

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

VŨ THỊ HỒNG THANH (CHỦ BIÊN)
ĐINH HUY HOÀNG, TRẦN VĂN ÂN, KIỀU PHƯƠNG CHI, NGUYỄN VĂN
ĐỨC, NGUYỄN HUY CHIÊU, TRẦN ĐỨC THÀNH, NGUYỄN THỊ QUỲNH
TRANG, ĐẬU HỒNG QUÂN

GIÁO TRÌNH GIẢI TÍCH

**(DÀNH CHO SINH VIÊN CÁC NGÀNH KỸ
THUẬT VÀ CÔNG NGHỆ)**

MỤC LỤC

Thông tin về học phần	6
Mở đầu	8
Chương 1 Số thực và giới hạn của dãy số	1
1 Số thực	2
1.1 Tập hợp các số thực	2
1.2 Tập hợp số thực mở rộng	3
1.3 Tập bị chặn, cận trên, cận dưới	4
2 Giới hạn của dãy số	6
2.1 Các khái niệm và tính chất cơ bản của dãy số hội tụ	6
2.2 Điều kiện hội tụ của dãy đơn điệu, số e	10
2.3 Tiêu chuẩn Cauchy	12
2.4 Giới hạn vô hạn	16
Câu hỏi thảo luận	17
Chương 2 Giới hạn của hàm số và hàm số liên tục	20
1 Hàm số và giới hạn của hàm số	21
1.1 Các khái niệm cơ bản về hàm số	21
1.2 Một số loại hàm số đặc biệt	24
1.3 Các hàm số sơ cấp cơ bản và hàm số sơ cấp	25
1.4 Định nghĩa giới hạn của hàm số	30
1.5 Các phép tính và các định lý cơ bản về giới hạn hàm	33
1.6 Các dạng vô định, đại lượng vô cùng bé và đại lượng vô cùng lớn	37
2 Hàm số liên tục	40

2.1	Các khái niệm và tính chất cơ bản của hàm số liên tục	40
2.2	Tính liên tục của các hàm sơ cấp	42
2.3	Các định lý cơ bản về hàm số liên tục trên một đoạn	42
2.4	Hàm số liên tục đều	43
2.5	Giới hạn dạng $\lim_{x \rightarrow a} (u(x))^{v(x)}$	44
	Câu hỏi thảo luận	47
Chương 3 Phép tính vi phân hàm một biến		50
1	Đạo hàm của hàm một biến	51
1.1	Các định nghĩa và tính chất cơ bản	51
1.2	Đạo hàm bên phải, đạo hàm bên trái	52
1.3	Ý nghĩa hình học và cơ học của đạo hàm	54
1.4	Các quy tắc tính đạo hàm	55
1.5	Bảng đạo hàm của một số hàm số sơ cấp	56
2	Vi phân của hàm một biến	57
2.1	Hàm khả vi và vi phân của hàm một biến	57
2.2	Các quy tắc lấy vi phân và tính bất biến của vi phân cấp 1	58
2.3	Các định lý cơ bản về hàm khả vi	59
2.4	Ứng dụng vi phân để tính gần đúng	61
3	Đạo hàm và vi phân cấp cao	62
3.1	Định nghĩa đạo hàm và vi phân cấp cao	62
3.2	Công thức Newton-Leibniz	63
3.3	Tính không bất biến của vi phân cấp cao	64
3.4	Khai triển Taylor, Maclaurin hàm khả vi	65
4	Một số ứng dụng của phép tính vi phân	68
4.1	Quy tắc L'Hospital	69
4.2	Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số	72
Chương 4 Tích phân của hàm một biến		89
1	Nguyên hàm và tích phân không xác định	90
1.1	Định nghĩa và các tính chất cơ bản	90

1.2	Phương pháp đổi biến số và phương pháp tích phân từng phần	93
1.3	Tích phân các hàm hữu tỷ	97
1.4	Tích phân một số hàm vô tỷ	102
1.5	Tích phân các hàm lượng giác	105
2	Tích phân xác định	107
2.1	Định nghĩa và các tính chất cơ bản của tích phân xác định . .	107
2.2	Tính tích phân từng phần, đổi biến số	109
3	Ứng dụng của tích phân xác định	113
3.1	Tính độ dài cung	113
3.2	Tính diện tích hình phẳng	119
3.3	Tính thể tích của vật thể	122
3.4	Thể tích của vật thể tròn xoay	124
3.5	Tính diện tích xung quanh của mặt tròn xoay	125
3.6	Một số ứng dụng vật lý	127
4	Tích phân suy rộng	129
4.1	Tích phân suy rộng loại I	129
4.2	Tích phân suy rộng loại II	136
Chương 5 Chuỗi số và chuỗi hàm		144
1	Chuỗi số	145
1.1	Các khái niệm cơ bản	145
1.2	Một số tính chất của chuỗi hội tụ	146
1.3	Chuỗi số dương và các dấu hiệu hội tụ	147
1.4	Chuỗi có dấu tùy ý	151
2	Chuỗi hàm	154
2.1	Các khái niệm và tính chất cơ bản	154
2.2	Sự hội tụ đều và các dấu hiệu hội tụ	155
3	Chuỗi lũy thừa	158
3.1	Khái niệm và tính chất cơ bản của chuỗi lũy thừa	158
3.2	Các tính chất của tổng của chuỗi lũy thừa	160

