

**TRƯỜNG ĐẠI HỌC TRÀ VINH
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN
BỘ MÔN TOÁN**



**TÀI LIỆU GIẢNG DẠY
MÔN TOÁN CAO CẤP
(NGÀNH KHOA HỌC CÂY TRỒNG)**

GV biên soạn: Phạm Minh Triển

**Trà vinh, năm 2015
Lưu hành nội bộ**

MỤC LỤC

Nội dung

Trang

Chương I: Giới hạn dãy số, giới hạn hàm số một biến số	3
Bài 1: Tập hợp, ánh xạ.....	3
Bài 2: Giới hạn của dãy số.....	9
Bài 3: Giới hạn của hàm số	11
Bài 4: Hàm số liên tục	17
Chương II: Đạo hàm và vi phân của hàm một biến số	19
Bài 1: Đạo hàm của hàm số một biến số	19
Bài 2: Vi phân của hàm số một biến số	23
Bài 3: Một số ứng dụng của đạo hàm.....	26
Chương III: Tích phân của hàm một biến số	30
Bài 1: Tích phân bất định	30
Bài 2: Tích phân xác định.....	38
Bài 3: Tích phân suy rộng	43
Chương IV: Phép tính vi phân hàm nhiều biến	47
Bài 1: Hàm nhiều biến và phép tính vi phân hàm nhiều biến.....	47
Bài 2: Cực trị của hàm nhiều biến	53
Chương V: Ma trận, định thức và hệ phương trình tuyến tính	56
Bài 1: Ma trận.....	56
Bài 2: Định thức	60
Bài 3: Hệ phương trình tuyến tính.....	67
Chương VI: Phương trình vi phân	75
Bài 1: Phương trình vi phân cấp 1	75
Bài 2: Phương trình vi phân cấp hai	80
Tài liệu tham khảo	85

CHƯƠNG I
GIỚI HẠN DÃY SỐ, GIỚI HẠN HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ
BÀI 1
TẬP HỢP, ÁNH XẠ

Mục tiêu học tập: Sau khi học xong bài này, người học có thể:

- Trình bày được các khái niệm về tập hợp và ánh xạ,
- Thực hiện các phép toán trên tập hợp và ánh xạ
- Trình bày được khái niệm số phức, các phép toán về số phức
- Trình bày được khái niệm hàm số và tính chất của hàm số.

1. Tập hợp

1.1 Khái niệm

Tập hợp là một khái niệm dùng để chỉ một tổng thể nhiều đối tượng có một số tính chất nào đó.

Các tập hợp thường được ký hiệu: $A, B, C, \dots$

Mỗi đối tượng trong một tập hợp nào đó gọi là một phần tử của tập hợp, ký hiệu một phần tử x thuộc tập hợp A là $x \in A$, ngược lại ta ký hiệu $x \notin A$

Tập hợp không chứa phần tử nào gọi là tập rỗng, ký hiệu: $\emptyset$.

Xét hai tập hợp A và B , nếu mọi phần tử của A đều là phần tử của B thì ta nói A chứa trong B , ký hiệu $A \subset B$, hoặc là ta nói A là một bộ phận của B hay là tập con của B .

Nếu $A \subset B$ và $B \subset A$ ta nói $A = B$.

Lưu ý rằng A và $\emptyset$ là hai tập con hiển nhiên của tập A bất kỳ.

Ví dụ:

$N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$: Tập hợp các số tự nhiên.

$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$: Tập hợp các số nguyên

$Q = \left\{ \frac{a}{b}, a \in Z, b \in Z, b \neq 0 \right\}$: Tập hợp các số hữu tỉ

R : Tập hợp các số thực

$C = \{a + ib, a \in R, b \in R, i^2 = -1\}$: Tập hợp các số phức

Và $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$.

1.2. Các phép toán trên tập hợp.

1.2.1. Phép hợp:

Hợp của hai tập hợp A và B là một tập hợp gồm các phần tử hoặc thuộc A , hoặc thuộc B . Ký hiệu: $C = A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$

Ví dụ: $A = \{a, b, c, d\}, B = \{a, b, e, f\}$ thì $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$

1.2.2. Phép giao:

Giao của hai tập hợp A và B là một tập hợp gồm các phần tử vừa thuộc A , vừa thuộc B . Ký hiệu: $C = A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$.

