

LỜI NÓI ĐẦU

Ngày nay, những tư tưởng, phương pháp và kết quả của toán học đã thâm nhập vào hầu hết các lĩnh vực của đời sống, như lĩnh vực của cơ học, vật lý lý thuyết, hóa học lượng tử,... Toán cao cấp từ lâu đã nằm trong chương trình bắt buộc của các trường Đại học kỹ thuật, đóng vai trò then chốt trong việc rèn luyện tư duy khoa học, cung cấp công cụ toán học để sinh viên học các môn khác.

Cuốn sách Toán cao cấp này được chúng tôi biên soạn nhằm mục đích cung cấp tài liệu học tập cho sinh viên Cao đẳng nghề của khoa Cơ khí. Giáo trình bao gồm những kiến thức cơ bản của môn toán cao cấp, là cơ sở cho sinh viên học tập các môn chuyên ngành.

Giáo trình gồm 3 chương:

Chương 1: Ma trận – Định thức và hệ phương trình tuyến tính. Chương này trình bày kiến thức cơ bản về ma trận, định thức, hệ phương trình tuyến tính, các phép toán về ma trận và một số phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính.

Chương 2: Phép tính vi phân và tích phân. Chương này trình bày những vấn đề quan trọng của đạo hàm, tích phân hàm một biến. Nội dung chính của chương là các phương pháp tính đạo hàm và tích phân. Đặc biệt, trong chương hai chúng tôi có phần lý thuyết tính gần đúng và ứng dụng tích phân để tính diện tích, thể tích các vật thể, phần này sử dụng nhiều cho lĩnh vực cơ học.

Chương 3: Phương trình vi phân. Chương này trình bày một cách có hệ thống về phương trình vi phân: khái niệm phương trình vi phân, cách giải một số dạng phương trình vi phân cấp một và cấp hai.

Do giáo trình được giảng dạy cho sinh viên Cao đẳng nghề không phải chuyên ngành toán, nên chúng tôi không đi sâu vào việc chứng minh những lý thuyết toán học phức tạp. Thay vào đó chúng tôi đưa ra nhiều ví dụ minh họa

với các bước làm cụ thể và chi tiết. Cuối mỗi chương đều có một lượng lớn bài tập để rèn luyện, ngoài ra chúng tôi còn có mục đáp số và hướng dẫn giải.

Mặc dù, đã có nhiều cố gắng trong biên soạn nhưng Giáo trình không thể tránh khỏi những thiếu sót, chúng tôi rất mong nhận được những ý kiến đóng góp của các đồng nghiệp và độc giả xa gần.

CÁC TÁC GIẢ

TaiLieu.vn

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU	i
Chương 1. MA TRẬN - ĐỊNH THỨC VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH.....	1
1.1. MA TRẬN	1
1.1.1. Định nghĩa	1
1.1.2. Các phép toán về ma trận	4
1.2. ĐỊNH THỨC	12
1.2.1. Định nghĩa	12
1.2.2. Các tính chất.....	15
1.2.3. Cách tính định thức bằng phép biến đổi sơ cấp	18
1.3. HẠNG CỦA MA TRẬN	21
1.3.1. Định nghĩa	21
1.3.2. Cách tính hạng của ma trận bằng phép biến đổi sơ cấp về hàng	22
1.4. MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO.....	24
1.4.1. Định nghĩa	24
1.4.2. Định lý.....	26
1.4.3. Cách tìm ma trận nghịch đảo bằng phép biến đổi sơ cấp	29
1.5. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH.....	30
1.5.1. Dạng tổng quát của hệ phương trình tuyến tính.....	30
1.5.2. Hệ Cramer	31
1.5.3. Phương pháp khử Gauss	34
1.5.4. Hệ thuần nhất	36
1.5.5. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát.....	37
BÀI TẬP CHƯƠNG 1	40
HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ CHƯƠNG 1	46
Chương 2. PHÉP TÍNH VI PHÂN VÀ TÍCH PHÂN.....	60
2.1. ĐẠO HÀM	60
2.1.1. Định nghĩa đạo hàm:	60
2.1.2. Các công thức về tính đạo hàm.	61
2.1.3. Đạo hàm cấp cao	67
2.2. VI PHÂN	68
2.2.1. Định nghĩa	68
2.2.2. Các công thức tính vi phân.....	69
2.2.3. Vi phân cấp cao.....	71
2.3. CÁC ĐỊNH LÝ VỀ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH	72