3.3	Khai triển hàm thành chuỗi lũy thừa	162
4	Chuỗi Fourier	165
4.1	Chuỗi lượng giác	165
4.2	Điều kiện để khai triển hàm thành chuỗi Fourier	166
4.3	Khai triển Fourier của hàm chẵn, hàm lẻ và hàm bất kỳ	167
Chương 6 Giới hạn, tính liên tục và vi phân của hàm nhiều biến		178
1	Không gian $\mathbf{R}^n$	179
1.1	Cấu trúc tuyến tính và khoảng cách trên $\mathbf{R}^n$	179
1.2	Định nghĩa và các tính chất cơ bản của dãy hội tụ trong $\mathbf{R}^n$.	180
2	Giới hạn của hàm nhiều biến	182
2.1	Các khái niệm và tính chất cơ bản	182
2.2	Giới hạn lặp, giới hạn kép và mối liên hệ giữa chúng	185
3	Tính liên tục của hàm nhiều biến	187
3.1	Các khái niệm và tính chất cơ bản của hàm liên tục	187
3.2	Tính liên tục theo từng biến và mối liên hệ với tính liên tục .	188
4	Đạo hàm riêng và vi phân của hàm nhiều biến	188
4.1	Đạo hàm riêng, tính khả vi và vi phân của hàm nhiều biến . .	188
4.2	Đạo hàm của hàm hợp và tính bất biến của vi phân	194
4.3	Đạo hàm và vi phân cấp cao	195
5	Cực trị không điều kiện và cực trị có điều kiện	197
5.1	Cực trị không điều kiện	197
5.2	Cực trị có điều kiện	199
Chương 7 Tích phân bội		205
1	Tích phân hai lớp	206
1.1	Định nghĩa và các tính chất cơ bản của tích phân hai lớp . . .	206
1.2	Đưa tích phân hai lớp về tích phân lặp	208
1.3	Đổi biến trong tích phân hai lớp	212
2	Tích phân ba lớp	219
2.1	Định nghĩa và các tính chất cơ bản của tích phân ba lớp . . .	219

2.2	Cách tính tích phân ba lớp	221
2.3	Đổi biến trong tích phân ba lớp	225
3	Ứng dụng của tích phân bội	231
3.1	Tính diện tích miền phẳng	231
3.2	Tính thể tích của vật thể	232
3.3	Tính diện tích mặt cong	234
3.4	Tính khối lượng và tìm tọa độ trọng tâm của vật thể	235
Chương 8 Phương trình vi phân		240
1	Các khái niệm cơ bản về phương trình vi phân	241
1.1	Khái niệm phương trình vi phân	241
1.2	Nghiệm và Bài toán Cauchy	242
2	Phương trình vi phân cấp một	243
2.1	Các khái niệm và kết quả cơ bản	243
2.2	Phương trình có biến số phân ly	246
2.3	Phương trình vi phân đẳng cấp	247
2.4	Phương trình tuyến tính	251
2.5	Phương trình Bernoulli	253
2.6	Phương trình vi phân toàn phần và thừa số tích phân	254
2.7	Phương trình Lagrange và phương trình Clairaut	258
3	Phương trình vi phân cấp hai	260
3.1	Mở đầu về phương trình vi phân cấp hai	260
3.2	Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai	262
3.3	Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai hệ số hằng	266
4	Hệ phương trình vi phân cấp một	271
4.1	Các khái niệm cơ bản	271
4.2	Hệ phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng số	273

THÔNG TIN VỀ HỌC PHẦN

Đây là học phần thuộc nhóm kiến thức cơ sở cho sinh viên khối ngành Kỹ thuật - Công nghệ, nó được giảng dạy ở học kỳ 2 của năm thứ nhất. Nếu sinh viên đã học học phần Đại số tuyến tính, thì việc tiếp thu nhiều kiến thức trong học phần này sẽ được tốt hơn.

Giảng viên sẽ dạy học phần này 75 tiết trên lớp, gồm 60 tiết lý thuyết và 15 tiết bài tập, còn sinh viên tự học 150 tiết. Thi trắc nghiệm giữa kỳ 2 lần và thi tự luận vào cuối kỳ.

Học phần này cung cấp các kiến thức cơ sở về Toán Giải tích giúp cho sinh viên có công cụ để tiếp thu được các các học phần chuyên ngành thuộc các ngành Kỹ thuật - Công nghệ. Thông qua đó, rèn luyện cho sinh viên tính cẩn thận, chính xác, tỉ mỉ và sáng tạo, đồng thời, giúp sinh viên rèn luyện và làm quen với một số kỹ năng như hợp tác làm việc nhóm, tổ chức nhóm làm việc, chuẩn bị và thuyết trình báo cáo kết quả làm việc nhóm trước tập thể.