Ví dụ: $A = \{a, b, c, d\}, B = \{a, b, e, f\}$ thì $A \cap B = \{a, b\}$.

1.2.3. Phép hiệu:

Hiệu của hai tập hợp A và B là một tập hợp gồm các phần tử chỉ thuộc A mà không thuộc B . Ký hiệu: $C = A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$.

Ví dụ: $A = \{a, b, c, d\}, B = \{a, b, e, f\}$ thì $A \setminus B = \{c, d\}$.

2. Ánh xạ.

Một ánh xạ từ tập A vào tập B là một tương ứng f sao cho $\forall x \in A$ có phần tử duy nhất $y \in B$ ứng với x . Ký hiệu:

$$f : A \rightarrow B$$

$$x \mapsto y$$

x : gọi là tạo ảnh của y qua f

y : gọi là ảnh của x qua f , ký hiệu $y = f(x)$

A : gọi là tập nguồn (tập xác định), B gọi là tập đích (tập giá trị) của ánh xạ f

Phân loại ánh xạ:

a/ f gọi là đơn ánh $\Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$ thì $x_1 = x_2$

b/ f gọi là toàn ánh $\Leftrightarrow \forall x \in B$ thì $\exists y \in A$ để $y = f(x)$

c/ f gọi là song ánh $\Leftrightarrow f$ vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh.

3. Sơ lược về tập hợp số phức C

3.1. Định nghĩa:

Cho tập hợp $C = \{z = a + ib, a \in R, b \in R, i^2 = -1\}$, trên tập hợp này ta định nghĩa hai phép toán cộng và nhân như sau:

$$z_1 + z_2 = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

$$\text{Hai số phức } (a + ib) = (c + id) \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

Dạng $z = a + ib$ gọi là dạng đại số của số phức.

Cho số phức $z = a + ib$ thì a gọi là phần thực ký hiệu $\text{Re}(z)$, b gọi là phần ảo ký hiệu $\text{Im}(z)$, i gọi là đơn vị ảo của số phức $z = a + ib$.

Ta ký hiệu $|z|$ là modun của số phức $z = a + ib$ và $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Cho số phức $z = a + ib$, số phức $\bar{z}$ gọi là số phức liên hợp của z nếu $\bar{z} = a - ib$.

* Một số tính chất:

$$a / \bar{\bar{z}} = z$$

$$b / \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$c / \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$d / \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

$$e / |z| \in R; |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

$$f / |z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

$$g / |z| = |\bar{z}|$$

$$h / |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$i / \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

3.2. Biểu diễn hình học của số phức:

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M(a, b)$ và số phức $z = a + ib$, ta gọi

$$OM = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = r$$

$\varphi = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{Ox}) = \text{Argument}(z)$, ký hiệu $\text{Arg}(z)$ và $0 \leq \text{Arg}(z) < 2\pi$

Lúc này ta có thể xem số phức $z = a + ib$ là một điểm $M(a, b)$ trên mặt phẳng Oxy với hoành độ và tung độ tương ứng là phần thực và phần ảo của số phức

Từ đây ta có $\begin{cases} a = r \cos \varphi \\ b = r \sin \varphi \end{cases}$ và $z = a + ib = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ta gọi đây là dạng lượng

giác của số phức.

3.3. Lũy thừa và căn số của số phức:

i/ $\forall x \in R$ ta ký hiệu: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, từ đây ta có một số tính chất sau:

$$a / \forall x, y \in R: e^{i(x+y)} = e^{ix} \cdot e^{iy}$$

$$b / \forall x \in R: e^{-ix} = \frac{1}{e^{ix}} \Rightarrow \forall n \in Z, \forall x \in R: (e^{ix})^n = e^{inx}$$

$$c / \forall x \in R: \overline{e^{ix}} = e^{-ix}$$

Số phức dạng $z = e^{ix}$ ta gọi là dạng cực.

ii/ Từ công thức $\forall n \in Z, \forall x \in R: (e^{ix})^n = e^{inx}$, ta có:

$$(e^{ix})^n = e^{inx} \Leftrightarrow (\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx \text{ (Công thức Moivre)}$$

iii/ Cho số phức $z \in C$, xét $\sqrt[n]{z}$, đặt $Z = \sqrt[n]{z}$ suy ra $Z^n = z$.