2.3.1. Định lý Lagrange (Lagorăng)	72
2.3.2. Định lý Cauchy (côsi)	72
2.3.3. Công thức Taylor	72
2.3.4. Công thức L'Hospital	74
2.4. TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH	77
2.4.1. Định nghĩa.....	77
2.4.2. Bảng tích phân cơ bản.....	78
2.4.3. Các phương pháp tính tích phân bất định	78
3.1.4. Tích phân các hàm số hữu tỷ	83
2.5. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH.....	86
2.5.1. Khái niệm về tích phân xác định	86
2.5.2. Các tính chất của tích phân xác định	87
2.5.3. Công thức Newton-Leibnitz	88
2.5.4. Các phương pháp tính tích phân xác định	88
BÀI TẬP CHƯƠNG 2	99
HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ BÀI TẬP CHƯƠNG 2	102
Chương 3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN.....	115
3.1. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT	115
3.1.1. Một số khái niệm mở đầu.	115
3.1.2. Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm.....	116
3.2. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT	116
3.2.1. Phương trình với biến số phân ly.....	116
3.2.2. Phương trình đẳng cấp cấp một	117
3.2.3. Phương trình tuyến tính	120
3.2.4. Phương trình Bernoulli	126
3.3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI.....	128
3.3.1. Một số khái niệm mở đầu	128
3.3.2. Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm.....	128
3.3.3. Phương trình vi phân cấp hai có thể giảm cấp được.....	129
3.3.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất.....	132
3.3.5. Phương trình vi phân cấp 2 tuyến tính không thuần nhất.	138
3.3.6. Phương trình vi phân cấp 2 với hệ số là hằng số	141
BÀI TẬP CHƯƠNG 3	152
HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ BÀI TẬP CHƯƠNG 3	156
TÀI LIỆU THAM KHẢO.....	171

Chương 1

MA TRẬN - ĐỊNH THỨC VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1.1. MA TRẬN

Khi ta có $m \times n$ số, ta có thể xếp thành một bảng số hình chữ nhật chứa m hàng, n cột. Một bảng số như thế gọi là một *ma trận*.

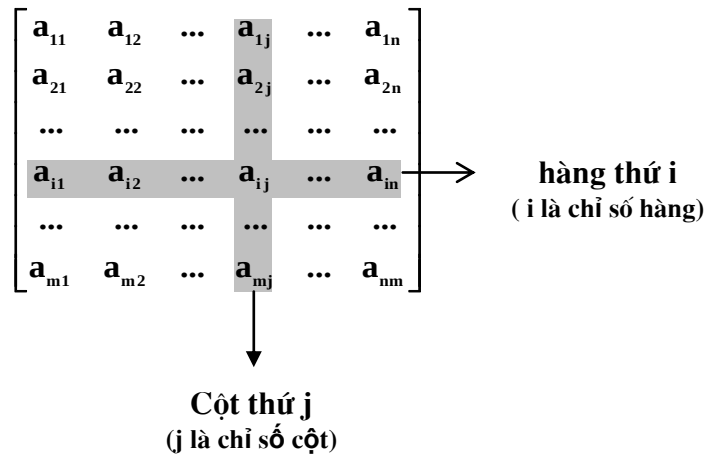
1.1.1. Định nghĩa

Một bảng số chữ nhật có m hàng, n cột

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{hay} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

gọi là một *ma trận cỡ $m \times n$* , và ký hiệu là: $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ hay $A = (a_{ij})_{m \times n}$

trong đó: a_{ij} là phần tử của ma trận A nằm ở giao điểm của hàng i và cột j .



