

Mục lục

1. Biến cố ngẫu nhiên và xác suất của nó	7
1.1. Phép thử và phân loại biến cố	7
1.1.1. Định nghĩa	7
1.1.2. Phân loại biến cố	7
1.2. Định nghĩa xác suất	8
1.2.1. Xác suất của biến cố	8
1.2.2. Định nghĩa cổ điển về xác suất	8
1.2.3. Định nghĩa hình học về xác suất	11
1.2.4. Định nghĩa thống kê về xác suất	12
1.3. Quan hệ giữa các biến cố	13
1.3.1. Tổng các biến cố	13
1.3.2. Tích các biến cố	13
1.3.3. Biến cố xung khắc	14
1.3.4. Nhóm đầy đủ các biến cố	14
1.3.5. Biến cố đối lập	14
1.4. Định lý cộng và nhân xác suất	15
1.4.1. Định lý cộng xác suất (trường hợp các biến cố xung khắc)	15
1.4.2. Định lý nhân xác suất	17
1.4.3. Định lý cộng xác suất (trường hợp tổng quát)	22
1.4.4. Định lý liên hệ cộng và nhân xác suất	23
1.5. Công thức Bernoulli	25
1.5.1. Các phép thử độc lập	25
1.5.2. Công thức Bernoulli	25
1.5.3. Số lần xuất hiện chắc nhất	26
1.5.4. Mở rộng công thức Bernoulli	27
1.6. Công thức đầy đủ và công thức Bayes	29
1.6.1. Công thức xác suất đầy đủ	29
1.6.2. Công thức Bayes	30
Bài tập chương 1	32
2. Đại lượng ngẫu nhiên và các quy luật phân phối xác suất	43
2.1. Định nghĩa và phân loại đại lượng ngẫu nhiên	43

2.1.1.	Định nghĩa	43
2.1.2.	Phân loại đại lượng ngẫu nhiên	43
2.2.	Quy luật phân phối xác suất của đại lượng ngẫu nhiên	44
2.2.1.	Bảng phân phối xác suất	44
2.2.2.	Hàm phân phối xác suất	46
2.2.3.	Hàm mật độ xác suất	50
2.3.	Các tham số đặc trưng của đại lượng ngẫu nhiên	55
2.3.1.	Kỳ vọng toán	55
2.3.2.	Phương sai	60
2.3.3.	Độ lệch tiêu chuẩn	64
2.3.4.	Mốt	64
2.3.5.	Trung vị	65
2.3.6.	Phân vị	66
2.4.	Một số quy luật phân phối xác suất thông dụng	66
2.4.1.	Quy luật phân phối chuẩn $N(\mu, \sigma^2)$	66
2.4.2.	Quy luật không - một $A(p)$	74
2.4.3.	Quy luật nhị thức $B(n, p)$	75
2.4.4.	Quy luật Poisson $P(\lambda)$	79
2.4.5.	Quy luật siêu bội $M(N, n)$	81
2.4.6.	Quy luật khi - bình phương $\chi^2(n)$	82
2.4.7.	Quy luật Student $T(n)$	84
	Bài tập chương 2	85
3.	Mẫu ngẫu nhiên - Ước lượng tham số	93
3.1.	Tổng thể nghiên cứu	93
3.1.1.	Định nghĩa	93
3.1.2.	Các phương pháp mô tả tổng thể	93
3.1.3.	Các tham số đặc trưng của tổng thể	94
3.2.	Mẫu ngẫu nhiên	96
3.2.1.	Định nghĩa	96
3.2.2.	Các phương pháp mô tả mẫu ngẫu nhiên	97
3.2.3.	Đồ thị của phân phối thực nghiệm	98
3.3.	Thống kê	100
3.3.1.	Định nghĩa	100
3.3.2.	Trung bình mẫu	100
3.3.3.	Phương sai mẫu	101
3.3.4.	Độ lệch tiêu chuẩn mẫu	104
3.3.5.	Tần suất mẫu	104
3.3.6.	Quy luật phân phối xác suất của một số thống kê đặc trưng mẫu	105
3.3.7.	Ví dụ	107

3.4. Mẫu ngẫu nhiên hai chiều	108
3.4.1. Khái niệm	108
3.4.2. Phương pháp mô tả ngẫu nhiên hai chiều	108
3.4.3. Một số thống kê đặc trưng của mẫu ngẫu nhiên hai chiều	108
3.5. Ước lượng tham số của đại lượng ngẫu nhiên	111
3.5.1. Phương pháp ước lượng điểm	111
3.5.2. Phương pháp ước lượng bằng khoảng tin cậy	112
3.5.3. Khoảng tin cậy cho trung bình (Ước lượng kỳ vọng toán của đại lượng ngẫu nhiên phân phối theo quy luật chuẩn)	112
3.5.4. Khoảng tin cậy cho tỷ lệ (Ước lượng kỳ vọng toán của đại lượng ngẫu nhiên phân phối theo quy luật không - một)	121
3.5.5. Khoảng tin cậy cho phương sai (Ước lượng phương sai của đại lượng ngẫu nhiên phân phối theo quy luật chuẩn)	124
Bài tập chương 3	127
 4. Số gần đúng và Sai số	 135
4.1. Khái niệm về số gần đúng	135
4.1.1. Sai số tuyệt đối, sai số tương đối	135
4.1.2. Sự làm tròn số, sai số làm tròn	136
4.2. Cách viết số xấp xỉ	137
4.2.1. Chữ số có nghĩa	137
4.2.2. Chữ số chắc	137
4.2.3. Cách viết số xấp xỉ	138
4.3. Sai số tính toán	138
4.3.1. Sai số các phép tính cộng trừ	138
4.3.2. Sai số các phép tính nhân chia	139
4.3.3. Sai số của phép lũy thừa, khai căn, nghịch đảo	139
4.3.4. Bài toán ngược của lý thuyết sai số	140
4.4. Sai số phương pháp và sai số tính toán	140
Bài tập chương 4	141
 5. Phép nội suy	 143
5.1. Nội suy bằng đa thức đại số	143
5.2. Đa thức nội suy Lagrange	144
5.3. Sai số của phép nội suy	146
5.3.1. Sai số phương pháp	146
5.3.2. Sai số tính toán	147

