

CHƯƠNG 5

CHUỖI SỐ VÀ CHUỖI HÀM

V.1. GIỚI THIỆU

Trong chương này chúng tôi trình bày những kết quả cơ bản của lý thuyết chuỗi số, chuỗi hàm, chuỗi lũy thừa, chuỗi lượng giác, mà chúng có nhiều ứng dụng trong ngành toán học khác và các ngành kỹ thuật, kinh tế,...

V.2. MỤC TIÊU CỦA CHƯƠNG

Trình bày các khái niệm và tính chất cơ bản về chuỗi số, sự hội tụ của chuỗi số; chuỗi hàm và miền hội tụ, chuỗi lũy thừa và chuỗi Fourier.

V.3. CHUẨN ĐẦU RA CỦA CHƯƠNG

1. Trình bày được định nghĩa và các tính chất cơ bản của chuỗi số hội tụ.
2. Tính được tổng của một số chuỗi số đặc biệt.
3. Sử dụng được dấu hiệu hội tụ để xét sự hội tụ của chuỗi số dương.
4. Sử dụng được dấu hiệu Lepnit để xét sự hội tụ của chuỗi đan dấu. Khảo sát được sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi số.
5. Trình bày được các khái niệm về miền hội tụ của chuỗi hàm, tổng của chuỗi hàm.
6. Tìm được miền hội tụ của chuỗi hàm.
7. Tìm được bán kính hội tụ, miền hội tụ và tính được tổng của chuỗi lũy thừa. Viết được khai triển hàm thành chuỗi lũy thừa.
8. Trình bày được các khái niệm hệ số Fourier, chuỗi Fourier. Viết được khai triển thành chuỗi Fourier của các hàm chẵn, lẻ, tuần hoàn và không tuần hoàn.

V.4. NỘI DUNG CỦA CHƯƠNG

Trong chương này chúng ta trình bày những khái niệm và tính chất cơ bản về chuỗi số và chuỗi hàm số thực.

1 Chuỗi số

1.1 Các khái niệm cơ bản

1.1.1 Định nghĩa. Cho dãy số thực $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ta gọi tổng hình thức

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \quad (5.1)$$

là một *chuỗi số* và ký hiệu là $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, a_n được gọi là số hạng thứ n của chuỗi số (5.1).

Với mỗi $n = 1, 2, \dots$ đặt

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

và gọi S_n là *tổng riêng* thứ n của chuỗi số (5.1). Dãy $\{S_n\}$ được gọi là *dãy tổng riêng* của chuỗi (5.1).

Nếu tồn tại $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ hữu hạn thì chuỗi (5.1) được gọi là *hội tụ* và có *tổng bằng* S . Khi đó ta ký hiệu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Nếu chuỗi không hội tụ thì nó được gọi là *phân kỳ*. Trong trường hợp $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \pm\infty$ thì ta viết là $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty$.

Như vậy, chuỗi số hội tụ khi và chỉ khi dãy tổng riêng của nó hội tụ trong $\mathbf{R}$, và $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ khi và chỉ khi $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. Hơn nữa, nếu chuỗi (5.1) có tổng bằng S thì với mỗi $n = 1, 2, \dots$ chuỗi $\sum_{i=n}^{\infty} a_i$ cũng hội tụ và có tổng bằng $S - S_{n-1}$.

1.1.2 Định nghĩa. Với mỗi $n = 1, 2, \dots$ ta đặt $r_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i$ và gọi r_n là *phần dư* thứ n của chuỗi (5.1).

Như vậy nếu chuỗi (5.1) hội tụ và có tổng S thì $r_n = S - S_n$ hội tụ tới 0 khi $n \rightarrow \infty$.

1.1.3 Ví dụ. 1) Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Khi đó tổng riêng thứ n của chuỗi là

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Từ đó ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$. Vì vậy chuỗi đã cho hội tụ và có tổng bằng 1.

2) Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Khi đó tổng riêng thứ n của chuỗi là

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Vì vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$. Do đó chuỗi phân kỳ.

3) Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$. Dễ thấy dãy tổng riêng của chuỗi này có hai dãy con $S_{2n} = 0$ và $S_{2n+1} = -1$. Do đó dãy tổng riêng phân kỳ, kéo theo chuỗi phân kỳ.

4) Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ ($q \in \mathbf{R}$). Khi đó tổng riêng thứ n của chuỗi này là

$$S_n = \sum_{i=1}^n q^i = \begin{cases} q \frac{1 - q^n}{1 - q} & \text{nếu } q \neq 1 \\ n & \text{nếu } q = 1. \end{cases}$$

Vì vậy nếu $|q| < 1$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{q}{1 - q}$, hay chuỗi hội tụ. Nếu $|q| \geq 1$ thì chuỗi phân kỳ.

1.2 Một số tính chất của chuỗi hội tụ

Định lý sau cho ta một điều kiện cần để chuỗi hội tụ.