MỞ ĐẦU

Bài giảng này dùng cho sinh viên các ngành kỹ thuật và công nghệ, nó được biên soạn theo đề cương chi tiết học phần *Giải tích* trong chương trình đào tạo đại học hệ chính qui theo chương trình tiếp cận CDIO của Trường Đại học Vinh, ban hành năm 2017. Vì đặc thù của ngành học kỹ thuật, công nghệ và thời lượng hạn chế nên chúng tôi cố gắng hình thành các khái niệm, giới thiệu các tính chất cơ bản, không đi sâu vào những vấn đề nặng về lý thuyết mà tập trung vào những kết quả và ứng dụng của nó. Bên cạnh đó, chúng tôi cũng chỉ ra những tài liệu để những người có nhu cầu nghiên cứu tìm đọc.

Nội dung chính của tập bài giảng này là lý thuyết giới hạn, liên tục, phép tính vi phân, phép tính tích phân của hàm một biến số và lý thuyết chuỗi, hàm nhiều biến, tính liên tục và tính khả vi của hàm nhiều biến, tích phân bội và đại cương về phương trình vi phân. Một số vấn đề trong đó, sinh viên đã được làm quen ở chương trình phổ thông, khi giảng dạy giảng viên có thể trình bày lướt qua như việc tính đạo hàm, khảo sát và vẽ đồ thị hàm số, tìm nguyên hàm, cách tính tích phân xác định,... Trong giáo trình này, chúng tôi vẫn trình bày đầy đủ các vấn đề trên nhưng ở mức độ chi tiết hơn.

Bài giảng này trước đây sinh viên được lên lớp nghe giảng khoảng 90 tiết. Bây giờ, đào tạo theo chương trình tiếp cận CDIO, để phát huy khả năng tự học, sinh viên chỉ lên lớp nghe giảng 75 tiết, phần còn lại phải tự nghiên cứu ở nhà. Để tạo điều kiện thuận lợi cho người đọc, sau các định nghĩa, định lý chúng tôi đưa ra nhiều ví dụ minh họa, sau mỗi chương có đưa ra các vấn đề thảo luận và hệ thống bài tập.

Đây là lần đầu tiên biên soạn bài giảng theo chương trình tiếp cận CDIO, cho nên mặc dù chúng tôi đã có rất nhiều cố gắng nhưng chắc rằng còn có những sai sót. Chúng tôi rất mong nhận được sự góp ý, phê bình của người đọc.

CHƯƠNG 1

SỐ THỰC VÀ GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

I.1. GIỚI THIỆU

Để nghiên cứu các khái niệm cơ bản của giải tích (như hội tụ, liên tục, phép tính vi phân, phép tính tích phân,...) đòi hỏi người học phải nắm vững các khái niệm cơ bản về số thực, dãy số, sự hội tụ của dãy số và các tính chất của chúng. Vì vậy, chương này trình bày đại cương về số thực, dãy số, sự hội tụ của dãy số và các tính chất của chúng.

I.2. MỤC TIÊU CỦA CHƯƠNG

Giới thiệu cấu trúc cơ bản của tập các số thực, trình bày các khái niệm và tính chất cơ bản của giới hạn dãy số.

I.3. CHUẨN ĐẦU RA CỦA CHƯƠNG

1. Giới thiệu cấu trúc cơ bản của tập các số thực, nắm được các khái niệm và phân biệt được maximum với supremum, minimum với infimum và biết cách tìm $\inf$, $\sup$ của một số tập hợp, điều kiện tồn tại $\sup$, $\inf$.

2. Phát biểu được các khái niệm về các loại dãy: dãy hội tụ, dãy con, dãy đơn điệu, dãy bị chặn.

3. Phát biểu được các tính chất cơ bản của dãy số hội tụ và biết vận dụng để tính giới hạn của dãy số.

4. Trình bày được điều kiện hội tụ của dãy đơn điệu và biết vận dụng để xét sự tồn tại giới hạn của các dãy số.

5. Trình bày được mối liên hệ giữa dãy hội tụ và dãy bị chặn.

6. Trình bày được định nghĩa dãy có giới hạn bằng $\pm\infty$ và mối quan hệ giữa dãy có giới hạn $\pm\infty$ với dãy bị chặn.

7. Biết được các cách tìm được giới hạn của một số dãy số.

I.4. NỘI DUNG CỦA CHƯƠNG

1 Số thực

1.1 Tập hợp các số thực

Vì thời lượng không cho phép, chúng ta không đi sâu nghiên cứu việc xây dựng tập các số thực và các tính chất của nó. Chúng ta công nhận sự tồn tại của tập các số thực và nhận biết tập các số thực qua những mô tả sau đây.

Như thường lệ, ta ký hiệu

Tập các số tự nhiên $\{0, 1, 2, \dots\}$ được ký hiệu là $\mathbf{N}$.

Tập các số tự nhiên dương $\{1, 2, \dots\}$ được ký hiệu là $\mathbf{N}^*$.