5.3.3. Chọn mốc nội suy tối ưu	148
5.4. Sai phân và các tính chất	149
5.5. Một số quy tắc nội suy hàm số trên lưới đều	149
5.5.1. Bảng sai phân	149
5.5.2. Nội suy ở đầu bảng	150
5.5.3. Nội suy ở cuối bảng	151
5.6. Một số ví dụ áp dụng sai phân và nội suy	152
5.6.1. Tính giá trị đa thức	152
5.6.2. Tính tổng	153
5.7. Nội suy trên lưới không đều	154
5.7.1. Tỷ sai phân	154
5.7.2. Công thức nội suy Newton trong trường hợp mốc không cách đều	154
5.7.3. Bài toán nội suy ngược	155
5.8. Phương pháp bình phương bé nhất	155
5.8.1. Nội dung phương pháp	156
5.8.2. Một số trường hợp áp dụng	156
Bài tập chương 5	160
6. Tính gần đúng đạo hàm và tích phân	161
6.1. Tính gần đúng đạo hàm	161
6.1.1. Sử dụng đa thức nội suy Lagrange	161
6.1.2. Trường hợp các mốc nội suy cách đều	162
6.2. Tính gần đúng tích phân	163
6.2.1. Phương pháp hình thang	163
6.2.2. Công thức parabol (Simpson)	165
6.2.3. Công thức Newton-Cotes	167
Bài tập chương 6	168
7. Giải gần đúng phương trình vi phân	171
7.1. Mở đầu	171
7.2. Phương pháp chuỗi Taylor	171
7.3. Phương pháp Euler	173
7.4. Phương pháp Euler cải tiến	175
7.5. Phương pháp Runge-Kutta	176
Bài tập chương 7	179
PHỤ LỤC	180
A. Giải tích tổ hợp	181
A.1. Các quy tắc đếm	181
A.1.1. Quy tắc cộng	181

A.1.2. Quy tắc nhân	181
A.2. Hoán vị - Chỉnh hợp - Tổ hợp	181
A.2.1. Chỉnh hợp (chỉnh hợp không lặp)	181
A.2.2. Chỉnh hợp lặp	182
A.2.3. Hoán vị	183
A.2.4. Tổ hợp	183
Bài tập phụ lục A	185
 B. Sử dụng CNTT giải toán thống kê	 187
B.1. Đối với máy tính điện tử cầm tay	187
B.1.1. Tính các đặc trưng của mẫu	187
B.1.2. Bài toán tìm hàm hồi quy	190
B.2. Dùng phần mềm Excel	194
B.2.1. Tính toán trong bài toán ước lượng	194
B.2.2. Tính toán các đặc trưng của mẫu	196
B.2.3. Các phân phối xác suất	198
 C. Bảng tra	 201
C.1. Bảng giá trị hàm mật độ của phân phối chuẩn hóa	202
C.2. Bảng giá trị hàm Laplace	203
C.3. Bảng phân vị chuẩn	204
C.4. Bảng phân vị Student	205
C.5. Bảng phân vị Khi - bình phương	206

TaiLieu.vn

Chương 1

Biến cố ngẫu nhiên và xác suất của nó

1.1. Phép thử và phân loại biến cố

1.1.1. Định nghĩa

★ **Định nghĩa 1.1** Việc thực hiện một nhóm các điều kiện cơ bản để quan sát một hiện tượng nào đó có xảy ra hay không được gọi là thực hiện một phép thử, còn hiện tượng có thể xảy ra trong kết quả của phép thử đó được gọi là biến cố.

● **Ví dụ 1.1** Tung một con súc sắc xuống đất là một phép thử, còn việc lật lên một mặt nào đó là biến cố.

● **Ví dụ 1.2** Bắn một phát súng vào bia. Việc bắn súng là phép thử, còn việc trúng vào một miền nào đó của bia là biến cố.

1.1.2. Phân loại biến cố

Một biến cố chỉ có thể xảy ra khi một phép thử gắn liền với nó được thực hiện. Trong thực tế có thể xảy ra các loại biến cố sau đây:

- Biến cố chắc chắn: là biến cố nhất định sẽ xảy ra khi thực hiện một phép thử. Biến cố chắc chắn được ký hiệu là U .
- Biến cố không thể có: là biến cố nhất định không xảy ra khi thực hiện một phép thử. Biến cố không thể có được ký hiệu là V .
- Biến cố ngẫu nhiên: là biến cố có thể xảy ra hoặc không xảy ra khi thực hiện một phép thử. Các biến cố ngẫu nhiên được ký hiệu là $A, B, C, \dots$ hoặc $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_n$.

Tất cả các biến cố ta gặp trong thực tế đều thuộc về một trong ba loại biến cố kể trên. Tuy nhiên các biến cố ngẫu nhiên là các biến cố thường gặp hơn cả.

● **Ví dụ 1.3** Tung một con xúc xắc, xét các biến cố sau đây:

U = "Xuất hiện mặt có số chấm nhỏ hơn 7". U là biến cố chắc chắn.

V = "Xuất hiện mặt có 8 chấm". V là biến cố không thể có.

A = "Xuất hiện mặt có số chấm chẵn". A là biến cố ngẫu nhiên.

A_i = "Xuất hiện mặt i chấm", ($i = 1, 2, \dots, 6$). A_i là các biến cố ngẫu nhiên.