1.2.1 Định lý. Nếu chuỗi (5.1) hội tụ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Định lý trên cho chúng ta một dấu hiệu quen thuộc để nhận biết chuỗi phân kỳ. Chứng minh của nó bạn đọc có thể tham khảo trong các tài liệu tham khảo [1], [2], [3], [5] của chương 5.

1.2.2 Ví dụ. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$.

Ta có $a_n = n \sin \frac{1}{n}$. Vì vậy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0.$$

Do đó chuỗi đã cho phân kỳ.

1.2.3 Nhận xét. Định lý 1.2.1 chỉ là điều kiện cần mà không phải là điều kiện đủ để chuỗi hội tụ. Ta có thể chỉ ra chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ với $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ nhưng chuỗi phân

kỳ. Chẳng hạn, chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Định lý sau còn gọi là tiêu chuẩn Cauchy, đưa ra một điều kiện cần và đủ để chuỗi số hội tụ. Nó được suy ra từ định nghĩa sự hội tụ của chuỗi và tiêu chuẩn Cauchy về dãy số hội tụ.

1.2.4 Định lý. (Tiêu chuẩn Cauchy) *Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ khi và chỉ khi với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $n_0 \in \mathbf{N}$ sao cho $|a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$ với mọi $n \geq n_0$ và mọi $p \in \mathbf{N}$.*

Định lý sau đây suy ra trực tiếp từ định nghĩa. Bạn đọc tự chứng minh.

1.2.5 Định lý. *Nếu các chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ, có tổng lần lượt là a, b và $\alpha \in \mathbf{R}$, thì các chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ cũng hội tụ và lần lượt có tổng là $a + b$, αa .*

1.3 Chuỗi số dương và các dấu hiệu hội tụ

Trong mục này chúng ta nghiên cứu lớp các chuỗi số dương, đối với loại chuỗi này có nhiều dấu hiệu nhận biết sự hội tụ của nó.

1.3.1 Định nghĩa. Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ được gọi là *chuỗi số dương* nếu $a_n > 0$ với mọi $n \geq 1$.

Nhận xét. Đối với chuỗi số dương, dãy tổng riêng của nó luôn là dãy tăng. Do đó nhờ tính chất của giới hạn ta suy ra chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ khi và chỉ khi

dãy các tổng riêng của nó bị chặn. Trong trường hợp chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ thì tổng của chuỗi sẽ là $+\infty$. Sau đây, chúng ta đưa ra một số dấu hiệu để nhận biết sự hội tụ của các chuỗi số dương.

Định lý sau cho một phương pháp so sánh theo giới hạn, chứng minh của nó bạn đọc tìm hiểu trong các tài liệu tham khảo [1], [2], [3], [5] của chương 5.

1.3.2 Định lý. (Dấu hiệu so sánh 1) Cho các chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Giả sử

tồn tại giới hạn hữu hạn hay vô hạn $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$. Khi đó, ta có các kết luận sau:

- 1) Nếu $0 < l < +\infty$ thì các chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ đồng thời hội tụ hoặc phân kỳ.
- 2) Nếu $l = 0$ và chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ.
- 3) Nếu $l = +\infty$ và chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ phân kỳ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.

Định lý sau đưa ra phương pháp so sánh theo bất đẳng thức.

1.3.3 Định lý. (Dấu hiệu so sánh 2) Cho các chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Giả sử tồn tại $K > 0$ và $n_0 \in \mathbf{N}$ sao cho $a_n \leq K \cdot b_n$, với mọi $n \geq n_0$. Khi đó

- 1) Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.
- 2) Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ phân kỳ.

1.3.4 Nhận xét. Người ta chứng minh được rằng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ (với s là hằng số) hội tụ nếu $s > 1$ và phân kỳ nếu $s \leq 1$ (xem Ví dụ 1.3.13). Nhờ tính chất này, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ thường được dùng làm chuẩn để so sánh, khi xét sự hội tụ hay phân kỳ của các chuỗi số dương.

Bây giờ chúng ta đến với một vài ví dụ áp dụng dấu hiệu so sánh.

1.3.5 Ví dụ. Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi số sau:

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^\alpha}, (\alpha > 0)$.

Ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n^\alpha}}{\frac{1}{n^\alpha}} = 1$. Vì vậy từ dấu hiệu so sánh 1 và sự hội tụ của chuỗi

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ ta suy ra chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^\alpha}$ hội tụ với $\alpha > 1$ và phân kỳ với $\alpha \leq 1$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$. Ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}} = 1$. Do chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ nên

chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ phân kỳ.

1.3.6 Định lý. (Dalambert) Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Giả sử tồn tại giới hạn

hữu hạn hay vô hạn $d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Khi đó

1) Nếu $0 \leq d < 1$ thì chuỗi hội tụ;

2) Nếu $d > 1$ thì chuỗi phân kỳ.

