hợp nh- là một lĩnh vực của toán học rời rạc, xuất hiện vào đầu thế kỷ 17. Hiện nay lý thuyết tổ hợp đ- ợc áp dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau: lý thuyết số, hình học, thống kê xác suất, ...

1.1. Chỉnh hợp lặp

Định nghĩa: Một chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử là một bộ có thứ tự gồm có k thành phần, mỗi thành phần lấy từ tập n phần tử đã cho tr- ớc và có thể trùng nhau. K/h: $A_n^k = n^k$

Ví dụ: Tính số dãy nhị phân độ dài 3

Giải: Mỗi dãy nhị phân độ dài 3 là một bộ gồm 3 thành phần (mỗi thành phần chỉ nhận một trong hai giá trị 0 hoặc 1) $\rightarrow$ Số xâu nhị phân độ dài 3 là 2^3

Suy rộng: số dãy nhị phân có độ dài n là 2^n

1.2. Chỉnh hợp không lặp

Một chỉnh hợp không lặp chập k của n phần tử là một bộ có thứ tự gồm k phần tử, mỗi phần tử lấy từ tập n phần tử cho tr- ớc và không trùng nhau

$$k/h: P_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

1.3. Tổ hợp

Định nghĩa: Một tổ hợp chập k của n phần tử ($k \leq n$) là tập hợp k phần tử chọn từ tập n phần tử cho tr- ớc. k/h : $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Chứng minh: Xét tập các chỉnh hợp không lặp chập k của n phần tử, tập này có $\frac{n!}{(n-k)!}$ phần tử và chia thành các lớp. Mà mỗi lớp gồm các bộ có thứ tự

khác nhau $\rightarrow$ số phần tử trong mỗi lớp là $k! \Rightarrow$ số lớp bằng $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ cũng chính là tổ hợp.

Tính chất: - $C_n^k = C_n^{n-k}$
 - $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

* Các số tổ hợp có quan hệ với biểu thức khai triển nhị thức Newton

$$(x+y)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y^1 + C_n^2 x^{n-2} y^2 + \dots + C_n^{n-1} x^1 y^{n-1} + C_n^n y^n = \sum_{i=0}^n C_n^i x^{n-i} y^i$$

Ví dụ: Tính hệ số khai triển của $x^3 y^7$ của $(x+y)^{10}$ là: $C_{10}^3 = C_{10}^7$

1.4. Hoán vị lặp

Ví dụ: Cho chữ ACCESS Hỏi có bao cách sắp xếp tất cả các chữ cái thành các chữ khác nhau?

Giải: Chữ ACCESS gồm có 6 chữ đ-ợc đánh thứ tự nh- sau:

A	C	C	E	S	S
1	2	3	4	5	6

- Ta thấy trong chuỗi ACCESS, có 1 chữ A $\rightarrow$ có C_6^1 cách đặt chữ A vào một trong 6 vị trí

- Ta thấy trong chuỗi ACCESS, có 2 chữ C $\rightarrow$ có C_5^2 cách đặt chữ C vào 5 vị trí còn lại

- Ta thấy trong chuỗi ACCESS, có 1 chữ E $\rightarrow$ có C_3^1 cách đặt chữ A vào 3 vị trí còn lại

- Cuối cùng còn lại 2 chữ S đặt vào 2 vị trí còn lại $\rightarrow$ có C_2^2 cách đặt chữ S vào vị trí

Nh- vậy: Có $C_6^1 \cdot C_5^2 \cdot C_3^1 \cdot C_2^2 = 180$ cách

Tổng quát:

$$\text{Cho } n \text{ phần tử trong đó có: } \begin{cases} n_1 \text{ số phần tử loại 1} \\ n_2 \text{ số phần tử loại 2} \\ n_3 \text{ số phần tử loại 3} \\ \dots \\ n_m \text{ số phần tử loại m} \end{cases} \text{ với } n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_m = n$$

$$\text{Số hoán vị lặp} = C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot \dots \cdot C_{(n-n_1-\dots-n_m)}^{n_m} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_m!}$$

1.5. Tổ hợp lặp

Tổng quát: Cần lấy ra k vật từ tập n loại (phân tử)

→ Số cách lấy = C_{n-1+k}^k

Ví dụ: Cho ph-ong trình $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ đếm số nghiệm nguyên của ph-ong trình.

Giải:

Ta có: với mỗi cách lấy nghiệm ứng với việc lấy ra x_1 phân tử loại 1;

x_2 phân tử loại 2;

x_3 phân tử loại 3;

$$\text{Số lần chọn là } 10 \rightarrow \text{Số cách lấy: } C_{10+(3-1)}^{10} = \frac{12!}{10! \cdot 2!} = 66$$

2. Bài toán đếm và ph-ong pháp giải

2.1. Nguyên lý cộng

Quy tắc cộng: Giả sử có k công việc $A_1, A_2, \dots, A_k$. Các việc này có thể làm t-ong ứng bằng $n_1, n_2, \dots, n_k$ cách và giả sử không có hai việc nào có thể làm đồng thời. Khi đó số cách làm một trong k việc đó là $n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

Ví dụ:

1. Một sinh viên có thể chọn bài thực hành máy tính từ một trong ba danh sách t-ong ứng có 23, 15 và 19 bài. Vì vậy, theo quy tắc cộng có $23 + 15 + 19 = 57$ cách chọn bài thực hành.