Tập các số nguyên $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ được ký hiệu là $\mathbf{Z}$. Các số $-1, -2, -3, -4, \dots$ được gọi là các số nguyên âm.

Tập các số hữu tỷ $\left\{\frac{m}{n} : m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}^*\right\}$ được ký hiệu là $\mathbf{Q}$. Hai số hữu tỷ $\frac{m}{n}$, $\frac{r}{s}$ được gọi là bằng nhau và viết $\frac{m}{n} = \frac{r}{s}$ nếu $ms = nr$. Người ta chứng minh được rằng mỗi số hữu tỷ có thể biểu diễn dưới dạng một số thập phân hữu hạn hay vô hạn tuần hoàn. Các số thập phân vô hạn không tuần hoàn được gọi là các số vô tỷ.

Tập hợp gồm các số hữu tỷ và các số vô tỷ được gọi là tập các số thực (nói gọn là tập số thực) và ký hiệu là $\mathbf{R}$.

Các phép toán, thứ tự (các bất đẳng thức) trong tập số thực; khái niệm và tính chất của giá trị tuyệt đối đã được giới thiệu trong chương trình toán phổ thông, ở đây không trình bày lại, muốn tìm hiểu đầy đủ các vấn đề này cũng như việc xây dựng tập số thực và tính chất của nó bạn đọc có thể tìm đọc trong các tài liệu tham khảo [1], [2], [3], [5] của chương 1. Sau đây chúng ta trình bày một số tính chất của tập các số thực cần dùng về sau.

Trên tập các số thực $\mathbf{R}$ ta trang bị 2 phép toán cộng và nhân thỏa mãn các tính chất kết hợp, giao hoán, phân phối của phép nhân với phép cộng, phép cộng có phần tử không 0 mà cộng với bất kỳ số thực x nào cũng bằng chính nó, phép nhân có phần tử đơn vị 1 mà nhân với bất kỳ số thực x nào cũng bằng chính nó, mỗi số thực có phần tử đối và mỗi số thực khác 0 có phần tử nghịch đảo.

Mỗi số thực $x \in \mathbf{R}$ được đặt tương ứng với một số thực không âm duy nhất $|x|$

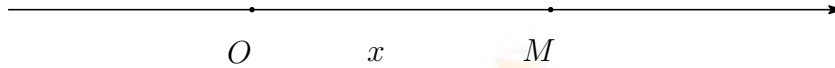
và gọi là *giá trị tuyệt đối của x* được cho bởi

$$|x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0, \\ -x & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

Trên tập các số thực $\mathbf{R}$ ta còn trang bị một thứ tự $\leq$ cho bởi

$$\text{Với } x, y \in \mathbf{R}, \quad x \leq y \text{ (hay } y \geq x) \Leftrightarrow y - x \geq 0.$$

Cho một trục số Δ (Hình 1.1).



Hình 1.1

Chọn một điểm gốc O cố định trên Δ . Người ta có thể chứng minh rằng tương ứng $\mathbf{R} \ni x \mapsto M \in \Delta$ xác định như sau:

- a) Độ dài của đoạn OM là $|x|$,
- b) M ở bên phải điểm gốc O nếu $x > 0$, ở bên trái nếu $x < 0$ và M trùng với O nếu $x = 0$, cho ta một song ánh từ $\mathbf{R}$ lên trục số Δ . Vì vậy trục số Δ xem như một biểu diễn hình học của $\mathbf{R}$.

1.2 Tập hợp số thực mở rộng

1.2.1 Định nghĩa. Tập số thực mở rộng ký hiệu là $\overline{\mathbf{R}}$ theo định nghĩa là tập $\mathbf{R}$ cùng với hai điểm được ký hiệu là $-\infty$ và $+\infty$ không thuộc $\mathbf{R}$,

$$\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \quad -\infty, +\infty \notin \mathbf{R}.$$

Điểm $-\infty$ được gọi là điểm âm vô cùng còn $+\infty$ gọi là dương vô cùng.

1.2.2 Chú ý. Ta luôn quy ước

- 1) $-\infty < x < +\infty$ với mọi $x \in \mathbf{R}$.
- 2) $-(+\infty) = -\infty$; $-(-\infty) = +\infty$.
- 3) $x + (+\infty) = +\infty$; $x + (-\infty) = -\infty$; $\frac{x}{\pm\infty} = 0$, với mọi $x \in \mathbf{R}$.
- 4) Nếu $x \in \mathbf{R}$, $x > 0$ thì $x.(+\infty) = +\infty$; $x.(-\infty) = -\infty$. Còn nếu $x \in \mathbf{R}$, $x < 0$ thì $x.(+\infty) = -\infty$; $x.(-\infty) = +\infty$.

1.3 Tập bị chặn, cận trên, cận dưới

1.3.1 Định nghĩa. Giả sử $A \subseteq \mathbf{R}$ và $y \in \mathbf{R}$. Ta nói

1) y là *cận trên* của A nếu $x \leq y$ với mọi $x \in A$. Khi đó ta còn nói A bị chặn trên bởi y .