Ví dụ 1: Bảng số $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

là một ma trận cỡ 2×3 với các phần tử

$$\begin{array}{lll} a_{11} = 1 & a_{12} = -4 & a_{13} = 6 \\ a_{21} = 2 & a_{22} = 5 & a_{23} = 0 \end{array}$$

Ví dụ 2: Bảng số $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

là một ma trận cỡ 3×1 với các phần tử

$$a_{11} = 1 \qquad a_{21} = 2 \qquad a_{31} = 4$$

Ví dụ 3: Bảng số $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

là ma trận cỡ 1×4 với các phần tử

$$a_{11} = 2, \quad a_{12} = -3, \quad a_{13} = 4, \quad a_{14} = 9$$

Ví dụ 4: Cho bảng số $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

Bảng số trên là ma trận cỡ 3×2 với các phần tử là

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = 5, \quad a_{21} = 6, \quad a_{22} = -2, \quad a_{31} = 7, \quad a_{32} = 8$$

Ví dụ 5: Cho bảng số $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & -4 & 8 \end{bmatrix}$

Bảng số trên là ma trận cỡ 3×3 với các phần tử

$$\begin{array}{lll} a_{31} = 2 & a_{23} = 0 & a_{21} = 0 \\ a_{11} = 1 & a_{33} = 8 & a_{13} = 7 \\ a_{12} = 5 & a_{22} = 6 & a_{32} = -4 \end{array}$$

Khi $m = n$ thì ta gọi ma trận A là **ma trận vuông cấp n** (gọi tắt là ma trận cấp n)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{số hàng} = \text{số cột})$$

$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ được gọi là các **phần tử chéo**.

Đường thẳng đi qua các phần tử chéo được gọi là **đường chéo chính**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Đường chéo chính}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Đường chéo phụ}$$

Ví dụ 6: Ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & -4 & 8 \end{bmatrix}$ là một ma trận vuông cấp 3.

Đường chéo chính là đường thẳng nối các phần tử 1, 6, 8.

Đường chéo phụ là đường thẳng nối các phần tử 2, 6, 7.

Ma trận tam giác trên: là ma trận vuông cấp n mà tất cả các phần tử nằm ở dưới đường chéo chính đều bằng 0, tức là $a_{ij} = 0$ nếu $i > j$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ví dụ 7: Ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ là một ma trận tam giác trên.

Ma trận tam giác dưới: là ma trận vuông cấp n mà tất cả các phần tử nằm ở trên đường chéo chính đều bằng 0, tức là $a_{ij} = 0$ nếu $i < j$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ví dụ 8: Ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & -7 & 4 \end{bmatrix}$ là một ma trận tam giác dưới.

Ma trận chéo: là ma trận vuông cấp n mà tất cả các phần tử nằm ngoài đường chéo đều bằng 0, tức là $a_{ij} = 0$ nếu $i \neq j$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{hay} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & & \\ & & a_{33} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ví dụ 9: Ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ là một ma trận chéo.

Ma trận đơn vị: là ma trận chéo mà tất cả các phần tử nằm trên đường chéo chính đều bằng 1 và ký hiệu là I .

Ví dụ 10: 1) $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ là ma trận đơn vị cấp 2.

2) $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ là ma trận đơn vị cấp 3.

Ma trận không: là ma trận mà tất cả các phần tử của nó đều bằng không. Ma trận không ký hiệu là O .

Ví dụ 11: 1) $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ là ma trận không cỡ 2×3

2) $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ là ma trận không cấp 2.

Hai ma trận bằng nhau:

Hai ma trận A và B được gọi là bằng nhau, ký hiệu $A = B$, nếu chúng **cùng cỡ** và các phần tử có cùng vị trí bằng nhau, tức là:

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A = [a_{ij}]_{m \times n}, & B = [b_{ij}]_{m \times n} \\ a_{ij} = b_{ij}, & \forall i, j \end{cases}$$

Ví dụ 12: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ có nghĩa là $a = 1, b = 2, c = 3, d = 5$.

1.1.2. Các phép toán về ma trận

a) Phép cộng hai ma trận cùng cỡ:

Định nghĩa: Cho 2 ma trận cùng cỡ $m \times n$: $A = [a_{ij}]_{m \times n}$; $B = [b_{ij}]_{m \times n}$. Tổng $A + B$ là một ma trận C cỡ $m \times n$ mà phần tử $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Ta viết $C = A + B$

$$A + B = [a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

Ví dụ 13: Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Khi đó: $A + B = \begin{bmatrix} 1-2 & 4+3 \\ 3+1 & 2+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

Ví dụ 14: Cho $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 \\ -1 & 4 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 4 & -5 & -2 \\ 3 & 1 & -6 \end{bmatrix}$

Ta có $A + B = \begin{bmatrix} 2-5 & -5+2 & 4+4 \\ -1+4 & 4-5 & -3-2 \\ 3+3 & 1+1 & 2-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 8 \\ 3 & -1 & -5 \\ 6 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

Chú ý: Điều kiện để 2 ma trận cộng được với nhau là 2 ma trận cùng cỡ .