2. Giá trị của biến m bằng bao nhiêu sau khi đoạn ch-ong trình sau đ-ợc thực hiện?

$m := 0$

for $i_1 := 1$ to n_1

$m := m+1$

for $i_2 := 1$ to n_2

$m := m+1$

...

for $i_k := 1$ to n_k

$m := m+1$

Giá trị khởi tạo của m bằng 0. Khối lệnh này gồm k vòng lặp khác nhau. Sau mỗi b -ốc lặp của từng vòng lặp giá trị của k đ-ợc tăng lên một đơn vị. Gọi T_i là việc thi hành vòng lặp thứ i . Có thể làm T_i bằng n_i cách vì vòng lặp thứ i có n_i b -ốc lặp. Do các vòng lặp không thể thực hiện đồng thời nên theo quy tắc cộng, giá trị cuối cùng của m bằng số cách thực hiện một trong số các nhiệm vụ T_i , tức là $m = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

Quy tắc cộng có thể phát biểu d-ới dạng của ngôn ngữ tập hợp nh- sau: Nếu $A_1, A_2, \dots, A_k$ là các tập hợp đôi một rời nhau, khi đó số phần tử của hợp các tập hợp này bằng tổng số các phần tử của các tập thành phần. Giả sử T_i là việc chọn một phần tử từ tập A_i với $i = 1, 2, \dots, k$. Có $|A_i|$ cách làm T_i và không có hai việc nào có thể đ-ợc làm cùng một lúc. Số cách chọn một phần tử của hợp các tập hợp này, một mặt bằng số phần tử của nó, mặt khác theo quy tắc cộng nó bằng $|A_1| + |A_2| + \dots + |A_k|$. Do đó ta có:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_k|.$$

Tổng quát: Cho hai tập $A, B \subset X$ và $A \cap B = \Phi$ khi đó $N(A \cup B) = N(A) + N(B)$

2.2. Nguyên lý nhân

2.2.1 Nguyên lý: Giả sử một nhiệm vụ T nào đó đ-ợc tách ra thành k việc $T_1, T_2, \dots, T_k$. Nếu việc T_i có thể làm bằng n_i cách sau khi các việc $T_1, T_2, \dots, T_{i-1}$ đã đ-ợc làm, khi đó có $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ cách thi hành nhiệm vụ đã cho.

2.2.2. Ví dụ:

2.2.2.1. Ng-ời ta có thể ghi nhãn cho những chiếc ghế trong một giảng đ-ờng bằng một chữ cái và một số nguyên d-ương không v-ợt quá 100. Bằng cách nh- vậy, nhiều nhất có bao nhiêu chiếc ghế có thể đ-ợc ghi nhãn khác nhau?

Thủ tục ghi nhãn cho một chiếc ghế gồm hai việc, gán một trong 26 chữ cái và sau đó gán một trong 100 số nguyên d-ương. Quy tắc nhân chỉ ra rằng có $26 \cdot 100 = 2600$ cách khác nhau để gán nhãn cho một chiếc ghế. Nh- vậy nhiều nhất ta có thể gán nhãn cho 2600 chiếc ghế.

2.2.2.2. Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài n .

Mỗi một trong n bit của xâu nhị phân có thể chọn bằng hai cách vì mỗi bit hoặc bằng 0 hoặc bằng 1. Bởi vậy theo quy tắc nhân có tổng cộng 2^n xâu nhị phân khác nhau có độ dài bằng n .

2.2.2.3. Có thể tạo đ-ợc bao nhiêu ánh xạ từ tập A có m phần tử vào tập B có n phần tử?

Theo định nghĩa, một ánh xạ xác định trên A có giá trị trên B là một phép t-ơng ứng mỗi phần tử của A với một phần tử nào đó của B. Rõ ràng sau khi đã chọn đ-ợc ảnh của $i - 1$ phần tử đầu, để chọn ảnh của phần tử thứ i của A ta có n cách. Vì vậy theo quy tắc nhân, ta có $n.n...n = n^m$ ánh xạ xác định trên A nhận giá trị trên B.