2) y là *cận dưới* của A nếu $x \geq y$ với mọi $x \in A$. Khi đó ta còn nói A bị chặn dưới bởi y .

3) A là *bị chặn* nếu nó vừa bị chặn trên và vừa bị chặn dưới tức là tồn tại $y, z \in \mathbf{R}$ sao cho

$$y \leq x \leq z \quad \forall x \in A.$$

1.3.2 Ví dụ. 1) Cho $A = \{1 - x^2 : x \in \mathbf{R}\}$. Khi đó 1 là cận trên của A .

2) Cho $A = \{x^2 - 1 : x \in \mathbf{R}, x \neq 0\}$. Khi đó -1 là cận dưới của A .

3) Cho $A = \left\{ \frac{2x^2}{1+x^4} : x \in \mathbf{R} \right\}$. Khi đó 0 là cận dưới của A và 1 là cận trên của A . Do đó A bị chặn.

1.3.3 Định nghĩa. Giả sử $A \subseteq \mathbf{R}$ và $A \neq \emptyset$.

1) Số nhỏ nhất (nếu tồn tại là duy nhất) trong các cận trên của A gọi là *cận trên đúng* của A và viết là $\sup A$ hay $\sup_{x \in A} x$.

2) Số lớn nhất (nếu tồn tại là duy nhất) trong các cận dưới của A gọi là *cận dưới đúng* của A và viết là $\inf A$ hay $\inf_{x \in A} x$.

1.3.4 Nhận xét. a) Hiển nhiên $\sup A$ là cận trên của A và $\inf A$ là cận dưới của A .

b) $y = \sup A$ khi và chỉ khi $x \leq y \quad \forall x \in A$ và với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $x_\varepsilon \in A$ sao cho $y - \varepsilon < x_\varepsilon$.

$y = \inf A$ khi và chỉ khi $x \geq y \quad \forall x \in A$ và với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $x_\varepsilon \in A$ sao cho $x_\varepsilon < y + \varepsilon$.

c) $-\sup A = \inf(-A)$, $-\inf A = \sup(-A)$.

1.3.5 Ví dụ. 1) Cho $A = \{1 - x^2 : x \in \mathbf{R}\}$. Ta thấy 2 và 3 đều là cận trên của A . Tuy nhiên cận trên đúng của A là 1. Thật vậy, rõ ràng 1 là cận trên của A . Ta cần chứng minh 1 là cận trên nhỏ nhất. Giả sử $a < 1$. Lấy $0 < x < \sqrt{1-a}$. Ta có

$$1 - x^2 > a$$

hay a không là cận trên của A . Do đó 1 là cận trên nhỏ nhất. Vậy $\sup A = 1$.

Tương tự ta chứng minh được $B = \{1 - x^2 : x \in \mathbf{R}, x \neq 0\}$ cũng có cận trên đúng là 1. Điều này chứng tỏ cận trên đúng có thể không phải là giá trị lớn nhất.

2) Cho $A = \left\{ \frac{1}{n} : n = 1, 2, \dots \right\}$. Khi đó $\sup A = 1$ và $\inf A = 0$.

Rõ ràng $\sup A = 1$. Ta chỉ ra $\inf A = 0$. Thật vậy, vì $x = \frac{1}{n} > 0$ với mọi $n = 1, 2, \dots$, nên 0 là cận dưới của A . Với mọi $\varepsilon > 0$ nếu chọn

$$n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1 \in \mathbf{N}$$

trong đó $[x]$ ký hiệu là phần nguyên của số thực x thì $x_\varepsilon = \frac{1}{n_0} \in A$ và $x_\varepsilon < \varepsilon$. Vậy $\inf A = 0$.

Định lý sau đây cho chúng ta điều kiện để một tập là có cận trên đúng hoặc cận dưới đúng. Chứng minh định lý này có thể xem trong các tài liệu tham khảo [1], [2], [3], [5] của chương 1.

1.3.6 Định lý. (Nguyên lý supremum) Cho $A \subseteq \mathbf{R}$ và $A \neq \emptyset$.

1) Nếu A bị chặn trên thì A có cận trên đúng.

2) Nếu A bị chặn dưới thì A có cận dưới đúng.

1.3.7 Định nghĩa. Cho $a, b \in \mathbf{R}$ với $a \leq b$. Đặt

$$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} : a \leq x \leq b\}; \quad [a, b) = \{x \in \mathbf{R} : a \leq x < b\};$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbf{R} : a < x \leq b\}; \quad (a, b) = \{x \in \mathbf{R} : a < x < b\}.$$

Tập thứ nhất được gọi là *đoạn*, tập thứ hai và thứ ba gọi là *nửa đoạn*, tập cuối gọi là *khoảng* với hai đầu mút là a và b .

Giả sử $a \in \mathbf{R}$ và $\delta > 0$. Khoảng $(a - \delta, a + \delta)$ được gọi là δ -lân cận bán kính δ của a .

1.3.8 Định lý. (Bổ đề các đoạn lồng nhau) Nếu $\{[a_n, b_n]\}$ là dãy các đoạn lồng nhau giảm dần, tức là

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$$

thì $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$.