Ví dụ 15: Cho 2 ma trận: $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$.

Hai ma trận A và B không cộng với nhau được vì A và B không cùng cỡ, ma trận A cỡ 2×2 , ma trận B cỡ 2×3 .

Tính chất:

- $A + B = B + A$ (tính giao hoán)
- $A + O = O + A = A$ (O là ma trận không)
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ (tính kết hợp)
- Ma trận $-A = [-a_{ij}]_{m \times n}$ được gọi là ma trận đối của ma trận A.

Khi đó: $A + (-A) = (-A) + A = O$

b) Phép nhân ma trận với một số:

Định nghĩa: Cho ma trận $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ và số thực k.

Ta nói: Tích của số thực k với ma trận A hay tích của ma trận A với số thực k là một ma trận cỡ $m \times n$, ký hiệu là $k.A$ hay $A.k$ và được xác định như sau:

$$k.A = A.k = [k.a_{ij}]_{m \times n}$$

Ví dụ 16: Tính

a) $2. \begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

b) $(-3). \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 4 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$

$$c) \quad \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Giải.

$$a) \quad 2. \begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.7 & 2.0 & 2.1 \\ 2.2 & 2.5 & 2.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 0 & 2 \\ 4 & 10 & 8 \end{bmatrix}$$

$$b) \quad (-3). \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 4 \\ 7 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-3).2 & (-3).3 \\ (-3).(-6) & (-3).4 \\ (-3).7 & (-3).(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -9 \\ 18 & -12 \\ -21 & 3 \end{bmatrix}$$

$$c) \quad \frac{1}{2}. \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}.1 & \frac{1}{2}.4 & \frac{1}{2}.(-1) \\ \frac{1}{2}.3 & \frac{1}{2}.2 & \frac{1}{2}.2 \\ \frac{1}{2}.2 & \frac{1}{2}.3 & \frac{1}{2}.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Tính chất: Cho 2 ma trận A, B cùng cấp và 2 số thực k, h $\in \mathbb{R}$

$$1) \quad k.(A + B) = k.A + k.B$$

$$2) \quad (k + h).A = k.A + h.A$$

$$3) \quad k.(h.A) = (k.h).A$$

$$4) \quad 1.A = A$$

$$5) \quad 0.A = O$$

Ví dụ 17: Cho 3 ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad ; \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Hãy thực hiện các phép tính sau:

$$a) \quad (A - B) + C$$

$$b) \quad 2A - (B + C)$$

$$c) \quad A + B - C$$

$$d) \quad 3A - 2B + 4C$$

Giải.

$$a) \quad A - B + C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1-1 & 2-2 \\ 2+2 & -3-1 \\ 1+1 & 2-3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2-2 & 0+1 \\ 4+2 & -4-1 \\ 2+3 & -1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 6 & -5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } 2A - (B + C) = 2 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } A + B - C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1+1+2 & 2+2-1 \\ 2-2-2 & -3+1+1 \\ 1-1-3 & 2+3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{d) } 3A - 2B + 4C = 3 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + 4 \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 6 & -9 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 4 & -2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 8 & -4 \\ 12 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3-2-8 & 6-4+4 \\ 6+4+8 & -9-2-4 \\ 3+2+12 & 6-6+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 6 \\ 18 & -15 \\ 17 & 8 \end{bmatrix}$$

c) Phép nhân ma trận với ma trận:

Định nghĩa: Xét 2 ma trận: $A = [a_{ij}]_{m \times p}$ và $B = [b_{ij}]_{p \times n}$, trong đó số cột của ma trận A bằng số hàng của ma trận B và đều bằng p.