2.2.2.4. Có bao nhiêu đơn ánh xác định trên tập A có m phần tử và nhận giá trị trên tập B có n phần tử?

Nếu $m > n$ thì với mọi ánh xạ, ít nhất có hai phần tử của A có cùng một ảnh, điều đó có nghĩa là không có đơn ánh từ A đến B. Bây giờ giả sử $m \leq n$ và gọi các phần tử của A là $a_1, a_2, \dots, a_m$. Rõ ràng có n cách chọn ảnh cho phần tử a_1 . Vì ánh xạ là đơn ánh nên ảnh của phần tử a_2 phải khác ảnh của a_1 nên chỉ có $n - 1$ cách chọn ảnh cho phần tử a_2 . Nói chung, để chọn ảnh của a_k ta có $n - k + 1$ cách. Theo quy tắc nhân, ta có

$$n(n - 1)(n - 2) \dots (n - m + 1) = \frac{n!}{(n - m)!} \text{ đơn ánh từ tập A đến tập B.}$$

2.2.2.5. Giá trị của biến k bằng bao nhiêu sau khi ch-ơng trình sau đ-ợc thực hiện?

```

m := 0
for i1 := 1 to n1
    for i2 := 1 to n2
        .....
        for ik := 1 to nk
            k := k+1

```

Giá trị khởi tạo của k bằng 0. Ta có k vòng lặp đ-ợc lồng nhau. Gọi T_i là việc thi hành vòng lặp thứ i . Khi đó số lần đi qua vòng lặp bằng số cách làm các việc $T_1, T_2, \dots, T_k$. Số cách thực hiện việc T_j là n_j ($j=1, 2, \dots, k$), vì vòng lặp thứ j đ-ợc duyệt với mỗi giá trị nguyên i_j nằm giữa 1 và n_j . Theo quy tắc nhân vòng lặp lồng nhau này đ-ợc duyệt qua $n_1.n_2....n_k$ lần. Vì vậy giá trị cuối cùng của k là $n_1.n_2....n_k$.

Tóm lại: Nguyên lý nhân th-ờng đ-ợc phát biểu bằng ngôn ngữ tập hợp nh-sau. Nếu $A_1, A_2, \dots, A_k$ là các tập hữu hạn, khi đó số phần tử của tích Descartes

của các tập này bằng tích của số các phần tử của mọi tập thành phần. Ta biết rằng việc chọn một phần tử của tích Descartes $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$ đ-ợc tiến hành bằng cách chọn lần l-ợt một phần tử của A_1 , một phần tử của A_2 , ..., một phần tử của A_k . Theo quy tắc nhân ta có:

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \dots |A_k|.$$

$$\text{Tổng quát: } N(A \cdot B) = N(A) \cdot N(B)$$

2.3. Nguyên lý bù trừ:

Khi hai công việc có thể đ-ợc làm đồng thời, ta không thể dùng quy tắc cộng để tính số cách thực hiện nhiệm vụ gồm cả hai việc. Để tính đúng số cách thực hiện nhiệm vụ này ta cộng số cách làm mỗi một trong hai việc rồi trừ đi số cách làm đồng thời cả hai việc. Ta có thể phát biểu nguyên lý đếm này bằng ngôn ngữ tập hợp. Cho A_1, A_2 là hai tập hữu hạn, khi đó

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

Từ đó với ba tập hợp hữu hạn A_1, A_2, A_3 , ta có:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - |A_3 \cap A_1| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

và bằng quy nạp, với k tập hữu hạn $A_1, A_2, \dots, A_k$ ta có:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k| = N_1 - N_2 + N_3 - \dots + (-1)^{k-1} N_k,$$

Trong đó N_m ($1 \leq m \leq k$) là tổng phần tử của tất cả các giao m tập lấy từ k tập đã cho, nghĩa là:

$$N_m = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq k} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_m}|$$

Bây giờ ta đồng nhất tập A_m ($1 \leq m \leq k$) với tính chất A_m cho trên tập vũ trụ hữu hạn U nào đó và đếm xem có bao nhiêu phần tử của U sao cho không thỏa mãn bất kỳ một tính chất A_m nào. Gọi $\bar{N}$ là số cần đếm, N là số phần tử của U . Ta có:

$$\bar{N} = N - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k| = N - N_1 + N_2 - \dots + (-1)^k N_k$$

trong đó N_m là tổng các phần tử của U thỏa mãn m tính chất lấy từ k tính chất đã cho. Công thức này đ-ợc gọi là **nguyên lý bù trừ**. Nó cho phép tính $\bar{N}$ qua các N_m trong tr-ờng hợp các số này dễ tính toán hơn.

Ví dụ: Có n lá th- và n phong bì ghi sẵn địa chỉ. Bỏ ngẫu nhiên các lá th- vào các phong bì. Hỏi xác suất để xảy ra không một lá th- nào đúng địa chỉ.