1.3.9 Định lý. Nếu α và β là hai số thực và $\alpha < \beta$ thì tồn tại số hữu tỷ r sao cho

$$\alpha < r < \beta.$$

1.3.10 Chú ý. 1) Định lý 1.3.9 nói lên tính trù mật của tập số hữu tỷ trong tập các số thực và cho thấy rằng giữa hai số thực có vô số số hữu tỷ nằm giữa chúng.

2) Muốn tìm hiểu chứng minh Định lý 1.3.9 chúng ta có thể xem trong các tài liệu tham khảo [1], [2], [3], [5] của chương 1.

1.3.11 Định nghĩa. Nếu $A \subseteq \overline{\mathbf{R}}$, $A \neq \emptyset$ không bị chặn trên hoặc $+\infty \in A$ thì ta coi $\sup A = +\infty$.

Cũng như vậy nếu $A \subseteq \overline{\mathbf{R}}$, $A \neq \emptyset$ không bị chặn dưới hoặc $-\infty \in A$ thì ta coi $\inf A = -\infty$.

2 Giới hạn của dãy số

2.1 Các khái niệm và tính chất cơ bản của dãy số hội tụ

2.1.1 Định nghĩa. Cho X là một tập hợp tùy ý. Một ánh xạ $u : \mathbf{N}^* \rightarrow X$ được gọi là một *dãy* trong X .

Nếu $X = \mathbf{R}$ thì dãy trong $\mathbf{R}$ gọi là *dãy số*. Bằng cách đặt $u_n = u(n)$, $n \in \mathbf{N}^*$, dãy u có thể viết là

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots \quad \text{hay viết gọn} \quad \{u_n\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{hoặc} \quad \{u_n\}.$$

Một phần tử của dãy được gọi là *số hạng của dãy*. Phần tử u_n được gọi là *số hạng thứ n* của dãy.

Dãy được gọi là vô hạn nếu $u(\mathbf{N}^*)$ là tập vô hạn. Nói chung ta thường xét dãy là vô hạn. Khi $u_n \neq u_m$ với mọi $n \neq m$ dãy $\{u_n\}$ được gọi là dãy phân biệt.

2.1.2 Ví dụ. 1) Ánh xạ $u : \mathbf{N}^* \rightarrow \mathbf{R}$ xác định bởi $u(n) = \frac{n}{1+n^2}$ với mọi $n \in \mathbf{N}^*$ là một dãy số. Dãy này là vô hạn. Ta còn viết dãy này là $\left\{ \frac{n}{1+n^2} \right\}_{n=1}^{\infty}$.

2) Ánh xạ $u : \mathbf{N}^* \rightarrow \mathbf{R}$ xác định bởi $u(n) = (-1)^n$ với mọi $n \in \mathbf{N}^*$ là một dãy số. Dãy này chỉ gồm hai phần tử là ± 1 .

Về sau người ta còn cho một dãy số bởi công thức xác định số hạng tổng quát của nó là $u_n = u(n), n = 1, 2, \dots$. Chẳng hạn, cho dãy số $u_n = \frac{n}{1+n^2}, n = 1, 2, \dots$

Sau đây, chúng tôi trình bày khái niệm quan trọng nhất liên quan đến dãy số là khái niệm giới hạn dãy số.

2.1.3 Định nghĩa. Cho dãy số $\{u_n\} \subset \mathbf{R}$. Nếu tồn tại $a \in \mathbf{R}$ sao cho

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \forall n > n_0 : |u_n - a| < \varepsilon$$

thì ta nói a là *giới hạn của dãy* $\{u_n\}$ và $\{u_n\}$ gọi là *hội tụ tới* a . Lúc đó, ta viết

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \quad \text{hay} \quad u_n \rightarrow a \quad \text{khi} \quad n \rightarrow \infty.$$

Một dãy có giới hạn trong $\mathbf{R}$ được gọi là *dãy hội tụ*. Các trường hợp còn lại gọi là *dãy phân kỳ*.

2.1.4 Ví dụ. 1) Dãy $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ hội tụ đến 0, bởi vì với mọi $\varepsilon > 0$ nếu ta lấy $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, thì với mọi $n > n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ ta sẽ có $\frac{1}{n} < \varepsilon$, trong đó $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ là phần nguyên của $\frac{1}{\varepsilon}$.

2) Dãy $\left\{\frac{n+1}{n-1}\right\}$ hội tụ tới 1. Thật vậy, với mọi $\varepsilon > 0$ ta có

$$\left|\frac{n+1}{n-1} - 1\right| = \frac{2}{n-1} < \varepsilon$$

với mọi $n > n_0 = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1$.

2.1.5 Định lý. Mọi dãy hội tụ đều có giới hạn duy nhất.