Chứng minh của định lý này bạn đọc có thể tham khảo trong các tài liệu tham khảo [1], [2], [3], [5] của chương 5.

1.3.7 Nhận xét. Nếu $d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ thì chúng ta chưa thể kết luận được tính hội tụ hay phân kỳ của chuỗi. Trong trường hợp này chúng ta phải dùng các dấu hiệu khác hoặc các điều kiện hội tụ để khảo sát sự hội tụ của chuỗi.

1.3.8 Ví dụ. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!a^n}{n^n}$ ($a > 0$).

Ta có $a_n = \frac{n!a^n}{n^n}$ và

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{a}{e}.$$

Vậy theo dấu hiệu Dalambert ta có.

- Với $a < e$ tức là $d < 1$, thì chuỗi hội tụ.

- Với $a > e$ tức là $d > 1$, thì chuỗi phân kỳ.

Với $a = e$ tức là $d = 1$, thì chưa có kết luận.

Tuy nhiên, từ bất đẳng thức $(1 + \frac{1}{n})^n < e$ với mọi n ta nhận được

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{(1 + \frac{1}{n})^n} > 1$$

với mọi n . Suy ra $a_{n+1} > a_n$ với mọi n . Do đó $a_n > a_1 = e$ với mọi n . Vì vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$. Do đó chuỗi phân kỳ.

1.3.9 Định lý. (Dấu hiệu Cauchy) Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Giả sử tồn tại giới hạn hữu hạn hay vô hạn $c = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$. Khi đó

1) Nếu $0 \leq c < 1$ thì chuỗi hội tụ.

2) Nếu $c > 1$ thì chuỗi phân kỳ.

Chứng minh của định lý này bạn đọc có thể tham khảo trong các tài liệu tham khảo [1], [2], [3], [5] của chương 5.

1.3.10 Nhận xét. 1) Nếu $c = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ thì chúng ta chưa thể kết luận được tính hội tụ hay phân kỳ của chuỗi. Trong trường hợp này chúng ta phải dùng các dấu hiệu khác hoặc các điều kiện hội tụ để khảo sát sự hội tụ của chuỗi.

2) Trong Định lý 1.3.9 nếu thay giới hạn $c = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ bởi giới hạn trên $c = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ thì kết luận của định lý vẫn còn đúng.

1.3.11 Ví dụ. Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi số:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n+1)}.$$

$$\text{Ta có } a_n = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n+1)} \text{ và}$$

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n+1} \right)^{n+1} = \frac{1}{e^2} < 1.$$

Theo dấu hiệu Cauchy thì chuỗi số đã cho hội tụ.

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 + (-1)^n)^n}{4^n}.$$

Ta có

$$c = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + (-1)^n}{4} = \frac{3}{4} < 1.$$

Theo dấu hiệu Cauchy thì chuỗi đã cho hội tụ.

1.3.12 Định lý. (Dấu hiệu tích phân Cauchy) Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Giả sử tồn tại hàm $f(x)$ đơn điệu giảm và liên tục trên $[a, +\infty)$ với $a \geq 1$ sao cho $f(n) = a_n$ với mỗi $n = 1, 2, \dots$. Khi đó nếu tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ (tương ứng phân kỳ) chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ (tương ứng phân kỳ).

Chứng minh của định lý này bạn đọc tìm đọc trong các tài liệu tham khảo [1], [2], [3], [5] của chương 5. Chúng ta đến với một ví dụ áp dụng của nó.

1.3.13 Ví dụ. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ ($s \in \mathbf{R}$).

- Với $s < 0$ ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^s} = +\infty$, nhờ điều kiện cần để chuỗi hội tụ ta suy ra chuỗi phân kỳ.

- Với $s = 0$ thì dễ thấy chuỗi đã cho phân kỳ.

- Với $s > 0$ ta xét hàm số $f(x) = \frac{1}{x^s}$ trên $[1, +\infty)$. Ta có $f'(x) = \frac{-s}{x^{s+1}} < 0$ với mọi $x \geq 1$. Do vậy $f(x)$ đơn điệu giảm trên $[1, +\infty)$. Hơn nữa $a_n = \frac{1}{n^s} = f(n)$ với mỗi $n = 1, 2, \dots$. Mặt khác ta có

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{dx}{x^s} = \begin{cases} \lim_{A \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(1-s)x^{s-1}} \Big|_1^A \right) & \text{nếu } s \neq 1 \\ \lim_{A \rightarrow \infty} \left(\ln x \Big|_1^A \right) & \text{nếu } s = 1. \end{cases}$$

Từ đó suy ra

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} = \begin{cases} \frac{1}{s-1} & \text{nếu } s > 1 \\ +\infty & \text{nếu } 0 < s \leq 1. \end{cases}$$

Vì vậy theo dấu hiệu tích phân Cauchy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ hội tụ nếu $s > 1$ và phân kỳ nếu $s \leq 1$.