Mỗi phong bì có n cách bỏ th- vào, nên có tất cả $n!$ cách bỏ th-. Vấn đề còn lại là đếm số cách bỏ th- sao cho không lá th- nào đúng địa chỉ. Gọi U là tập hợp các cách bỏ th- và A_m là tính chất lá th- thứ m bỏ đúng địa chỉ. Khi đó theo công thức về nguyên lý bù trừ ta có:

$$\overline{N} = n! - N_1 + N_2 - \dots + (-1)^n N_n,$$

trong đó N_m ($1 \leq m \leq n$) là số tất cả các cách bỏ th- sao cho có m lá th- đúng địa chỉ. Nhận xét rằng, N_m là tổng theo mọi cách lấy m lá th- từ n lá, với mỗi cách lấy m lá th-, có $(n-m)!$ cách bỏ để m lá th- này đúng địa chỉ, ta nhận đ-ợc:

$$N_m = C_n^m (n-m)! = \frac{n!}{m!} \quad \text{và} \quad \overline{N} = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right),$$

trong đó $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ là tổ hợp chập m của tập n phần tử (số cách chọn m

đối tượng trong n đối tượng đ-ợc cho). Từ đó xác suất cần tìm là: $1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}$. Một điều lý thú là xác suất này dần đến e^{-1} (nghĩa là còn $> \frac{1}{3}$) khi n khá lớn.

Số $\overline{N}$ trong bài toán này đ-ợc gọi là số mất thứ tự và đ-ợc ký hiệu là D_n .

D-ới đây là một vài giá trị của D_n , cho ta thấy D_n tăng nhanh nh- thế nào so với n :

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
D_n	1	2	9	44	265	1854	14833	133496	1334961	14684570

2.4. Nguyên lý Dirichlet

2.4.1. Mở đầu:

Giả sử có một đàn chim bồ câu bay vào chuồng. Nếu số chim nhiều hơn số ngăn chuồng thì ít nhất trong một ngăn có nhiều hơn một con chim. Nguyên lý này dĩ nhiên là có thể áp dụng cho các đối tượng không phải là chim bồ câu và chuồng chim.

Mệnh đề (Nguyên lý): Nếu có $k+1$ (hoặc nhiều hơn) đồ vật đ-ợc đặt vào trong k hộp thì tồn tại một hộp có ít nhất hai đồ vật.

Chứng minh: Giả sử không có hộp nào trong k hộp chứa nhiều hơn một đồ vật. Khi đó tổng số vật đ-ợc chứa trong các hộp nhiều nhất là bằng k . Điều này trái giả thiết là có ít nhất $k+1$ vật.

Nguyên lý này thường được gọi là nguyên lý Dirichlet, mang tên nhà toán học người Đức ở thế kỷ 19. Ông thường xuyên sử dụng nguyên lý này trong công việc của mình.

2.4.2. Ví dụ:

1) Trong bất kỳ một nhóm 367 người thế nào cũng có ít nhất hai người có ngày sinh nhật giống nhau bởi vì chỉ có tất cả 366 ngày sinh nhật khác nhau.

2) Trong kỳ thi học sinh giỏi, điểm bài thi được đánh giá bởi một số nguyên trong khoảng từ 0 đến 100. Hỏi rằng ít nhất có bao nhiêu học sinh dự thi để cho chắc chắn tìm được hai học sinh có kết quả thi như nhau?

Theo nguyên lý Dirichlet, số học sinh cần tìm là 102, vì ta có 101 kết quả điểm thi khác nhau.

3) Trong số những người có mặt trên trái đất, phải tìm được hai người có hàm răng giống nhau. Nếu xem mỗi hàm răng gồm 32 cái răng là một xâu nhị phân có chiều dài 32, trong đó răng còn ứng với bit 1 và răng mất ứng với bit 0, thì có tất cả $2^{32} = 4.294.967.296$ hàm răng khác nhau. Trong khi đó số người trên hành tinh này là vượt quá 5 tỉ, nên theo nguyên lý Dirichlet ta có điều cần tìm.

2.4.3. Nguyên lý Dirichlet tổng quát:

Mệnh đề: Nếu có N đồ vật được đặt vào trong k hộp thì sẽ tồn tại một hộp chứa không ít hơn $\frac{N}{k}$ đồ vật. (hay tồn tại hộp có ít nhất $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ đồ vật)

(Ở đây, $[x]$ đó là số nguyên nhỏ nhất có giá trị lớn hơn hoặc bằng x . Khái niệm này đối ngẫu với $[x]$ giá trị của hàm sàn hay hàm phân nguyên tại x là số nguyên lớn nhất có giá trị nhỏ hơn hoặc bằng x .)

Chứng minh: Giả sử mọi hộp đều chứa ít hơn $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ vật. Khi đó tổng số đồ vật tối đa là $k \cdot \left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ đồ vật

Điều này mâu thuẫn với giả thiết là có N đồ vật cần xếp.

Vậy ta có điều phải chứng minh

Ví dụ:

1. Chứng minh rằng trong 100 người, có ít nhất 9 người sinh cùng một tháng.

Xếp những ng-ời sinh cùng tháng vào một nhóm. Có 12 tháng tất cả. Vậy theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại một nhóm có ít nhất $\lceil 100/12 \rceil = 9$ ng-ời.