Chứng minh. Trước hết, ta chú ý rằng nếu $|a_1 - a_2| < \varepsilon$ với mọi $\varepsilon > 0$ thì $a_1 = a_2$. Thật vậy, giả sử $a_1 \neq a_2$. Khi đó nếu lấy $\varepsilon = \frac{|a_1 - a_2|}{2} > 0$ thì $|a_1 - a_2| > \varepsilon$. Điều này mâu thuẫn với $|a_1 - a_2| < \varepsilon$ với mọi ε . Vậy $a_1 = a_2$.

Bây giờ, nếu $\{u_n\}$ có giới hạn là a_1 và a_2 . Khi đó, theo Định nghĩa 2.1.3, với $\varepsilon > 0$ bé tùy ý

$$\exists n_1, \forall n > n_1 : |u_n - a_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists n_2, \forall n > n_2 : |u_n - a_2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Khi đó, với $n_0 > \max\{n_1, n_2\}$ ta có

$$|a_1 - a_2| \leq |a_1 - u_{n_0}| + |u_{n_0} - a_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Từ chứng minh trên ta suy ra $a_1 = a_2$. $\square$

2.1.6 Định nghĩa. Dãy số $\{u_n\} \subset \mathbf{R}$ được gọi là *bị chặn trên* nếu tồn tại $M \in \mathbf{R}$ sao cho

$$u_n \leq M, \quad \forall n \geq 1.$$

Dãy $\{u_n\} \subset \mathbf{R}$ được gọi là *bị chặn dưới* nếu tồn tại $m \in \mathbf{R}$ sao cho

$$u_n \geq m, \quad \forall n \geq 1.$$

Dãy $\{u_n\}$ vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới được gọi là *bị chặn*. Như vậy dãy $\{u_n\}$ bị chặn khi và chỉ khi

$$\sup_{n \geq 1} |u_n| < \infty.$$

2.1.7 Ví dụ. 1) Dãy $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ bị chặn vì $0 < \frac{1}{n} \leq 1$, với mọi $n \geq 1$.

2) Dãy $\{(-1)^n\}$ bị chặn vì $|(-1)^n| = 1$ với mọi $n \geq 1$.

3) Dãy $\{(-1)^n n\}$ không bị chặn trên vì với mọi $M \in \mathbf{R}$ đều tồn tại n sao cho $(-1)^n n > M$. Tương tự dãy này cũng không bị chặn dưới.

Định lý sau nêu lên mối quan hệ giữa dãy hội tụ và dãy bị chặn.

2.1.8 Định lý. Mọi dãy hội tụ đều bị chặn.

Chứng minh. Giả sử $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a \in \mathbf{R}$. Khi đó từ Định nghĩa 2.1.3 tồn tại n_0 sao cho

$$|u_n - a| < 1 \quad \forall n > n_0.$$

Đặt $M = \max\{|u_1|, |u_2|, \dots, |u_{n_0}|, |a| + 1\}$. Ta nhận được $|u_n| \leq M \quad \forall n \geq 1$. Vậy $\{u_n\}$ là dãy bị chặn. $\square$

2.1.9 Chú ý. Điều ngược lại của định lý nói chung không đúng. Dãy $\{(-1)^n\}$ bị chặn nhưng không hội tụ.

2.1.10 Định nghĩa. Cho hai dãy số $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$. Khi đó các dãy $\{u_n + v_n\}$,

$\{u_n - v_n\}$, $\{u_n v_n\}$ và $\frac{u_n}{v_n}$, ($v_n \neq 0$) lần lượt được gọi là dãy tổng, hiệu, tích và thương của hai dãy trên.

Định lý sau nói về các phép toán của dãy hội tụ. Bạn đọc có thể xem chứng minh trong tài liệu tham khảo [2], [3].

2.1.11 Định lý. Giả sử $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$ là các dãy hội tụ. Khi đó các dãy tổng, hiệu và tích của chúng cũng hội tụ và

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n + \lim_{n \rightarrow \infty} v_n;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n - \lim_{n \rightarrow \infty} v_n;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} v_n.$$

Nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n \neq 0$ thì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} v_n}.$$

Từ Định nghĩa 2.1.3 và bất đẳng thức

$$||x| - |y|| \leq |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbf{R}$$

ta có ngay định lý sau.

2.1.12 Định lý. Nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = |a|$.

2.1.13 Chú ý. 1) Chiều ngược lại của định lý là không đúng. Chẳng hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} |(-1)^n| = 1$ nhưng không tồn tại $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$.

2) Nếu $a = 0$ thì chiều ngược lại của định lý vẫn đúng, tức là $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ khi và chỉ khi $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = 0$.

Các định lý sau cho ta các tính chất quan trọng của dãy số hội tụ. Bạn đọc có thể xem chứng minh trong các tài liệu tham khảo [1], [2], [3], [5] của chương 1.

2.1.14 Định lý. Cho $\{u_n\}$ là dãy hội tụ.

1) Nếu $u_n \geq \alpha$ với mọi n đủ lớn, tức là tồn tại $n_0 \in \mathbf{N}$ sao cho $u_n \geq \alpha$ với mọi $n \geq n_0$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \geq \alpha$. Ngược lại, nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n > \alpha$ thì $u_n > \alpha$ với mọi n đủ lớn.