1.2. Định nghĩa xác suất

1.2.1. Xác suất của biến cố

★ **Định nghĩa 1.2** Xác suất của một biến cố là một con số đặc trưng cho khả năng khách quan xuất hiện biến cố đó khi thực hiện phép thử. Ký hiệu xác suất của biến cố A là $P(A)$.

Ta chú ý rằng, việc biến cố ngẫu nhiên xảy ra hay không xảy ra trong kết quả của phép thử là điều không thể đoán trước được, xác suất của một biến cố chỉ phản ánh khả năng khách quan xuất hiện biến cố, do những điều kiện của phép thử quy định chứ không tùy thuộc vào ý muốn chủ quan của con người.

1.2.2. Định nghĩa cổ điển về xác suất

a) Ví dụ mở đầu.

Giả sử thực hiện phép thử là tung một con súc sắc cân đối và đồng chất. Xét biến cố A = "Xuất hiện mặt có số chấm chẵn". Ta sẽ xác định xác suất của biến cố A .

Khi tung một con súc sắc cân đối và đồng chất ta thấy có thể có 6 kết cục xảy ra là: xuất hiện các mặt 1 chấm, 2 chấm, ..., 6 chấm. Những kết cục này thoả mãn hai điều kiện: chúng duy nhất, tức là trong kết quả của phép thử chỉ xảy ra một và chỉ một kết cục trong số đó; hơn nữa chúng có khả năng xảy ra như nhau. Các kết cục thoả mãn hai điều kiện trên được gọi các kết cục duy nhất đồng khả năng.

Trong số 6 kết cục duy nhất đồng khả năng đó ta thấy chỉ có 3 kết cục mà nếu kết cục đó xảy ra thì biến cố A sẽ xảy ra, đó là những kết cục được mặt 2 chấm, 4 chấm, 6 chấm. Những kết cục làm cho biến cố xảy ra được gọi là các kết cục thuận lợi cho biến cố.

Như vậy ta thấy khả năng xảy ra của biến cố A là 3 phần 6, tức là 1 phần 2. Đó là cách xác định xác suất của biến cố theo quan điểm cổ điển.

b) Định nghĩa

★ **Định nghĩa 1.3** Xác suất xuất hiện biến cố A trong một phép thử là tỉ số giữa số kết cục thuận lợi cho A và tổng số các kết cục duy nhất đồng khả năng có thể xảy ra khi thực hiện phép thử đó.

Nếu ký hiệu: m là số kết cục thuận lợi cho biến cố A ; n là số kết cục duy nhất đồng khả năng của phép thử, ta có công thức tính xác suất của biến cố A như sau:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

c) Các tính chất của xác suất

- Xác suất của biến cố chắc chắn bằng một: $P(U) = 1$.
- Xác suất của biến cố không thể có bằng không: $P(V) = 0$.
- Xác suất của biến cố ngẫu nhiên là một số nằm trong khoảng giữa không và một:

$$0 < P(A) < 1$$

Như vậy, xác suất của một biến cố bất kỳ luôn thoả mãn điều kiện:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

d) Tính xác suất bằng định nghĩa cổ điển

• **Ví dụ 1.4** Một người khi gọi điện cho bạn quên mất 3 chữ số cuối và chỉ nhớ rằng chúng khác nhau. Tìm xác suất để quay ngẫu nhiên một lần được đúng số cần gọi.

Lời giải.

Gọi A là biến cố "Quay ngẫu nhiên một lần được ngay số cần gọi".

Số kết cục đồng khả năng là tất cả các cách lập nên một bộ 3 số khác nhau từ 10 số tự nhiên đầu tiên. Như vậy:

$$n = A_{10}^3 = 10.9.8 = 720.$$

Số kết cục thuận lợi cho biến cố A chỉ có một kết cục:

$$m = 1$$

Vì vậy theo định nghĩa cổ điển, xác suất của biến cố A là:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{720}.$$

• **Ví dụ 1.5** Trong bình có a quả cầu trắng và b quả cầu đen. Lấy ngẫu nhiên một quả cầu. Tìm xác suất để lấy được một quả cầu trắng.

Lời giải.

Gọi A là biến cố lấy được cầu trắng.

Khi lấy ngẫu nhiên một quả cầu, ta có thể lấy được bất kỳ quả cầu nào trong số $a + b$ quả cầu trong bình, vì vậy số kết cục duy nhất đồng khả năng là:

$$n = a + b$$

Biến cố A sẽ xảy ra khi ta lấy được một trong số a quả cầu trắng, như vậy số kết cục thuận lợi là:

$$m = a$$

Từ đó theo định nghĩa cổ điển về xác suất, ta có:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{a}{a+b}$$

●**Ví dụ 1.6** Một hộp có 10 sản phẩm, trong đó có 6 chính phẩm và 4 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên từ hộp đó 3 sản phẩm. Tìm xác suất để:

- Cả 3 sản phẩm lấy ra đều là chính phẩm.
- Trong 3 sản phẩm lấy ra có đúng 2 chính phẩm.

Lời giải.

- Gọi A là biến cố "Lấy được 3 chính phẩm".

Số kết cục đồng khả năng trong phép thử bằng số cách chọn 3 sản phẩm (phân biệt và không kể thứ tự) từ 10 sản phẩm, như vậy $n = C_{10}^3 = 120$.

Số kết cục thuận lợi cho A xảy ra là số cách chọn được 3 sản phẩm từ 6 chính phẩm, vậy $m = C_6^3 = 20$.

Do đó xác suất của biến cố A là: $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$.

- Gọi B là biến cố "Trong 3 sản phẩm lấy ra có đúng 2 chính phẩm".