1.4 Chuỗi có dấu tùy ý

Trước hết ta xét một trường hợp đặc biệt của chuỗi có dấu bất kỳ là chuỗi đan dấu, đó là trường hợp các số hạng của chuỗi lần lượt nhận dấu dương rồi dấu âm,

hoặc lần lượt nhận dấu âm rồi dấu dương.

1.4.1 Định nghĩa. Cho $\{a_n\}$ là dãy số dương. Chuỗi số có dạng $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ (hoặc $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$) được gọi là *chuỗi đan dấu*.

Sự hội tụ của chuỗi đan dấu thường được nhận biết bởi dấu hiệu sau.

1.4.2 Định lý. (Dấu hiệu Leibnitz) Nếu a_n là dãy số đơn điệu giảm (khi n đủ lớn) và $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ thì chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ hội tụ.

Chứng minh của định lý này bạn đọc có thể tham khảo trong các tài liệu tham khảo [1], [2], [3], [5] của chương 5.

1.4.3 Ví dụ. Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

Ta có $a_n = \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n+1} = a_{n+1}$ với mọi n và $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n-1} = 0$. Theo dấu hiệu Leibnitz thì chuỗi hội tụ.

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n} + n\pi\right).$$

Ta có $\sin\left(\frac{1}{n} + n\pi\right) = (-1)^n \sin \frac{1}{n}$ và vì dãy $\{a_n\}$ với $a_n = \sin \frac{1}{n}$ là dãy đơn điệu giảm hội tụ về 0. Do đó theo dấu hiệu Leibnitz thì chuỗi đã cho hội tụ.

1.4.4 Định nghĩa. Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ được gọi là *hội tụ tuyệt đối* nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ hội tụ. Một chuỗi hội tụ mà không hội tụ tuyệt đối được gọi là *hội tụ có điều kiện* hay *bán hội tụ*.

Nhận xét. Dùng tiêu chuẩn Cauchy bạn đọc có thể chứng minh được mọi chuỗi hội tụ tuyệt đối là hội tụ. Điều ngược lại nói chung là không đúng.

1.4.5 Ví dụ. Khảo sát sự hội tụ, hội tụ tuyệt đối của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ với $p \in \mathbf{R}$.

Với $p \leq 0$ ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} \neq 0$. Do đó chuỗi phân kỳ.

Với $p > 1$ ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ hội tụ, tức là chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ hội tụ tuyệt đối.

Với $0 < p \leq 1$ ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ phân kỳ, tức là chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ không hội tụ tuyệt đối. Tuy nhiên trong trường hợp này dễ thấy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ hội tụ theo dấu hiệu Leibnitz. Như vậy chuỗi này bán hội tụ.

1.4.6 Định lý. (Dấu hiệu Dirichlet) Giả sử

1) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ có dãy tổng riêng bị chặn, nghĩa là tồn tại $M > 0$ sao cho

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| < M \text{ với mọi } n,$$

2) b_n là dãy số đơn điệu giảm (khi n đủ lớn) và $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

Khi đó, chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ hội tụ.

1.4.7 Định lý. (Dấu hiệu Abel) Giả sử

1) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ

2) b_n là dãy số đơn điệu và bị chặn.

Khi đó, chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ hội tụ.

Chứng minh của các định lý trên bạn đọc tìm hiểu trong các tài liệu tham khảo [1], [2], [3], [5] của chương 5.

1.4.8 Ví dụ. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{n}$.

Ta có

$$\sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left(\sin(2n+1) \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right).$$

Vì vậy

$$\left| \sum_{k=1}^n \cos 2k \right| = \left| \frac{1}{2 \sin 1} (\sin(2n+1) - \sin 1) \right| < \frac{1}{\sin 1}$$

với mọi n . Như vậy, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \cos 2n$ có dãy tổng riêng bị chặn. Mặt khác $b_n = \frac{1}{n}$

đơn điệu giảm về 0. Theo dấu hiệu Dirichlet thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{n}$ hội tụ.

2 Chuỗi hàm

2.1 Các khái niệm và tính chất cơ bản

2.1.1 Định nghĩa. Cho $X \subseteq \mathbf{R}$. Ký hiệu $\mathcal{A}$ là tập hợp tất cả các hàm số xác định trên X và $\mathbf{N}^* = \{1, 2, \dots\}$. Ta gọi mỗi ánh xạ $f : \mathbf{N}^* \rightarrow \mathcal{A}$ đặt tương ứng mỗi $n \in \mathbf{N}^*$ với một hàm $f(n) \in \mathcal{A}$ là một *dãy hàm* xác định trên X .

Ta ký hiệu dãy hàm này là $\{f_n(x)\}$ hay

$$f_1(x), f_2(x), \dots, \quad (5.2)$$

trong đó $f_n(x) = f(n)$.