2. Có năm loại học bổng khác nhau. Hỏi rằng phải có ít nhất bao nhiêu sinh viên để chắc chắn rằng có ít ra là 6 ng-ời cùng nhận học bổng nh- nhau.

Gọi N là số sinh viên, khi đó $\lceil N/5 \rceil = 6$ khi và chỉ khi $5 < N/5 \leq 6$ hay $25 < N \leq 30$. Vậy số N cần tìm là 26.

3. Số mã vùng cần thiết nhỏ nhất phải là bao nhiêu để đảm bảo 25 triệu máy điện thoại trong n-ớc có số điện thoại khác nhau, mỗi số có 9 chữ số (giả sử số điện thoại có dạng 0XX - 8XXXXXX với X nhận các giá trị từ 0 đến 9).

Có $10^7 = 10.000.000$ số điện thoại khác nhau có dạng 0XX - 8XXXXXX. Vì vậy theo nguyên lý Dirichlet tổng quát, trong số 25 triệu máy điện thoại ít nhất có $\lceil 25.000.000/10.000.000 \rceil = 3$ có cùng một số. Để đảm bảo mỗi máy có một số cần có ít nhất 3 mã vùng.

2.4.4. Một số ứng dụng của nguyên lý Dirichlet.

L- u ý: Trong nhiều ứng dụng của nguyên lý Dirichlet, khái niệm đồ vật và hộp cần phải đ- ợc lựa chọn một cách khôn khéo.

Ví dụ 1. Trong một phòng họp có n ng-ời, bao giờ cũng tìm đ-ợc 2 ng-ời có số ng-ời quen trong số những ng-ời dự họp là nh- nhau.

Số ng-ời quen của mỗi ng-ời trong phòng họp nhận các giá trị từ 0 đến $n-1$. Rõ ràng trong phòng không thể đồng thời có ng-ời có số ng-ời quen là 0 (tức là không quen ai) và có ng-ời có số ng-ời quen là $n-1$ (tức là quen tất cả). Vì vậy theo số l-ợng ng-ời quen, ta chỉ có thể phân n ng-ời ra thành $n-1$ nhóm. Vậy theo nguyên lý Dirichlet tồn tại một nhóm có ít nhất 2 ng-ời, tức là luôn tìm đ-ợc ít nhất 2 ng-ời có số ng-ời quen là nh- nhau.

Ví dụ 2. Trong một tháng gồm 30 ngày, một đội bóng chuyên thi đấu mỗi ngày ít nhất 1 trận nh-ng chơi không quá 45 trận. Chứng minh rằng tìm đ-ợc một giai đoạn gồm một số ngày liên tục nào đó trong tháng sao cho trong giai đoạn đó đội chơi đúng 14 trận.

Gọi a_j là số trận mà đội đã chơi từ ngày đầu tháng đến hết ngày j . Khi đó

$$1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{30} < 45$$

$$15 \leq a_1+14 < a_2+14 < \dots < a_{30}+14 < 59.$$

Sáu mươi số nguyên $a_1, a_2, \dots, a_{30}, a_1+14, a_2+14, \dots, a_{30}+14$ nằm giữa 1 và 59. Do đó theo nguyên lý Dirichlet có ít nhất 2 trong 60 số này bằng nhau. Vì vậy

tồn tại i và j sao cho $a_i = a_j + 14$ ($j < i$). Điều này có nghĩa là từ ngày $j + 1$ đến hết ngày i đội đã chơi đúng 14 trận.

Ví dụ 3. Chứng tỏ rằng trong $n + 1$ số nguyên d -ơng không vượt quá $2n$, tồn tại ít nhất một số chia hết cho số khác.

Ta viết mỗi số nguyên $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ d -ơng dạng $a_j = 2^{k_j} q_j$ trong đó k_j là số nguyên không âm còn q_j là số d -ơng lẻ nhỏ hơn $2n$. Vì chỉ có n số nguyên d -ơng lẻ nhỏ hơn $2n$ nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại i và j sao cho $q_i = q_j = q$. Khi đó $a_i = 2^{k_i} q$ và $a_j = 2^{k_j} q$. Vì vậy, nếu $k_i \leq k_j$ thì a_j chia hết cho a_i còn trong trường hợp ngược lại ta có a_i chia hết cho a_j .

Ví dụ cuối cùng trình bày cách áp dụng nguyên lý Dirichlet vào lý thuyết tổ hợp mà vẫn quen gọi là *lý thuyết Ramsey*, tên của nhà toán học người Anh. Nói chung, lý thuyết Ramsey giải quyết những bài toán phân chia các tập con của một tập các phần tử.

Ví dụ 4. Giả sử trong một nhóm 6 người mỗi cặp hai hoặc là bạn hoặc là thù. Chứng tỏ rằng trong nhóm có ba người là bạn lẫn nhau hoặc có ba người là kẻ thù lẫn nhau.