Để biến cố B xảy ra ta phải thực hiện chọn theo 2 bước:

- Chọn 2 chính phẩm trong số 6 chính phẩm, số cách chọn là C_6^2 ;
- Chọn 1 phế phẩm trong số 4 phế phẩm, số cách chọn là C_4^1 .

Số kết cục thuận lợi cho biến cố B là số cách chọn cho biến cố B xảy ra:

$$m = C_6^2 \cdot C_4^1$$

Vậy xác suất của biến cố B là:

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{C_6^2 \cdot C_4^1}{C_{10}^3} = \frac{1}{2}.$$

●**Ví dụ 1.7** Tung một con súc sắc hai lần. Tính xác suất để trong đó có đúng 1 lần xuất hiện mặt 6 chấm.

Lời giải.

Gọi A là biến cố: "Trong 2 lần tung súc sắc có đúng một lần xuất hiện mặt 6 chấm". Số kết cục đồng khả năng là số cách thiết lập được cặp 2 số lần lượt là số chấm xuất hiện của mỗi lần

tung súc sắc. Nó bằng số cách chọn một bộ 2 số (có thể giống nhau và có quan tâm đến thứ tự) từ 6 số $\{1, 2, \dots, 6\}$, vậy:

$$n = \tilde{A}_6^2 = 6^2 = 36.$$

Số kết cục thuận lợi cho biến cố A xảy ra gồm 10 kết cục: 16, 26, 36, 46, 56, 61, 62, 63, 64, 65, do đó: $m = 10$.

$$\text{Vậy xác suất của biến cố A là: } P(A) = \frac{m}{n} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$

1.2.3. Định nghĩa hình học về xác suất

★ **Định nghĩa 1.4** Xét một phép thử có vô hạn kết cục đồng khả năng. Giả sử ta có thể biểu thị tập hợp mọi kết cục này bởi một miền hình học Ω nào đó; và những kết cục thuận lợi cho biến cố A được biểu thị bởi miền con $G \subset \Omega$. Khi đó xác suất của biến cố A được tính bởi công thức:

$$P(A) = \frac{\text{độ đo}(G)}{\text{độ đo}(\Omega)}$$

Tùy theo Ω là đoạn thẳng, miền phẳng, mảnh mặt cong hay khối không gian mà độ đo được hiểu là độ dài, diện tích hay thể tích.

● **Ví dụ 1.8** Đường dây điện thoại ngầm nối hai trạm A, B bỗng nhiên bị đứt. Biết dây điện thoại đồng chất dài 800m chôn trong lòng đất có khả năng đứt tại mọi điểm như nhau, hãy tính xác suất dây đứt cách A không quá 100m.

Lời giải. Vì dây có thể đứt tại một điểm bất kỳ trên đoạn thẳng AB với khả năng như nhau nên có thể biểu thị tập hợp mọi kết cục đồng khả năng của phép thử bởi đoạn AB. Các kết cục thích hợp cho biến cố "dây đứt cách A không quá 100m" được biểu thị bởi đoạn AC. Do đó xác suất cần tìm bằng:

$$P(A) = \frac{\text{độ dài } AC}{\text{độ dài } AB} = \frac{100}{800} = \frac{1}{8}.$$

● **Ví dụ 1.9** Hai người bạn A và B hẹn gặp nhau tại một địa điểm xác định trong vòng từ 0 giờ đến 1 giờ. Mỗi người đến chỗ hẹn vào một thời điểm bất kỳ trong khoảng thời gian trên và chờ 20 phút, nếu không gặp người kia thì bỏ đi. Tính xác suất để họ gặp nhau.

Lời giải.

Gọi x (phút) là lúc đến của A, y (phút) là lúc đến của B.

Mọi kết cục đồng khả năng là một cặp số (x, y) :

$$0 \leq x \leq 60; 0 \leq y \leq 60.$$

Vậy miền kết cục đồng khả năng Ω là hình vuông OACB trên hình vẽ.

Các kết cục thuận lợi cho hai người gặp nhau là những cặp (x, y) sao cho: $|x - y| \leq 20$. Trên hình vẽ, tập hợp này ứng với miền con của hình vuông OACB gồm giữa các đường thẳng $y = x + 20$ và $y = x - 20$.

Vậy xác suất để hai người gặp nhau là:

$$P = \frac{\text{diện tích } (G)}{\text{diện tích } (\Omega)} = \frac{60^2 - 40^2}{60^2} = \frac{5}{9}.$$

1.2.4. Định nghĩa thống kê về xác suất

a) Tần suất xuất hiện của biến cố

★ **Định nghĩa 1.5** Tần suất xuất hiện biến cố trong n phép thử là tỷ số giữa số phép thử trong đó biến cố xuất hiện và tổng số phép thử được thực hiện.

Như vậy, nếu ký hiệu số phép thử là n , số lần xuất hiện biến cố A là k , tần suất xuất hiện biến cố A là $f(A)$ thì:

$$f(A) = \frac{k}{n}.$$

● **Ví dụ 1.10** Khi kiểm tra ngẫu nhiên 80 sản phẩm do một máy sản xuất, người ta phát hiện ra 3 phế phẩm. Gọi A là biến cố "Xuất hiện phế phẩm". Vậy tần suất phát hiện phế phẩm bằng:

$$f(A) = \frac{3}{80}.$$

● **Ví dụ 1.11** Bắn 50 phát đạn vào bia thấy có 47 phát trúng. Gọi A là biến cố "Bắn trúng bia". Tần suất của việc bắn trúng bia bằng:

$$f(A) = \frac{47}{50}.$$

● **Ví dụ 1.12** Để nghiên cứu khả năng xuất hiện mặt sấp khi tung một đồng xu, người ta tiến hành tung một đồng xu nhiều lần và thu được kết quả sau đây:

Người làm thí nghiệm	Số lần tung (n)	Số lần được mặt sấp (k)	Tần suất $f(A) = \frac{k}{n}$
Buffon	4040	2048	0,5069
Pearson	12000	6019	0,5016
Pearson	24000	12012	0,5005

Ta thấy khi số phép thử tăng lên thì tần suất xuất hiện mặt sấp sẽ dao động ngày càng ít hơn xung quanh giá trị không đổi là 0,5. Điều đó cho phép hy vọng rằng khi số phép thử tăng lên vô hạn, tần suất sẽ hội tụ về giá trị 0,5.