Ta nói: Tích của ma trận A.B là ma trận $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ có m hàng n cột mà phần tử c_{ij} được tính bởi công thức:

$$c_{ij} = a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + \dots + a_{ip}.b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik}.b_{kj}$$

(c_{ij} bằng hàng i của ma trận A nhân với cột j của ma trận B)

$$c_{ij} = [a_{i1} \ a_{i2} \ a_{i3} \ \dots \ a_{ip}] \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{bmatrix} = a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + \dots + a_{ip}.b_{pj}$$

Như vậy điều kiện để ma trận A nhân được với ma trận B là số cột của ma trận A bằng số hàng của ma trận B.

Ví dụ 18: Cho 2 ma trận: $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

Ma trận A nhân được với ma trận B vì ma trận A có 2 cột bằng số hàng của ma trận B. Tuy nhiên tích B.A không thực hiện được vì số cột của ma trận B là 4 khác với số hàng của ma trận A.

Ví dụ 19: Cho 2 ma trận: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 7 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 10 & 8 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

Kích thước của ma trận $C = A.B$ là 2×3 .

Ta có $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$ trong đó:

$$c_{11} = \text{hàng 1 x cột 1} = [1 \ 2 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} = 1.1 + 2.10 + 0.0 = 21$$

$$c_{12} = \text{hàng 1 x cột 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} = 1.3 + 2.8 + 0.2 = 19$$

$$c_{13} = \text{hàng 1 x cột 3} = 1.5 + 2.6 + 0.4 = 17$$

$$c_{21} = \text{hàng 2 x cột 1} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} = 3.1 + (-4).10 + 7.0 = -37$$

$$c_{22} = \text{hàng 2 x cột 2} = 3.3 + (-4).8 + 7.2 = -9$$

$$c_{23} = \text{hàng 2 x cột 3} = 3.5 + (-4).6 + 7.4 = 19$$

$$\text{Vậy } C = \begin{bmatrix} 21 & 19 & 17 \\ -37 & -9 & 19 \end{bmatrix}$$

Ví dụ 20: Cho $C = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 4 & 5 & 7 \\ 8 & -9 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 6 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$

Cỡ của ma trận C là 3 x 2. Trong đó các phần tử được tính như sau :

$$c_{11} = \text{hàng 1 x cột 1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = 2.(-3) + (-3).2 + 6.5 = 18$$

$$c_{12} = \text{hàng 1 x cột 2} = 2.2 + (-3).6 + 6.(-3) = -32$$

$$c_{21} = \text{hàng 2 x cột 1} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = 4.(-3) + 5.2 + 7.5 = 33$$

$$c_{22} = \text{hàng 2 x cột 2} = 4.2 + 5.6 + 7.(-3) = 17$$

$$c_{31} = \text{hàng 3 x cột 1} = \begin{bmatrix} 8 & -9 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = 8.(-3) + (-9).2 + 2.5 = -32$$

$$c_{32} = \text{hàng 3 x cột 2} = 8.2 + (-9).6 + 2.(-3) = -44$$

$$\text{Vậy } C = \begin{bmatrix} 18 & -32 \\ 33 & 17 \\ -32 & -44 \end{bmatrix}$$

Ví dụ 21 : Cho 2 ma trận : $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

Ta có

$$A.B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B.A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Qua ví dụ 21 ta nhận thấy rằng phép nhân 2 ma trận không có tính chất giao hoán. Ngay cả trong trường hợp tích $A.B$ và $B.A$ đều thực hiện được thì tích $A.B$ và $B.A$ không bằng nhau.

Ví dụ 22: Cho 2 ma trận: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

$$A.B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Như vậy khi tích $A.B = O$ ta không suy ra được ma trận $A = O$ hoặc $B = O$.

Tính chất:

$$A.(B + C) = A.B + A.C$$

$$(B + C).A = B.A + C.A$$

$$A.(B.C) = (A.B).C$$

$$k.(A.B) = (k.A).B = A.(k.B)$$

d) Ma trận chuyển vị:

Định nghĩa: Xét ma trận $A = [a_{ij}]_{m \times n}$. Từ ma trận A ta đổi hàng thành cột, cột thành hàng ta được một ma trận mới gọi là **ma trận chuyển vị** của ma trận A , ký hiệu là A^t .