Trong một số trường hợp dãy hàm còn được ký hiệu gọn là $\{f_n\}$ hay $f_1, f_2, \dots$

2.1.2 Định nghĩa. Cho dãy hàm $\{f_n\}$ xác định trên $X \subseteq \mathbf{R}$. Ta gọi tổng hình thức

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots \quad (5.3)$$

là một *chuỗi hàm* và ký hiệu là $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ hay $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Điểm $x_0 \in X$ được gọi là *điểm hội tụ* của chuỗi hàm (5.3) nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ hội tụ.

Tập hợp tất cả các điểm hội tụ của chuỗi hàm (5.3) được gọi là *miền hội tụ* của chuỗi hàm (5.3).

Giả sử chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ có miền hội tụ $A \subseteq X$. Với mỗi $x \in A$ đặt

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f_i(x).$$

Khi đó, chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ được gọi là *hội tụ đến* $S(x)$ trên A , $S(x)$ được gọi là *tổng của chuỗi hàm* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ trên A và ký hiệu là $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = S$ trên A .

2.1.3 Ví dụ. Xét chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$.

Nếu $\left| \frac{x}{2} \right| \geq 1$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{2^n} \neq 0$. Do đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$ phân kỳ.

Nếu $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$ hội tụ tuyệt đối theo dấu hiệu Cauchy. Vì vậy chuỗi đã cho hội tụ và

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x}{2}\right)^i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x \frac{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^n}{1 - \frac{x}{2}}}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{x}{2 - x}.$$

Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm là $-2 < x < 2$ và tổng của chuỗi trên miền hội tụ là $S(x) = \frac{x}{2 - x}$.

2.1.4 Định nghĩa. Cho chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ trên $X \subseteq \mathbf{R}$, hội tụ đến hàm $S(x)$ trên $X_0 \subseteq X$. Với mỗi $x \in X_0$ đặt

$$S_n(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

và

$$r_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x).$$

Khi đó, các dãy hàm $\{S_n(x)\}$, $\{r_n(x)\}$ lần lượt được gọi là *dãy tổng riêng* và *dãy phần dư* của chuỗi hàm (5.3). Hơn nữa dãy hàm $\{S_n\}$ hội tụ đến S trên X_0 .

2.2 Sự hội tụ đều và các dấu hiệu hội tụ

2.2.1 Định nghĩa. Chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ được gọi là *hội tụ đều* đến hàm $S(x)$ trên tập $A \subseteq X_0$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sao cho với mọi $n > n_0$ ta có

$$|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon \quad \text{với mọi } x \in A.$$

Một cách tương đương, chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ hội tụ đều trên A khi và chỉ khi với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sao cho với mọi $n > n_0$, với mọi $x \in A$ thì

$$|r_n(x)| < \varepsilon.$$

2.2.2 Nhận xét. 1) Từ định nghĩa ta suy ra nếu chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ hội tụ đều đến $S(x)$ trên A thì hội tụ đến $S(x)$ trên A . Điều ngược lại là không đúng.

2) Chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ hội tụ đều trên A khi và chỉ khi $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} |r_n(x)| = 0$.

2.2.3 Ví dụ. Xét chuỗi hàm $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Ta thấy chuỗi này hội tụ đến $S(x) = \frac{1}{1-x}$ trên $(0, 1)$. Tuy nhiên chuỗi không hội tụ đều đến $S(x)$ trên $(0, 1)$. Thật vậy, ta có

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}, \quad \forall x \in (0, 1).$$

Vì vậy, với mỗi $n \geq 1$ bằng cách chọn $x_n = 1 - \frac{1}{n} \in (0, 1)$ ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in (0, 1)} |r_n(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in (0, 1)} \frac{x^{n+1}}{1-x} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1} = +\infty.$$

Do đó chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ không hội tụ đều đến $S(x) = \frac{1}{1-x}$ trên $(0, 1)$.

Định lý sau đây còn được gọi là tiêu chuẩn Cauchy về sự hội tụ đều của chuỗi hàm.

2.2.4 Định lý. (Tiêu chuẩn Cauchy). *Chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ hội tụ đều trên A khi và chỉ khi với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại số tự nhiên $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sao cho với mọi $n \geq n_0$ và mọi $p \in \mathbf{N}$ ta có*

$$|f_{n+1}(x) + \dots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in A.$$

Sau đây là một số dấu hiệu nhận biết sự hội tụ đều của chuỗi hàm mà chứng minh của chúng bạn đọc có thể tìm đọc trong các tài liệu tham khảo [1], [2], [3], [5] của chương 5.

2.2.5 Định lý. (Dấu hiệu Weierstrass). *Cho chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Nếu*

1) $|f_n(x)| \leq a_n$ với mọi $x \in A$ và với mọi $n \geq n_0$, (n_0 là một số tự nhiên cố định),

2) Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ,

thì $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ hội tụ đều trên A .

2.2.6 Ví dụ. Khảo sát sự hội tụ đều của chuỗi hàm $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx \sin nx}{1 + n^5 x^2}$ trên $\mathbf{R}$.