Tính ổn định của tần suất là cơ sở để đưa ra định nghĩa thống kê về xác suất.

b) Định nghĩa thống kê về xác suất

★ **Định nghĩa 1.6** Xác suất xuất hiện biến cố A trong một phép thử là một số p không đổi mà tần suất f xuất hiện biến cố đó trong n phép thử sẽ hội tụ theo xác suất về p khi số phép thử tăng lên vô hạn.

$$f \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{Hội tụ theo xác suất}} p \text{ (ký hiệu là } f \xrightarrow{p} p \text{)}.$$

Như vậy về mặt thực tế, với số phép thử n đủ lớn ta có thể lấy $P(A) \approx f(A)$. Ta chú ý rằng ở đây tần suất f hội tụ theo xác suất về p chứ không phải hội tụ theo nghĩa thông thường của giải tích toán học. Điều đó có nghĩa là với mọi ε dương bé tùy ý ta luôn có:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|f - p| < \varepsilon) = 1.$$

1.3. Quan hệ giữa các biến cố

1.3.1. Tổng các biến cố

★ **Định nghĩa 1.7** Biến cố C được gọi là tổng của hai biến cố A và B, ký hiệu $C = A + B$, nếu C sẽ xảy ra khi có ít nhất một trong hai biến cố ấy xảy ra.

● **Ví dụ 1.13** Hai người cùng bắn vào một bia. Gọi A là biến cố "Người thứ nhất bắn trúng", B là biến cố "Người thứ hai bắn trúng", C là biến cố "Có người bắn trúng". Vậy $C = A + B$.

● **Ví dụ 1.14** Tung một con súc sắc. Gọi A_i là biến cố "Xuất hiện mặt i chấm" ($i = \overline{1, 6}$), B là biến cố "Xuất hiện ít nhất 5 chấm". Biến cố B sẽ xảy ra khi A_5 xảy ra hoặc A_6 xảy ra. Vậy $B = A_5 + A_6$.

★ **Định nghĩa 1.8** Biến cố A được gọi là tổng của n biến cố $A_1, A_2, \dots, A_n$, ký hiệu $\sum_{i=1}^n A_i$, nếu A sẽ xảy ra khi có ít nhất một trong n biến cố ấy xảy ra.

1.3.2. Tích các biến cố

★ **Định nghĩa 1.9** Biến cố C được gọi là tích của hai biến cố A và B, ký hiệu $C = A.B$, nếu C sẽ xảy ra khi và chỉ khi cả hai biến cố A và B cùng xảy ra.

● **Ví dụ 1.15** Hai người cùng bắn vào một bia. Gọi A là biến cố "Người thứ nhất bắn trúng", B là biến cố "Người thứ hai bắn trúng", C là biến cố "Cả hai người cùng bắn trúng". Vậy $C = A.B$.

● **Ví dụ 1.16** Một mạch điện gồm hai bóng đèn mắc song song.

Gọi A là biến cố "Bóng thứ nhất bị cháy khi điện quá tải", B là biến cố "Bóng thứ hai bị cháy khi điện quá tải", C là biến cố "Mạch điện bị ngắt khi điện quá tải". Rõ ràng biến cố C chỉ xảy ra khi cả hai biến cố A và B cùng đồng thời xảy ra. Vậy $C = A.B$.

★ **Định nghĩa 1.10** Biến cố A được gọi là tích của n biến cố $A_1, A_2, \dots, A_n$, ký hiệu $\prod_{i=1}^n A_i$, nếu A sẽ xảy ra khi và chỉ khi cả n biến cố nói trên xảy ra.

1.3.3. Biến cố xung khắc

★ **Định nghĩa 1.11** Hai biến cố A và B được gọi là xung khắc với nhau nếu chúng không thể đồng thời xảy ra trong một phép thử. Trường hợp ngược lại, nếu hai biến cố đó có thể cùng xảy ra trong một phép thử thì được gọi là không xung khắc.

● **Ví dụ 1.17** Hai người cùng bắn vào một bia. Gọi A là biến cố "Người thứ nhất bắn trúng", B là biến cố "Người thứ hai bắn trúng". Hai biến cố A và B là không xung khắc

● **Ví dụ 1.18** Một bình có 3 loại cầu là cầu trắng, cầu xanh và cầu đỏ. Lấy ngẫu nhiên từ bình đó một quả cầu. Gọi A là biến cố "Lấy được cầu trắng", B là biến cố "Lấy được cầu xanh". Các biến cố A và B là xung khắc với nhau.

★ **Định nghĩa 1.12** Nhóm n biến cố $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ được gọi là xung khắc từng đôi nếu bất kỳ hai biến cố nào trong nhóm này cũng xung khắc với nhau.

Chú ý rằng việc nhận xét tính xung khắc của các biến cố chủ yếu dựa vào trực giác.

● **Ví dụ 1.19** Tung một con súc sắc. Gọi A_i là biến cố "Xuất hiện mặt i chấm" ($i = \overline{1,6}$). Các biến cố $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ là xung khắc từng đôi.

1.3.4. Nhóm đầy đủ các biến cố

★ **Định nghĩa 1.13** Các biến cố $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ được gọi là nhóm biến cố đầy đủ nếu trong kết quả của phép thử sẽ xảy ra một và chỉ một trong các biến cố đó. Nói cách khác, các biến cố $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ sẽ tạo nên một nhóm đầy đủ nếu chúng xung khắc từng đôi với nhau và tổng của chúng là một biến cố chắc chắn.