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Nếu $Z = r'(\cos \theta + i \sin \theta) \Rightarrow Z^n = (r')^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$ thì

$$r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = (r')^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) \Leftrightarrow \begin{cases} r = (r')^n \\ n\theta = \varphi + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r' = \sqrt[n]{r} \\ \theta = \frac{\varphi + k2\pi}{n}, k = \overline{0, n-1} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\varphi + k2\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi + k2\pi}{n} \right) \right), k = \overline{0, n-1}$$

$$\text{Hơn nữa: nếu } z = e^{i\varphi} \text{ thì } \sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}} e^{i \left(\frac{\varphi + k2\pi}{n} \right)}, k = \overline{0, n-1}$$

3.4. Một số ví dụ:

i/ Biểu diễn các số phức dưới đây thành dạng lượng giác và dạng cực, sau đó khai căn với bậc được chỉ ra:

$$a / z = 1, \sqrt{z}, \sqrt[3]{z}; b / z = -i, \sqrt{z}, \sqrt[4]{z}; c / z = 1 + i, \sqrt[3]{z}, \sqrt[5]{z}; d / z = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{z}, \sqrt[4]{z};$$

ii/ Giải các phương trình sau trên C:

$$a / z^2 + z + 1 = 0;$$

$$b / z^2 + 2z \cos \theta + 1 = 0, \theta \in R;$$

$$c / (3+i)z^2 - (8+6i)z + 25+5i = 0;$$

$$d / (z^2 - 8z)^2 + 40(z^2 - 8z) + 375 = 0$$

$$e / (z+i)^4 + (z^2+1)^2 + (z-i)^4 = 0$$

$$f / z^3 + (1-2i)z^2 + (1-i)z - 2i = 0, \text{ biết rằng phương trình có một nghiệm thuần ảo.}$$

$g / z^4 + 4iz^2 + 12(1+i)z - 45 = 0$, biết rằng phương trình có một nghiệm thực và một nghiệm thuần ảo.

iii/ Hãy tìm căn bậc 4 của số phức $z = 8a^2 - (1+a^2)^2 + 4a(1-a^2)i; a \in R$

iv/ Hãy biểu diễn $\cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \cos 4x, \sin 5x, \dots$ qua lũy thừa của $\sin x, \cos x$

4. Hàm số

4.1. Khái niệm hàm số

Cho $D \subset R$. Ánh xạ $f: D \rightarrow R$ được gọi là một hàm số xác định trên D , trong đó D gọi là miền xác định của f ; $T = \{f(x) | x \in D\}$ gọi là miền giá trị của f

4.2. Tính chất:

Hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = F(x)$

i/ $f = g$ khi và chỉ khi f, g có cùng miền xác định D và $\forall x \in D: f(x) = g(x)$

Ví dụ: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, $g(x) = x + 1$.

ii/ $f > g$ khi và chỉ khi f, g có cùng miền xác định D và $\forall x \in D: f(x) > g(x)$

iii/ $F = f + g \Leftrightarrow \forall x \in D$ là miền xác định của F thì $F(x) = f(x) + g(x)$.

Hiệu, tích, thương của f, g được định nghĩa tương tự.

iv/ Hàm số $y = f(x)$ gọi là tăng hay đồng biến

$$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

v/ Hàm số $y = f(x)$ gọi là giảm hay nghịch biến

$$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Ví dụ: a/ Hàm số $y = x^3$ tăng trên toàn miền xác định của nó.

b/ Hàm số $y = x^2$ tăng trên $(0, +\infty)$, và giảm trên $(-\infty, 0)$

c/ Hàm số $y = f(x)$ gọi là bị chặn trong D nếu $\exists k > 0: |f(x)| < k, \forall x \in D$.

Ví dụ: Hàm số $y = \cos x, y = \sin x$ là bị chặn trong $[-1; 1]$

vii/ Hàm số $y = f(x)$ gọi là hàm số chẵn trên miền đối xứng $(-a; a)$ nếu

$$\forall x \in (-a; a): f(-x) = f(x)$$

viii/ Hàm số $y = f(x)$ gọi là hàm số lẻ trên miền đối xứng $(-a; a)$ nếu

$$\forall x \in (-a; a): f(-x) = -f(x)$$

Ví dụ: a/ $y = x^2, y = \cos x, y = x \sin x, y = 2^{|x|}$ là các hàm số chẵn

b/ $y = x^3, y = x \cos x, y = \sin x$ là các hàm số lẻ

ix/ Hàm số $y = f(x)$ gọi là hàm số tuần hoàn nếu tồn tại số $l \neq 0$ sao cho $f(x+l) = f(x)$, số dương bé nhất trong các số l trên gọi là chu kỳ của hàm số tuần hoàn $y = f(x)$.