Gọi A là một trong 6 người. Trong số 5 người của nhóm hoặc là có ít nhất ba người là bạn của A hoặc có ít nhất ba người là kẻ thù của A , điều này suy ra từ nguyên lý Dirichlet tổng quát, vì $\lceil 5/2 \rceil = 3$. Trong trường hợp đầu ta gọi B, C, D là bạn của A . nếu trong ba người này có hai người là bạn thì họ cùng với A lập thành một bộ ba người bạn lẫn nhau, ngược lại, tức là nếu trong ba người B, C, D không có ai là bạn ai cả thì chứng tỏ họ là bộ ba người thù lẫn nhau. Tương tự có thể chứng minh trong trường hợp có ít nhất ba người là kẻ thù của A .

2.5. Bài tập

2.5.1. Trong tổng số 2504 sinh viên của một khoa công nghệ thông tin, có 1876 theo học môn ngôn ngữ lập trình Pascal, 999 học môn ngôn ngữ Fortran và 345 học ngôn ngữ C. Ngoài ra còn biết 876 sinh viên học cả Pascal và Fortran, 232 học cả Fortran và C, 290 học cả Pascal và C. Nếu 189 sinh viên học cả 3 môn Pascal, Fortran và C thì trong trường hợp đó có bao nhiêu sinh viên không học môn nào trong 3 môn ngôn ngữ lập trình kể trên.

2.5.2. Một cuộc họp gồm 12 người tham dự để bàn về 3 vấn đề. Có 8 người phát biểu về vấn đề I, 5 người phát biểu về vấn đề II và 7 người phát biểu về vấn

đề III. Ngoài ra, có đúng 1 ng-ời không phát biểu vấn đề nào. Hỏi nhiều lắm là có bao nhiêu ng-ời phát biểu cả 3 vấn đề.

2.5.3. Trong tập số nguyên $\{1, 2, \dots, 100\}$ có bao nhiêu số không chia hết cho bất kỳ số nào trong các số 3, 4, 7

2.5.4. Có bao nhiêu

- a. Xâu có độ dài 4
- b. Xâu có độ dài 4 và không chứa chữ x

2.5.5. Có bao nhiêu xâu gồm 3 chữ số thập phân?

- a. Không chứa cùng một chữ số 3 lần
- b. Bắt đầu bằng chữ số lẻ
- c. Có đúng hai chữ số 4

2.5.6. Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài 10 hoặc bắt đầu bằng 000 hoặc kết thúc bằng 111

2.5.7. Có bao nhiêu số nguyên không lớn hơn 1000 chia hết cho 7 hoặc 11

2.5.8. Trong số các số nguyên d-ương có 3 chữ số, có bao nhiêu số:

- | | |
|----------------------------------|---|
| a. Chia hết cho 7 | e. Không chia hết cho 4 |
| b. Lẻ | f. Chia hết cho 3 hoặc 4 |
| c. Có 3 chữ số đôi một khác nhau | g. Không chia hết cho 3 hoặc cho 4 |
| d. Chia hết cho 3 và cho 4 | h. Chia hết cho 3 nh-ưng không chia hết cho 4 |

2.5.9. Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài 7 chứa một số chẵn các bit 0

2.5.10. Tìm hệ số của x^5y^8 trong khai triển $(x + y)^{13}$

2.5.11. Có bao nhiêu xâu khác nhau có thể lập đ-ợc từ các chữ cái trong từ *ACCESS*, yêu cầu phải dùng tất cả các chữ?

2.5.12. Một giáo s-ĩ cất bộ s-ách u tập gồm 40 số báo toán học vào 4 chiếc ngăn tủ, mỗi ngăn đựng 10 số. Có bao nhiêu cách có thể cất các tờ báo vào các ngăn nếu:

- 1) Mỗi ngăn đ-ợc đánh số sao cho có thể phân biệt đ-ợc;
- 2) Các ngăn là giống hệt nhau?

3. Bài toán tồn tại và ph- ơng pháp giải

Khi nghiên cứu về bài toán đếm, công việc chủ yếu của chúng ta là đếm số cấu hình thoả điều kiện bài toán đặt ra, và các bài toán đó sự tồn tại của các cấu hình là hiển nhiên. Tuy nhiên trong rất nhiều bài toán việc chỉ ra sự tồn tại của một cấu hình là rất khó khăn. Việc chỉ ra cấu hình thoả điều kiện của bài toán thì tr- ớc hết cần phải xác định xem cấu hình đó có tồn tại hay không.

D- ới đây ta sử dụng một số ph- ơng pháp để giải quyết bài toán

3.1. Ph- ơng pháp phản chứng

Ví dụ: Cần tìm một cách kết nối 15 máy tính với nhau sao cho mỗi máy đ- ợc kết nối với đúng 5 máy khác.