● **Ví dụ 1.20** Tung một con súc sắc.

Gọi A_i là biến cố "Xuất hiện mặt i chấm" ($i = \overline{1,6}$). Các biến cố $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ tạo nên nhóm đầy đủ các biến cố.

1.3.5. Biến cố đối lập

★ **Định nghĩa 1.14** Hai biến cố A và B được gọi là đối lập với nhau nếu chúng tạo nên một nhóm đầy đủ các biến cố. Ký hiệu biến cố đối lập của biến cố A là $\overline{A}$.

● **Ví dụ 1.21** Bắn một phát đạn vào bia.

Gọi A là biến cố "Bắn trúng bia", B là biến cố "Bắn trượt bia". Các biến cố A và B là hai biến cố đối lập nhau: $A = \overline{B}; B = \overline{A}$.

● **Ví dụ 1.22** Một hòm có a chính phẩm và b phế phẩm, lấy ngẫu nhiên n sản phẩm ($n \leq a + b$). Gọi A là biến cố "Lấy được ít nhất một chính phẩm". Khi đó biến cố đối lập của A là biến cố $\overline{A}$: "Trong n sản phẩm lấy ra không có chính phẩm nào (toàn phế phẩm)".

● **Ví dụ 1.23** Một xí nghiệp có 3 ô tô cùng hoạt động.

Gọi biến cố A_i là "ô tô thứ i bị hỏng", ($i = 1, 2, 3$). Hãy biểu diễn các biến cố sau theo biến cố A_1, A_2, A_3 .

A = "Chỉ ô tô thứ nhất hỏng"

B = "Có đúng 1 ô tô hỏng"

C = "Có đúng 2 ô tô hỏng"

D = "Có ô tô hỏng"

Lời giải.

$$A = A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$$

$$B = A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3$$

$$C = A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3 + A_2 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3$$

$$D = A_1 + A_2 + A_3.$$

1.4. Định lý cộng và nhân xác suất

1.4.1. Định lý cộng xác suất (trường hợp các biến cố xung khắc)

◇ **Định lý 1.1** *Xác suất của tổng hai biến cố xung khắc bằng tổng xác suất của các biến cố đó. Như vậy, nếu A và B là hai biến cố xung khắc với nhau thì:*

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

■ Ta ký hiệu:

n - số kết cục đồng khả năng có thể xảy ra khi phép thử được thực hiện.

m_1 - số kết cục thuận lợi cho biến cố A .

m_2 - số kết cục thuận lợi cho biến cố B .

Do A và B xung khắc nhau do đó không thể có kết cục thuận lợi cho cả A và B đồng thời xảy ra. Vậy số kết cục thuận lợi cho A hoặc B xảy ra bằng $m_1 + m_2$.

Vì vậy:

$$P(A + B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A) + P(B).$$

□

▽ **Hệ quả 1.1** *Xác suất của tổng các biến cố xung khắc từng đôi bằng tổng xác suất của các biến cố đó.*

Tức là nếu $A_1, A_2, \dots, A_n$ là các biến cố xung khắc từng đôi thì:

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

▽ **Hệ quả 1.2** Nếu các biến cố $A_1, A_2, \dots, A_n$ tạo nên một nhóm đầy đủ các biến cố thì tổng các xác suất của chúng bằng 1.

$$\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1.$$

▽ **Hệ quả 1.3** Tổng xác suất của các biến cố đối lập nhau bằng 1.

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

● **Ví dụ 1.24** Xác suất để một xạ thủ bắn bia trúng điểm 10 là 0,1; trúng điểm 9 là 0,2; trúng điểm 8 là 0,25 và ít hơn 8 điểm là 0,45. Xạ thủ ấy bắn một phát đạn. Tìm xác suất để xạ thủ được ít nhất 9 điểm.

Lời giải. Gọi A là biến cố "Xạ thủ bắn trúng điểm 10", B là biến cố "Xạ thủ bắn trúng điểm 9", C là biến cố "Xạ thủ được ít nhất 9 điểm". Vậy:

$$C = A + B$$

Vì A và B xung khắc nhau do đó theo định lý cộng xác suất ta có:

$$P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B) = 0,1 + 0,2 = 0,3.$$

● **Ví dụ 1.25** Xác suất để sản phẩm sản xuất ra là chính phẩm bằng 0,9. Tìm xác suất sản phẩm sản xuất ra là phế phẩm.

Lời giải. Gọi A là biến cố "Sản phẩm sản xuất ra là phế phẩm", khi đó $\overline{A}$ là biến cố "Sản phẩm sản xuất ra là chính phẩm", A và $\overline{A}$ đối lập nhau, do đó:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0,9 = 0,1.$$

● **Ví dụ 1.26** Trong hòm có 12 chi tiết, trong đó có 5 chi tiết hỏng. Lấy ngẫu nhiên 4 chi tiết. Tính xác suất trong số 4 chi tiết lấy ra:

- có không quá một chi tiết hỏng;
- có chi tiết hỏng.

Lời giải.