Khi đó: $A^t = [a_{ji}]_{n \times m}$

Ví dụ 23: Cho ma trận: $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$. Viết A^t

Từ ma trận A , ta chuyển hàng 1 thành cột 1 trong ma trận A^t , hàng 2 thành cột 2 trong ma trận A^t , hàng 3 thành cột 3 ta được ma trận A^t .

$$\text{Vậy } A^t = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Ví dụ 24: Cho $A =$

$$\begin{bmatrix} -2 & 5 & 4 & 7 & 4 \\ 4 & -1 & 2 & 2 & 8 \\ 3 & 3 & -6 & 6 & 9 \end{bmatrix} A^t =$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -6 \\ 7 & 2 & 6 \\ 4 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

(hàng 1, 2, 3 trong ma trận A lần lượt chuyển thành cột 1, 2, 3 trong ma trận A^t)

Ví dụ 25: Cho 2 ma trận: $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 & 3 \\ -1 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

Hãy tính:

1) $(A.B)^t$

2) $B^t.A^t$

Giải.

$$1) A.B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 & 3 \\ -1 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} = (c_{ij})_{3 \times 4}$$

$$c_{11} = 5.2 + (-2).(-1) = 12$$

$$c_{12} = 5.3 + (-2).4 = 7$$

$$c_{13} = 5.(-5) + (-2).2 = -29$$

$$c_{14} = 5.3 + (-2).4 = 7$$

$$c_{21} = (-1).2 + 3.(-1) = -5$$

$$c_{22} = (-1).3 + 3.4 = 9$$

$$c_{23} = (-1).(-5) + 3.2 = 11$$

$$c_{24} = (-1).3 + 3.4 = 9$$

$$c_{31} = 2.2 + (-4).(-1) = 8$$

$$c_{32} = 2.3 + (-4).4 = -10$$

$$c_{33} = 2.(-5) + (-4).2 = -18$$

$$c_{34} = 2.3 + (-4).4 = -10$$

$$\text{Vậy } AB = \begin{bmatrix} 12 & 7 & -29 & 7 \\ -5 & 9 & 11 & 9 \\ 8 & -10 & -18 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\text{Do đó } (A.B)^t = \begin{bmatrix} 12 & -5 & 8 \\ 7 & 9 & -10 \\ -29 & 11 & -18 \\ 7 & 9 & -10 \end{bmatrix}$$

$$2) \ B^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ -5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} ; \quad A^t = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$B^t.A^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ -5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -5 & 8 \\ 7 & 9 & -10 \\ -29 & 11 & -18 \\ 7 & 9 & -10 \end{bmatrix}$$

Từ ví dụ 25 ta có $(A.B)^t = B^t.A^t$. Ta công nhận định lý sau.

Định lý: Cho 2 ma trận: $A = [a_{ij}]_{m \times p}$ và $B = [b_{ij}]_{p \times n}$. Khi đó $(A.B)^t = B^t.A^t$

1.2. ĐỊNH THỨC

1.2.1. Định nghĩa

a, Định nghĩa 1(định nghĩa về ma trận con).

Xét ma trận vuông cấp n :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Từ ma trận A , bỏ đi hàng i và cột j ta thu được ma trận vuông cấp $n-1$. Ma trận này được gọi là **ma trận con tương ứng với phần tử a_{ij}** và ký hiệu là M_{ij} .

Ví dụ 26: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -4 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Khi đó A có các ma trận con tương ứng sau:

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ (từ ma trận } A \text{ bỏ đi hàng 1 và cột 1) ;}$$

$$M_{12} = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ (từ ma trận } A \text{ bỏ đi hàng 1 và cột 2) ;}$$

$$M_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ (từ ma trận } A \text{ bỏ đi hàng 2 và cột 1) ;}$$

$$M_{13} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} ; \quad M_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} ; \quad M_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M_{31} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} ; \quad M_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} ; \quad M_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ví dụ 27: Cho ma trận } A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 6 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Ta có các ma trận con tương ứng sau:

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} ; \quad M_{12} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} ; \quad M_{13} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} ; \quad M_{14} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 6 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$M_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} ; \quad M_{22} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} ; \quad M_{23} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 6 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} ; \quad M_{24} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 6 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$M_{31} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} ; \quad M_{32} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} ; \quad M_{33} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} ; \quad M_{34} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

b, Định nghĩa 2(định nghĩa về định thức). Định thức của ma trận A , ký hiệu là $\det(A)$ hoặc $|A|$ và được định nghĩa dần dần như sau:

$$A \text{ là ma trận cấp 1: } A = [a_{11}] \quad \Rightarrow \det(A) = |a_{11}| = a_{11}$$

$$A \text{ là ma trận cấp 2: } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ thì } \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$A \text{ là ma trận cấp 3: } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ thì}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \det(M_{11}) - a_{12} \cdot \det(M_{12}) + a_{13} \cdot \det(M_{13})$$

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

.....