Ta có

$$\left| \frac{nx \sin nx}{1 + n^5 x^2} \right| \leq \frac{|nx|}{1 + n^5 x^2} \leq \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{với mọi } x \in \mathbf{R}, \text{ với mọi } n \in \mathbf{N}^*.$$

Vì chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ hội tụ, nhờ dấu hiệu Weierstrass ta suy ra chuỗi hàm $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx \sin nx}{1+n^5x^2}$ hội tụ đều trên $\mathbf{R}$.

2.2.7 Định lý. (Dấu hiệu Dirichlet). Cho các dãy hàm $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ xác định trên $A \subseteq \mathbf{R}$. Giả sử

1) Dãy tổng riêng của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ bị chặn đều trên A , tức là tồn tại $M > 0$ sao cho

$$\left| \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| \leq M, \text{ với mọi } x \in A, \text{ với mọi } n = 1, 2, \dots$$

2) Dãy số $\{g_n(x)\}$ đơn điệu giảm với mỗi $x \in A$ và $\{g_n\}$ hội tụ đều đến 0 trên A .

Khi đó, chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$ hội tụ đều trên A .

2.2.8 Định lý. (Dấu hiệu Abel). Cho các dãy hàm $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ xác định trên $A \subseteq \mathbf{R}$. Giả sử

1) Chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ hội tụ đều trên A .

2) Dãy số $\{g_n(x)\}$ đơn điệu với mỗi $x \in A$ và $\{g_n\}$ bị chặn đều trên A , tức là tồn tại $M > 0$ sao cho

$$|g_n(x)| \leq M, \text{ với mọi } x \in A, \text{ với mọi } n = 1, 2, \dots$$

Khi đó, chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$ hội tụ đều trên A .

Tiếp theo chúng ta trình bày các tính chất cơ bản của tổng chuỗi hàm.

Ta đã biết tổng của hữu hạn các hàm liên tục trên A là một hàm liên tục trên A . Định lý sau đưa ra một điều kiện đủ để điều trên đúng cho tổng vô hạn.

2.2.9 Định lý. (Tính liên tục) Cho $A \subseteq \mathbf{R}$ và dãy hàm $\{f_n\}$ xác định trên A . Nếu

1) f_n là hàm liên tục trên A với mỗi $n = 1, 2, \dots$,

2) Chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ hội tụ đều đến hàm $S(x)$ trên A ,

thì S là hàm liên tục trên A .

Định lý sau đưa ra một điều kiện đủ để lấy đạo hàm từng số hạng của chuỗi hàm.

2.2.10 Định lý. (Tính khả vi) Cho dãy hàm $\{f_n\}$ xác định trên (a, b) . Nếu

- 1) f_n là hàm liên tục trên (a, b) với mỗi $n = 1, 2, \dots$,
- 2) Chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ hội tụ đến hàm $S(x)$ trên (a, b) ,
- 3) Chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ hội tụ đều trên (a, b) ,

thì S là hàm khả vi trên (a, b) và

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$$

với mọi $x \in (a, b)$.

Định lý sau đưa ra một điều kiện đủ để lấy tích phân từng số hạng của chuỗi hàm.

2.2.11 Định lý. (Tính khả tích) Cho dãy hàm $\{f_n\}$ xác định trên $[a, b]$. Nếu

- 1) f_n là hàm liên tục trên $[a, b]$ với mỗi $n = 1, 2, \dots$,
- 2) Chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ hội tụ đến hàm $S(x)$ trên $[a, b]$,

thì S là hàm khả tích trên $[a, b]$ và

$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Chứng minh của các định lý này bạn đọc có thể tìm đọc trong các tài liệu tham khảo [1], [2], [3], [5] của chương 5.

3 Chuỗi lũy thừa

3.1 Khái niệm và tính chất cơ bản của chuỗi lũy thừa

3.1.1 Định nghĩa. Chuỗi lũy thừa là chuỗi hàm có dạng $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, trong đó $x_0, a_0, a_1, a_2, \dots \in \mathbb{R}$.

Điểm x_0 được gọi là tâm của chuỗi lũy thừa. Rõ ràng chuỗi lũy thừa luôn hội tụ tại tâm của nó.

Nếu đặt $y = x - x_0$ thì chuỗi lũy thừa được đưa về dạng $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ có tâm tại $y = 0$.

3.1.2 Bổ đề. (Abel) Cho chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (5.4)$$

Khi đó

1) Nếu chuỗi (5.4) hội tụ tại x_0 thì nó hội tụ tuyệt đối tại mọi điểm x mà $|x| < |x_0|$.

2) Nếu chuỗi (5.4) phân kỳ tại x_1 thì nó phân kỳ tại mọi điểm x mà $|x| > |x_1|$.