2) Nếu $u_n \leq \beta$ với mọi n đủ lớn thì $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \beta$. Ngược lại, nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n < \beta$ thì $u_n < \beta$ với mọi n đủ lớn.

2.1.15 Định lý. (Nguyên lý kẹp) Cho $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ là hai dãy số hội tụ, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = a$ và dãy số $\{w_n\}$. Nếu khi n đủ lớn ta có $u_n \leq w_n \leq v_n$ thì $\{w_n\}$ hội tụ và $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = a$.

Định lý trên có nhiều ứng dụng trong việc tìm giới hạn của dãy số.

2.1.16 Ví dụ. 1) Tìm giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n}$.

Ta có

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n} \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

và

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Do đó $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$

2) Tìm giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$.

Ta có

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \quad \forall n$$

và

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1.$$

Vậy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1.$$

2.2 Điều kiện hội tụ của dãy đơn điệu, số e

Trong mục này chúng ta nghiên cứu về sự hội tụ của các dãy đơn điệu.

2.2.1 Định nghĩa. Dãy số $\{u_n\}$ được gọi là *đơn điệu tăng* (tương ứng, *tăng ngặt*) nếu

$$u_n \leq u_{n+1} \quad (\text{tương ứng, } u_n < u_{n+1}) \quad \forall n \geq 1.$$

Dãy số $\{u_n\}$ được gọi là *đơn điệu giảm* (tương ứng, *giảm ngặt*) nếu

$$u_n \geq u_{n+1} \quad (\text{tương ứng, } u_n > u_{n+1}) \quad \forall n \geq 1.$$

Dãy đơn điệu tăng hoặc đơn điệu giảm được gọi chung là *dãy đơn điệu*.

Định lý sau đưa ra điều kiện đủ để dãy đơn điệu là hội tụ.

2.2.2 Định lý. 1) Nếu dãy $\{u_n\}$ đơn điệu tăng và bị chặn trên thì nó hội tụ và

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \sup_n u_n.$$

2) Nếu dãy $\{u_n\}$ đơn điệu giảm và bị chặn dưới thì nó hội tụ và

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \inf_n u_n.$$

Chứng minh của định lý này bạn đọc có thể tham khảo trong các tài liệu tham khảo [1], [2], [3], [5] của chương 1.

2.2.3 Ví dụ. Khảo sát sự hội tụ của dãy số $\{u_n\}$,

$$u_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Vì

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0 \quad \forall n$$

nên dãy $\{u_n\}$ đơn điệu tăng. Mặt khác

$$\begin{aligned} u_n &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} \\ &< 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} \\ &= 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \\ &= 2 - \frac{1}{n} < 2 \quad \forall n. \end{aligned}$$

nên dãy $\{u_n\}$ bị chặn trên. Do đó dãy $\{u_n\}$ hội tụ.

2.2.4 Ví dụ. Số e. Xét dãy số $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Ta chứng minh $\{u_n\}$ là dãy tăng. Xét $n+1$ số dương

$$x_1 = 1, x_2 = x_3 = \dots = x_{n+1} = 1 + \frac{1}{n}.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1}}{n+1} &\geq \sqrt[n+1]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n+1}} \\ \Leftrightarrow \frac{1 + n\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n+1} &\geq \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \forall n. \end{aligned}$$

Vậy $u_{n+1} > u_n \quad \forall n$ hay $\{u_n\}$ là dãy tăng.

Tiếp theo ta chứng minh $\{u_n\}$ bị chặn trên. Dùng khai triển nhị thức Newton ta có

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1!} \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1)\dots 2.1}{n!} \frac{1}{n^n}.$$

Vì

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^k} < \frac{1}{k!} < \frac{1}{2^{k-1}} \quad \forall k \geq 2$$

nên

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \frac{n}{1!} \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1)\dots 2.1}{n!} \frac{1}{n^n} \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 3 \quad \forall n. \end{aligned}$$

Vậy $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ là một dãy tăng và bị chặn trên nên nó có giới hạn. Ta đặt

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Người ta chứng minh được số e là số vô tỷ và tính được giá trị gần đúng của nó: $e \approx 2,718281\dots$

2.3 Tiêu chuẩn Cauchy

Trong mục này chúng ta trình bày nguyên lý Cauchy về sự hội tụ của dãy số.

2.3.1 Định nghĩa. Dãy số $\{u_n\}$ được gọi là *dãy cơ bản* (hay là *dãy Cauchy*) nếu với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại $n_0 \in \mathbf{N}$ sao cho

$$|u_n - u_m| < \varepsilon \quad \forall m, n > n_0.$$

Hay một cách tương đương với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại $n_0 \in \mathbf{N}$ sao cho

$$|u_{n+p} - u_n| < \varepsilon \quad \forall n > n_0, \forall p \in \mathbf{N}.$$

Định lý sau là nguyên lý Cauchy về tính đầy đủ của $\mathbf{R}$.

2.3.2 Định lý. (Nguyên lý Cauchy). Một dãy số hội tụ khi và chỉ khi dãy số đó là dãy cơ bản.