Gọi A_i là biến cố "Trong 4 chi tiết lấy ra có đúng i chi tiết hỏng", $i = \overline{0}, 4$.

a) Gọi A là biến cố "Trong 4 chi tiết lấy ra có không quá một chi tiết hỏng", vậy:

$$A = A_0 + A_1$$

Vì A_0 và A_1 xung khắc với nhau do đó:

$$P(A) = P(A_0) + P(A_1)$$

Dùng định nghĩa cổ điển về xác suất ta tính được:

$$P(A_0) = \frac{C_7^4}{C_{12}^4} = \frac{7}{99}, \quad P(A_1) = \frac{C_5^1 \cdot C_7^3}{C_{12}^4} = \frac{35}{99}$$

Vậy:

$$P(A) = \frac{7}{99} + \frac{35}{99} = \frac{14}{33}.$$

b) Gọi B là biến cố "Trong 4 chi tiết lấy ra có chi tiết hỏng", khi đó biến cố đối lập của B là "Trong 4 chi tiết lấy ra không có chi tiết hỏng" = A_0 . Vậy:

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - P(A_0) = 1 - \frac{7}{99} = \frac{92}{99}.$$

1.4.2. Định lý nhân xác suất

a) Biến cố độc lập

★ **Định nghĩa 1.15** Hai biến cố A và B gọi là độc lập với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra biến cố này không làm thay đổi xác suất xảy ra của biến cố kia và ngược lại.

Trong trường hợp việc biến cố này xảy ra hay không xảy ra làm cho xác suất xảy ra của biến cố kia thay đổi thì hai biến cố đó gọi là phụ thuộc nhau.

● **Ví dụ 1.27** Trong bình có 3 cầu trắng và 2 cầu đen. Lấy ngẫu nhiên 2 quả cầu theo theo phương thức có hoàn lại. Gọi A là biến cố "Lần thứ nhất lấy được cầu trắng", B là biến cố "Lần hai lấy được cầu trắng". Khi đó:

$$P(A) = \frac{3}{5}; \quad P(B) = \frac{3}{5}$$

Ta thấy xác suất lấy được cầu trắng lần thứ hai (biến cố B) không phụ thuộc gì vào kết quả lấy của lần trước (biến cố A), và tương tự, xác suất lấy được cầu trắng lần thứ nhất (biến cố A) không phụ thuộc gì vào kết quả lấy của lần thứ hai (biến cố B). Vậy hai biến cố A và B độc lập với nhau.

● **Ví dụ 1.28** Trong bình có 3 cầu trắng và 2 cầu đen. Lấy ngẫu nhiên 2 quả cầu theo theo phương thức không hoàn lại. Gọi A là biến cố "Lần thứ nhất lấy được cầu trắng", B là biến cố "Lần hai lấy được cầu trắng". Khi đó xác suất lấy được cầu trắng lần thứ nhất là:

$$P(A) = \frac{3}{5}$$

Tuy nhiên xác suất lấy được cầu trắng lần thứ hai sẽ phụ thuộc vào kết quả lấy của lần trước:

+ Nếu lần thứ nhất lấy được cầu trắng (A xảy ra) thì: $P(B) = \frac{2}{4}$;

+ Nếu lần thứ nhất lấy được cầu đen (A không xảy ra) thì: $P(B) = \frac{3}{4}$;

Vậy A và B phụ thuộc nhau.

Trong thực tế việc nhận xét tính độc lập hay phụ thuộc của các biến cố chủ yếu dựa vào trực giác. Ta cũng nhận thấy rằng tính độc lập của các biến cố có tính tương hỗ. Nếu A và B độc lập với nhau thì A và $\bar{B}$, $\bar{A}$ và B, $\bar{A}$ và $\bar{B}$ cũng độc lập với nhau.

★ **Định nghĩa 1.16** Các biến cố $A_1, A_2, \dots, A_n$ gọi là độc lập từng đôi với nhau nếu mỗi cặp hai trong n biến cố đó độc lập với nhau. Chẳng hạn ba biến cố A, B, C độc lập từng đôi với nhau nếu A độc lập với B, A độc lập với C, B độc lập với C.

● **Ví dụ 1.29** Tung một đồng xu ba lần, gọi A_i là biến cố "Được mặt sấp ở lần tung thứ $i, i = 1, 2, 3$. Rõ ràng là mỗi cặp hai trong ba biến cố đó độc lập với nhau.

Vậy A_1, A_2, A_3 độc lập từng đôi với nhau.

★ **Định nghĩa 1.17** Các biến cố $A_1, A_2, \dots, A_n$ gọi là độc lập toàn phần với nhau nếu mỗi biến cố độc lập với một tổ hợp bất kỳ của các biến cố còn lại.

Chẳng hạn ba biến cố A, B, C độc lập toàn phần với nhau nếu A độc lập với B, A độc lập với C, A độc lập với tích BC, B độc lập với C, B độc lập với tích AC, C độc lập với tích AB.

Chú ý rằng nếu các biến cố độc lập toàn phần thì suy ra chúng độc lập từng đôi, nhưng điều ngược lại không đúng, nghĩa là nếu các biến cố độc lập từng đôi thì chúng chưa chắc độc lập toàn phần. Ta cũng quy ước rằng khi nói n biến cố độc lập thì có nghĩa là chúng độc lập toàn phần.

● **Ví dụ 1.30** Giả sử trong bình có 4 quả cầu, 1 quả sơn màu đỏ, 1 quả sơn màu xanh, 1 quả màu vàng, 1 quả sơn cả màu đỏ, xanh, vàng.

Lời giải.

Gọi A = "Lấy ngẫu nhiên 1 quả cầu từ bình được quả có màu đỏ";

B = "Lấy ngẫu nhiên 1 quả cầu từ bình được quả có màu xanh";

C = "Lấy ngẫu nhiên 1 quả cầu từ bình được quả có màu vàng";

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}.$$

Nếu biến cố A xảy ra, tức là đã lấy được quả có màu đỏ, thì vì trong 2 quả màu đỏ có 1 quả có màu sơn xanh nên xác suất của biến cố B vẫn là $P(B) = \frac{1}{2}$. Còn nếu A không xảy ra, thì trong 2 quả không có màu đỏ cũng chỉ có 1 quả màu sơn xanh nên $P(B) = \frac{1}{2}$. Vậy các biến cố A và B độc lập với nhau.