Chứng minh của định lý này bạn đọc có thể tham khảo trong các tài liệu tham khảo [1], [2], [3], [5] của chương 5.

3.1.3 Nhận xét. Gọi A là miền hội tụ của chuỗi (5.4). Hiển nhiên chuỗi hội tụ tại $x = 0$. Do đó $A \neq \emptyset$ và nếu đặt

$$R = \sup\{x : x \in A\}$$

thì $R \geq 0$.

Ta dễ dàng đưa ra các ví dụ về chuỗi (5.4) mà $R = 0$, $R < \infty$ và $R = +\infty$ (chuỗi hội tụ trên toàn $\mathbf{R}$). Từ Bổ đề Abel ta chứng minh được rằng nếu $R > 0$ thì

1) Chuỗi (5.4) hội tụ tuyệt đối trong khoảng $(-R, R)$ và hội tụ đều trong mỗi đoạn $[a, b] \subset (-R, R)$.

2) Chuỗi (5.4) phân kỳ tại mỗi x mà $|x| > R$.

3.1.4 Định nghĩa. Số $R \in [0, +\infty)$ trong Nhận xét 3.1.3 được gọi là *bán kính hội tụ* của chuỗi lũy thừa (5.4). Khoảng $(-R, R)$ được gọi là *khoảng hội tụ* của chuỗi lũy thừa (5.4)

Định lý sau cho ta cách tính bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa.

3.1.5 Định lý. (Cauchy- Hadamard) Cho chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Giả sử rằng

$$\rho = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad (\text{hoặc } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|).$$

Khi đó bán kính hội tụ của chuỗi được tính theo công thức sau

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho} & \text{nếu } 0 < \rho < +\infty \\ +\infty & \text{nếu } \rho = 0 \\ 0 & \text{nếu } \rho = +\infty. \end{cases}$$

Chứng minh của định lý này bạn đọc có thể tìm đọc trong các tài liệu tham khảo [1], [2], [3], [5] của chương 5.

3.1.6 Ví dụ. Tìm miền hội tụ chuỗi hàm

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n.$$

Giải. Đặt $u = \frac{1-x}{1+x}$, (với $x \neq -1$). Ta thu được chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} u^n$. Bán kính hội tụ của chuỗi trên là

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n} \right| = 1.$$

Khoảng hội tụ của chuỗi là $(-1, 1)$.

Với $u = 1$ ta thu được chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ hội tụ theo dấu hiệu Leibnitz.

Với $u = -1$ ta thu được chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ.

Do đó miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} u^n$ là $-1 < u \leq 1$. Trở lại với chuỗi ban đầu, miền hội tụ của chuỗi là tập những $x \in \mathbf{R}$ thoả mãn

$$-1 < \frac{1-x}{1+x} \leq 1.$$

Giải hệ bất phương trình trên ta thu được miền hội tụ của chuỗi ban đầu là $[0, +\infty)$.

3.2 Các tính chất của tổng của chuỗi lũy thừa

Các kết quả này suy từ các tính chất tương ứng của tổng chuỗi hàm và tính hội tụ đều của chuỗi lũy thừa trên các đoạn $[-r, r] \subset (-R, R)$.

3.2.1 Định lý. (Tính liên tục) *Giả sử chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ có bán kính hội tụ $R > 0$. Khi đó tổng $S(x)$ của nó liên tục trên khoảng hội tụ $(-R, R)$*

3.2.2 Định lý. (Tính liên tục tại điểm mút) *Giả sử chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ có bán kính hội tụ $R > 0$. Khi đó*

1) *Nếu chuỗi hội tụ tại $x = R$ thì tổng $S(x)$ liên tục trái tại $x = R$, tức là*

$$\lim_{x \rightarrow R^-} S(x) = S(R).$$

2) Nếu chuỗi hội tụ tại $x = -R$ thì tổng $S(x)$ liên tục phải tại $x = R$, tức là

$$\lim_{x \rightarrow -R^+} S(x) = S(-R).$$

3.2.3 Định lý. (Tích phân từng số hạng) Giả sử chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ có bán kính hội tụ $R > 0$. Khi đó tổng $S(x)$ của nó khả tích trên mọi đoạn $[a, b]$ trong khoảng hội tụ $(-R, R)$ và

$$\int_a^b S(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b x^n dx.$$

Đặc biệt, nếu $x \in (-R, R)$ thì

$$\int_0^x S(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

3.2.4 Định lý. (Tính khả vi và đạo hàm từng số hạng) Giả sử chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ có bán kính hội tụ $R > 0$. Khi đó

1) Chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ cũng có bán kính hội tụ là R .

2) Tổng $S(x)$ là hàm khả vi trong khoảng $(-R, R)$ và

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Chứng minh của những định lý trên bạn đọc có thể tìm hiểu trong các tài liệu tham khảo [1], [2], [3], [5] của chương 5.