Ta chứng minh không có cách nào kết nối đ- ợc

Giả sử tồn tại một cách nối thoả yêu cầu

$$\text{Số đ- ờng nối: } \frac{15 \cdot 5}{2} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \text{mâu thuẫn}$$

Vậy không tìm đ- ợc cách nối nào sao cho mỗi máy kết nối đ- ợc với đúng 5 máy.

3.2. Ph- ơng pháp sử dụng nguyên lý Dirichlet

* *Nguyên Lý*: Bỏ $n + 1$ đồ vật vào trong n cái lọ $\rightarrow$ tồn tại một hộp chứa nhiều hơn 1 đồ vật

* *Nguyên lý tổng quát*: Bỏ $n \cdot k + 1$ đồ vật vào n hộp $\rightarrow$ tồn tại một hộp chứa nhiều hơn k đồ vật.

Ví dụ 1: Một lớp học có 45 học sinh. Chia lớp ra làm 4 tổ. Chứng minh luôn tồn tại một tổ có ít nhất 12 học sinh.

Giải:

Thật vậy, lớp học có 45 học sinh, nếu chia đều ra các tổ thì mỗi tổ sẽ có 11 học sinh và d- 1 học sinh. Học sinh này sẽ đ- ợc xếp vào 1 trong 4 tổ, khi đó nếu đ- ợc xếp vào tổ nào thì tổ đó sẽ có 12 học sinh. Vậy có điều phải chứng minh

Ví dụ 2: Lấy $n + 1$ số nguyên tùy ý. Chứng minh rằng tìm đ- ợc hai số có hiệu của chúng chia hết cho n .

Giải: gọi các số là: $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$

$$x_i \equiv a_i \pmod{n} \quad 0 \leq a_i \leq n-1$$

theo nguyên lý Dirichlet: $\exists i, j : a_i = a_j \rightarrow x_i - x_j \equiv 0 \pmod{n}$

3.3. Một số bài toán

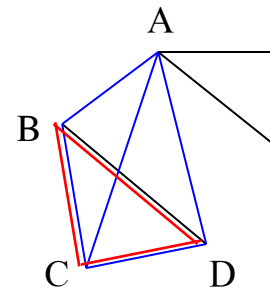
Bài toán 1) Nối 6 điểm với nhau từng cặp thành các đoạn thẳng tô màu xanh hoặc đỏ. CMR tìm đ-ợc một tam giác có 3 cạnh cùng màu.

Ta lấy một điểm tùy ý (giả sử A)

Kẻ 5 đoạn thẳng từ A đến 5 điểm còn lại và đ-ợc tô màu xanh hoặc đỏ

Theo Dirichlet: có ít nhất 3 đoạn thẳng cùng màu, giả sử là AB, AC, AD.

Nếu một trong các đoạn thẳng BC, CD, BD màu xanh thì ta đ-ợc tam giác t-ơng ứng đỉnh A toàn xanh
ng-ợc lại, ta đ-ợc tam giác BCD đỏ



Bài toán 2) Trong một phòng họp bao giờ cũng tìm đ-ợc hai ng-ời có số ng-ời quen trong số những ng-ời dự họp là bằng nhau.

Giải: Gọi số ng-ời dự họp là $n \rightarrow$ số ng-ời quen của một ng-ời n_i nào đó $= \{0, \dots, n-1\}$.

Ta thấy: một ng-ời không thể đồng thời có số ng-ời quen là 0 hoặc $n-1 \rightarrow$ phân số ng-ời quen trong phòng ra thành $n-1$ nhóm $\Rightarrow$ Vậy có n ng-ời, phân thành $n-1$ nhóm $\rightarrow$ phải có ít nhất hai ng-ời có cùng số ng-ời quen.

Bài toán 3) Chứng minh rằng không thể nối 31 máy vi tính thành một mạng sao cho mỗi máy đ-ợc nối với đúng 5 máy khác

Giải:

Giả sử ta luôn tìm đ-ợc cách nối 31 máy tính lại thành mạng sao cho mỗi máy đ-ợc nối với đúng 5 máy khác. Khi đó số l-ợng các dây nối là $5 * \frac{31}{2} = 75,5$ mâu thuẫn (vì số dây nối không thể lẻ) Vỡ điều cần chứng minh là đúng.

3.4. Bài tập

3.4.1. Chứng minh rằng $\sum_{k=1}^n k C_n^k = n 2^{n-1}$

3.4.2. Chứng minh rằng với m, n, r là các số nguyên không âm, và r không v-ợt quá m, n ta

$$\text{có: } C_{m+n}^r = \sum_{k=0}^r C_n^k C_m^{r-k}$$

3.4.3. Chỉ ra rằng có ít nhất 4 ng-ời trong số 25 triệu ng-ời có cùng tên họ viết tắt bằng 3 chữ cái sinh cùng ngày trong năm (không nhất thiết trong cùng một năm).