Tương tự có thể chứng tỏ A và C, B và C độc lập. Vậy ba biến cố A, B, C độc lập từng đôi.

Nếu biến cố A và B đã xảy ra, tức là quả cầu lấy ra có hai màu đỏ và xanh. Khi đó nó chỉ có thể là quả cầu có cả ba màu, vì vậy xác suất để lấy được quả cầu màu vàng là $P(C) = 1$. Nếu AB không xảy ra thì quả cầu lấy ra không phải quả có ba màu, vì vậy xác suất để lấy được quả vàng là $P(C) = \frac{1}{3}$. Vậy biến cố C không độc lập với AB. Do đó các biến cố A, B, C chỉ độc lập từng đôi chứ không độc lập toàn phần.

b) Xác suất điều kiện

★ **Định nghĩa 1.18** Xác suất của biến cố B được tính với điều kiện biến cố A đã xảy ra được gọi là xác suất có điều kiện của B và được ký hiệu là $P(B/A)$.

● **Ví dụ 1.31** Trong bình có 3 cầu trắng và 2 cầu đen. Lấy ngẫu nhiên 2 quả cầu theo theo phương thức có hoàn lại. Gọi A là biến cố "Lần thứ nhất lấy được cầu trắng", B là biến cố "Lần hai lấy được cầu trắng". Ta đã biết ở 1.27 là A và B độc lập. Ta có:

$$P(B/A) = \frac{3}{5}; \quad P(B/\bar{A}) = \frac{3}{5}.$$

● **Ví dụ 1.32** Trong bình có 3 cầu trắng và 2 cầu đen. Lấy ngẫu nhiên 2 quả cầu theo theo phương thức không hoàn lại. Gọi A là biến cố "Lần thứ nhất lấy được cầu trắng", B là biến cố "Lần hai lấy được cầu trắng". Ta đã biết ở 1.28 là A và B phụ thuộc. Ta có:

$$P(B/A) = \frac{2}{4}; \quad P(B/\bar{A}) = \frac{3}{4}.$$

Để có một nhận xét rằng nếu A và B độc lập thì:

$$P(A/B) = P(A/\bar{B}) = P(A); \quad (B/A) = P(B/\bar{A}) = P(B).$$

c) Định lý nhân xác suất.

◇ **Định lý 1.2** Xác suất của tích hai biến cố A và B bằng tích xác suất của một trong hai biến cố đó với xác suất điều kiện của biến cố còn lại:

$$P(AB) = P(A).P(B/A) = P(B).P(A/B).$$

■ Ta ký hiệu:

n - số kết cục đồng khả năng có thể xảy ra khi phép thử được thực hiện.

m_1 - số kết cục thuận lợi cho biến cố A.

m_2 - số kết cục thuận lợi cho biến cố B.

k - số kết cục thuận lợi cho cả A và B đồng thời xảy ra.

Lúc đó:

$$P(AB) = \frac{k}{n}; \quad P(A) = \frac{m_1}{n}; \quad P(B) = \frac{m_2}{n}.$$

Với điều kiện biến cố A đã xảy ra thì số kết cục duy nhất đồng khả năng của phép thử đối với biến cố B là m_1 , trong đó có k kết cục thuận lợi cho biến cố B xảy ra, do đó:

$$P(B/A) = \frac{k}{m_1}.$$

Như vậy: $P(AB) = \frac{k}{n} = \frac{m_1}{n} \cdot \frac{k}{m_1} = P(A) \cdot P(B/A).$

Tương tự khi tính xác suất điều kiện đối với biến cố A, từ đó suy ra điều phải chứng minh.

□

▽ **Hệ quả 1.4** Xác suất của tích n biến cố bằng tích xác suất của n biến cố đó, trong đó xác suất của mỗi biến cố tiếp theo đều được tính với điều kiện tất cả các biến cố trước đó đã xảy ra:

$$P(A_1.A_2...A_n) = P(A_1).P(A_2/A_1)...P(A_n/A_1...A_{n-1}).$$

▽ **Hệ quả 1.5** Nếu A và B độc lập thì $P(AB) = P(A).P(B).$

▽ **Hệ quả 1.6** Xác suất của tích n biến cố độc lập toàn phần bằng tích các xác suất thành phần:

$$P(A_1.A_2...A_n) = P(A_1).P(A_2)...P(A_n).$$

d) Các ví dụ

● **Ví dụ 1.33** Trong bình có 3 cầu trắng và 2 cầu đen. Lấy ngẫu nhiên 2 quả cầu theo theo phương thức không hoàn lại. Gọi A là biến cố "Lần thứ nhất lấy được cầu trắng", B là biến cố "Lần hai lấy được cầu trắng". Ta đã biết ở 1.32 là A và B phụ thuộc và

$$P(A) = \frac{3}{5}; \quad P(B/A) = \frac{2}{4}P(B/\bar{A}) = \frac{3}{4}.$$

Khi đó xác suất để cả hai lần đều lấy được cầu trắng là:

$$P(AB) = P(A).P(B/A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}.$$

● **Ví dụ 1.34** Một xí nghiệp có 3 ô tô hoạt động độc lập. Xác suất để trong một ngày các ô tô bị hỏng tương ứng là 0,1; 0,2; 0,15.

- Tính xác suất để cả 3 ô tô đều hỏng.
- Tính xác suất để trong một ngày có đúng 1 ô tô hỏng.
- Tính xác suất để trong một ngày có ít nhất một ô tô hỏng.

Lời giải. Gọi A_i là biến cố "ô tô thứ i bị hỏng trong ngày"; ($i = \overline{1,3}$).

Theo giả thiết: $P(A_1) = 0,1; P(A_2) = 0,2; P(A_3) = 0,15.$

Do đó: $P(\bar{A}_1) = 0,9; P(\bar{A}_2) = 0,8; P(\bar{A}_3) = 0,85.$