3.2.5 Ví dụ. Tìm miền hội tụ và tính tổng trên miền hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n 2^n}.$$

Giải. Đặt $u = \frac{x}{2}$. Ta thu được chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n}$. Dễ dàng tìm được bán kính hội tụ của chuỗi vừa nhận được $R = 1$ và miền hội tụ $-1 \leq u < 1$. Do vậy miền hội tụ của chuỗi ban đầu là $-2 \leq x < 2$.

Tiếp theo ta tính tổng $S(u)$ của chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n}$. Khoảng hội tụ của nó là $(-1, 1)$. Lấy đạo hàm từng số hạng của chuỗi ta có

$$S'(u) = \sum_{n=1}^{\infty} u^{n-1} = \frac{1}{1-u}$$

với mọi $u \in (-1, 1)$. Suy ra

$$S(u) = \int \frac{du}{1-u} = -\ln|1-u| + C$$

trong đó C là một hằng số cần tìm. Để ý rằng $S(0) = 0$, vì vậy

$$0 = -\ln 1 + C,$$

hay $C = 0$. Do đó $S(u) = -\ln(1-u)$.

Theo Định lý 3.2.2 ta có

$$S(-1) = \lim_{u \rightarrow -1^+} S(u) = \lim_{u \rightarrow -1^+} -\ln|1-u| = -\ln 2.$$

Như vậy

$$S(u) = -\ln(1-u), \quad u \in [-1, 1).$$

Thay $u = \frac{x}{2}$ ta nhận được

$$S(x) = -\ln\left|1 - \frac{x}{2}\right|, \quad \text{với mọi } x \in [-2, 2).$$

3.3 Khai triển hàm thành chuỗi lũy thừa

3.3.1 Định nghĩa. Cho hàm f xác định trong (a, b) . Ta nói rằng hàm f *khai triển được thành chuỗi lũy thừa* trong lân cận của điểm $x_0 \in (a, b)$ nếu tồn tại $\delta > 0$ và dãy $\{a_n\}$ sao cho $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$ và với mọi $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ta có đẳng thức

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

3.3.2 Định nghĩa. Giả sử f là hàm xác định và khả vi vô hạn lần trên (a, b) và $x_0 \in (a, b)$. Khi đó chuỗi

$$\begin{aligned} f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \end{aligned} \quad (5.5)$$

được gọi là *chuỗi Taylor* của hàm f . Chuỗi Taylor với tâm tại $x_0 = 0$ được gọi là chuỗi Maclaurin.

Ta có định lý sau.

3.3.3 Định lý. Giả sử f là hàm xác định trên (a, b) và $x_0 \in (a, b)$. Nếu hàm f được khai triển thành chuỗi lũy thừa

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \quad (5.6)$$

trong lân cận của x_0 thì trong lân cận này f khả vi vô hạn lần và chuỗi (5.6) là chuỗi Taylor của nó, tức là các hệ số của nó được tính theo công thức

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Chứng minh của định lý này bạn đọc có thể tham khảo trong các tài liệu tham khảo [1], [2], [3], [5] của chương 5.

Từ Định lý 3.3.3 ta suy ra hệ quả sau.

3.3.4 Hệ quả. Phép khai triển thành chuỗi lũy thừa trong một lân cận của điểm cho trước là duy nhất.

Tiếp theo ta nghiên cứu các lớp hàm có thể khai triển được thành chuỗi lũy thừa trong một lân cận của điểm nào đó. Từ định lý trên ta thấy nếu hàm khai triển được thành chuỗi lũy thừa thì nó khả vi vô hạn lần và chuỗi khai triển chính là chuỗi Taylor của hàm tại điểm đó. Ta biết rằng nếu hàm khả vi vô hạn lần trong lân cận của x_0 thì nó tồn tại chuỗi Taylor. Vấn đề đặt ra là phải chăng mọi hàm khả vi vô hạn lần trong lân cận của điểm x_0 đều có thể khai triển thành chuỗi lũy thừa? Câu trả lời là phủ định. Chẳng hạn, xét hàm

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

Ta thấy hàm f khả vi vô hạn lần trong lân cận tùy ý của 0. Hơn nữa

$$f^{(n)}(0) = 0$$

với mọi n . Do đó chuỗi Taylor của f tại 0 là

$$f(x) = 0 + 0x + 0x^2 + \dots + 0x^n + \dots$$

Rõ ràng tổng của chuỗi đồng nhất bằng 0 trong mọi lân cận của 0. Do đó nếu f khai triển thành chuỗi lũy thừa trong một lân cận nào đó của 0 thì chuỗi đó phải đồng nhất bằng 0 trong lân cận đó. Điều này mâu thuẫn với $f(x) \neq 0$ với $x \neq 0$.

Định lý sau cho một điều kiện đủ để khai triển hàm thành chuỗi lũy thừa. Bạn đọc tìm hiểu chứng minh trong các tài liệu tham khảo [1], [2], [3], [5] của chương 5.