.....

A là ma trận vuông cấp n thì:

$$\det(A) = a_{11} \cdot \det(M_{11}) - a_{12} \cdot \det(M_{12}) + a_{13} \cdot \det(M_{13}) - \dots + (-1)^{1+n} \cdot a_{1n} \cdot \det(M_{1n})$$

Chú ý: Định thức cấp 2 bằng tích đường chéo chính trừ đi tích đường chéo phụ.

Ví dụ 28: Tính các định thức sau:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 5 \cdot 3 = -7$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$
 $= (-1) \cdot [0 - (-3)] - 5 \cdot [8 - (-12)] + 2 \cdot [2 - 0]$
 $= -3 - 100 + 4 = -99$

c) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 2 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + (-5) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$
 $= 3 \cdot [0 - (-3)] + 2 \cdot [8 - (-12)] - 5 \cdot [2 - 0]$
 $= 3 \cdot 3 + 2 \cdot 20 - 5 \cdot 2 = 39$

d) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$
 $= 3 \cdot 16 + 2 \cdot (-3) + 4 \cdot (-11) = -2$

e) $\begin{vmatrix} -3 & -5 & 4 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-3) \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - (-5) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$
 $= (-3) \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 25$

f) $\begin{vmatrix} 5 & -2 & -3 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-3) \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

$$= 5.6 + 2.(-5) - 3.(-8) = 44$$

$$g) \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3. \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 4. \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3.8 + 2.1 + 4.5 = 46$$

$$h) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} - 0. \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} + 0. \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2.[2.(-2) - 1.1 + 1.2] + 3. [(-1).2 - 2.(-6) + 1.3]$$

$$= 2. (-3) + 3.13 = 33$$

1.2.2. Các tính chất

Tính chất 1:

Định thức của ma trận chuyển vị A^t bằng định thức của ma trận A , tức là:

$$\det(A^t) = \det(A)$$

Ví dụ 29: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$; $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2$

Hệ quả: “Một tính chất khi đã phát biểu đúng về hàng của một định thức thì nó vẫn còn đúng khi phát biểu thay hàng bằng cột”.

Tính chất 2

Đổi chỗ 2 hàng (hay 2 cột) của một định thức, ta được một định thức mới bằng định thức cũ đổi dấu.

Ví dụ 30: $\begin{vmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ (Đổi hàng 1 và hàng 3 cho nhau)

Thật vậy, ta có

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-2). \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 5. \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 3. \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (-2) \cdot 5 - 5 \cdot (-3) + 3 \cdot (-14) = -37$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \cdot (-7) + 2 \cdot 19 + 27 = 37$$

$$\text{Vậy } \begin{vmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

Tính chất 3: Một định thức có 2 hàng (hay 2 cột) như nhau thì bằng 0.

Ví dụ 31:

$$A = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -A \quad (\text{Đổi hàng 1 và hàng 3 cho nhau})$$

$$\text{Suy ra: } 2A = 0 \quad \rightarrow \quad A = 0$$

Tính chất 4: Cho $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$. Tính $\det(A)$

Tính $\det(A)$ bằng cách khai triển theo hàng thứ i:

$$\det(A) = (-1)^{i+1} a_{i1} \cdot \det(M_{i1}) + (-1)^{i+2} a_{i2} \cdot \det(M_{i2}) + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} \cdot \det(M_{in})$$

Tính $\det(A)$ bằng cách khai triển theo cột thứ j:

$$\det(A) = (-1)^{1+j} a_{1j} \cdot \det(M_{1j}) + (-1)^{2+j} a_{2j} \cdot \det(M_{2j}) + \dots + (-1)^{n+j} a_{nj} \cdot \det(M_{nj})$$

Ví dụ 32: Tính $A = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

Khai triển theo hàng thứ 1 (theo định nghĩa):