3.4.4. Một tay đô vật tham gia thi đấu giành chức vô địch trong 75 giờ. Mỗi giờ anh ta có ít nhất một trận đấu, nh-ng toàn bộ anh ta có không quá 125 trận. Chứng tỏ rằng có những giờ liên tiếp anh ta đã đấu đúng 24 trận.

3.4.5. Cho n là số nguyên d-ương bất kỳ. Chứng minh rằng luôn lấy ra đ-ợc từ n số đã cho một số hạng thích hợp sao cho tổng của chúng chia hết cho n .

3.4.6. Trong một cuộc lấy ý kiến về 7 vấn đề, ng-ời đ-ợc hỏi ghi vào một phiếu trả lời sẵn bằng cách để nguyên hoặc phủ định các câu trả lời t-ương ứng với 7 vấn đề đã nêu.

Chứng minh rằng với 1153 ng-ời đ-ợc hỏi luôn tìm đ-ợc 10 ng-ời trả lời giống hệt nhau.

3.4.7. Có 17 nhà bác học viết th- cho nhau trao đổi 3 vấn đề. Chứng minh rằng luôn tìm đ-ợc 3 ng-ời cùng trao đổi một vấn đề.

3.4.8. Trong kỳ thi kết thúc học phần toán học rời rạc có 10 câu hỏi. Có bao nhiêu cách gán điểm cho các câu hỏi nếu tổng số điểm bằng 100 và mỗi câu ít nhất đ-ợc 5 điểm.

3.4.9. Ph-ương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm?

3.4.10. Cho n là một số nguyên d-ương. Chứng tỏ rằng trong mọi tập n số nguyên d-ương liên tiếp có đúng một số chia hết cho n

3.4.11. Trong một mạng máy tính, mỗi máy nối trực tiếp hoặc không nối với các máy khác. Chỉ ra rằng có ít nhất hai máy mà số các máy khác nối với chúng là bằng nhau.

3.4.12. Trong không gian cho 9 điểm có tọa độ nguyên, Chứng tỏ rằng bao giờ cũng có một cặp điểm có trung điểm nguyên

3.4.13. Chứng minh rằng trong 5 số chọn từ 8 số nguyên đầu tiên tồn tại một cặp số có tổng bằng 9. Điều khẳng định này còn đúng nếu chọn 4 chứ không phải chọn 5

3.4.14. Chứng minh rằng trong 7 số chọn từ 10 số nguyên đầu tiên tồn tại một cặp số có tổng bằng 11. Điều khẳng định này còn đúng nếu chọn 6 chứ không phải chọn 7

CHƯƠNG 2: CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN CỦA LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

Mã chương: Mh12.2

Giới thiệu:

Trình bày các kiến thức cơ bản về lý thuyết đồ thị. Cung cấp các kiến thức cơ bản về lý thuyết đồ thị, giúp người học có kiến thức cơ sở để nghiên cứu về đồ thị trong các chương tiếp theo.

Mục tiêu:

- Trình bày được các khái niệm của đồ thị
- Xác định được các loại đồ thị, chu trình, đồ thị liên thông.
- Nghiêm túc trong học tập, đảm bảo an toàn cho người và trang thiết bị.

Nội dung chính:

1. Định nghĩa đồ thị

Đồ thị là một cấu trúc rời rạc bao gồm các đỉnh và các cạnh nối các đỉnh này lại với nhau.

Đồ thị G là một cặp $G = (V, E)$

Trong đó $V \neq \emptyset$ là tập hợp các phân tử nào đó gọi là đỉnh của đồ thị.

E : Là tập các cặp (u, v) nào đó (gọi là cạnh của đồ thị) với $u, v \in V, (u, v) \in$

$E \Rightarrow (v, u) \in E$ và coi $(u, v) \equiv (v, u)$:

+ Đồ thị G gọi là vô hướng nếu $\forall u, v \in V: (u, v) \in E \Rightarrow (v, u) \in E$

+ Đồ thị G gọi là có hướng nếu $\exists u, v \in V: (u, v) \neq (v, u)$

quy - ước: Nếu bài toán chỉ nói đồ thị mà không nói rõ là vô hướng hay có hướng thì ta ngầm hiểu là đồ thị vô hướng.

+ Đồ thị G gọi là đơn đồ thị nếu $V = \{u, v, x, y, z\}$

$$E = \{(u, x), (u, y), (u, v), (u, z)\}$$

2. Các thuật ngữ cơ bản

+ Đồ thị $G = (V, E)$ với đỉnh $v \in V, e = (u, v) \in E$

Khi đó: u, v là hai đỉnh đầu, cuối của cạnh e

e _ cạnh liên thuộc u, v

+ Hai đỉnh u, v của đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ đ- ợc gọi là kề nhau nếu (u, v) là cạnh của đồ thị .

+ *Bậc của đỉnh*: Bậc của đỉnh $u \in V$ là số cạnh liên th- ộc với u kí hiệu $\deg(u)$