Ví dụ: Hàm số $y = \sin x, y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π , Hàm số $y = \tan x, y = \cot x$ tuần hoàn với chu kỳ π .

4.3. Hàm số hợp.

Khái niệm: Cho $f: X \rightarrow Y$ và $g: Y \rightarrow Z$, hàm số $h: X \rightarrow Z$ gọi là hàm số hợp của f, g , ký hiệu: $h = g \circ f$ khi $z = g(f(x))$

Ví dụ: Cho $f(x) = x^2 + 1, g(x) = \sin 2x$. Tìm $f \circ f, g \circ g, f \circ g, g \circ f$. Ta có

$$\text{a/ } f \circ f(x) = f(f(x)) = (f(x))^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 + 1$$

$$\text{b/ } g \circ g(x) = g(g(x)) = \sin 2(g(x)) = \sin 2(\sin 2x)$$

4.4. Hàm số ngược.

Cho hàm số $f: X \rightarrow Y$, nếu f là một song ánh thì f^{-1} là hàm số ngược của f .

Ví dụ: a/ $y = 2x - 2$ thì hàm số ngược của nó là $x = \frac{y+2}{2}$ (hoặc $y = \frac{x+2}{2}$)

b/ $y = \log_a x$ thì hàm số ngược của nó là $x = a^y$ (hoặc $y = a^x$)

4.5. Một số hàm số sơ cấp cơ bản:

4.5.1 Hàm số:

$y = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, miền xác định của nó phụ thuộc vào α

a/ Nếu $\alpha \in \mathbb{N}$ thì $D = \mathbb{R}$

b/ Nếu $\alpha \in \mathbb{Z}^-$ thì $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

c/ Nếu $\alpha \in \mathbb{Q}^+$ thì $D = \mathbb{R}^+$

d/ Nếu $\alpha \in \mathbb{Q}^-$ thì $D = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$

4.5.2. Hàm số:

$y = a^x, a > 0, a \neq 1$, xác định $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, hàm số tăng khi $a > 1$, giảm khi

$0 < a < 1$.

4.5.3 Hàm số:

$y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$, là hàm số ngược của $y = a^x$ xác định khi $x > 0$, hàm số tăng

khi $a > 1$, giảm khi $0 < a < 1$.

Một số tính chất cần lưu ý

a/ $\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y$

b/ $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

c/ $\log_{a^\alpha} b^\beta = \frac{\alpha}{\beta} \log_a b$

d/ $N = \log_a a^N$

e/ $\log_a b = \log_a c \log_c b$

4.5.4 Các hàm số lượng giác.

$y = \sin x, y = \cos x$ miền xác định là $\mathbb{R}$

$y = \tan x$, xác định khi $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$y = \cot x$, xác định khi $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

* Lưu ý các công thức lượng giác cơ bản.

4.5.5. Các hàm số lượng giác ngược

$y = \arcsin x$ là hàm số ngược của $y = \sin x$

$y = \arccos x$ là hàm số ngược của $y = \cos x$

$y = \arctan x$ là hàm số ngược của $y = \tan x$

$y = \operatorname{arccot} x$ là hàm số ngược của $y = \cot x$

Nếu $y = \sin x$ thì hàm ngược của nó là $x = \arcsin y$

Ta có hai đẳng thức sau:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$$

Chứng minh:

Đặt $A = \arcsin x, B = \arccos x \Rightarrow x = \sin A = \cos B = \sin(\frac{\pi}{2} - B)$

Vậy $A = \frac{\pi}{2} - B \Leftrightarrow A + B = \frac{\pi}{2}$.

4.5.6 Các hàm Hyperbol

Các hàm hyperbol là những hàm số được xác định bởi các đẳng thức sau:

$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ đọc là hàm sin hyperbol

$$chx = \frac{e^{-x} + e^x}{2} \text{ đọc là hàm cosin hyperbol}$$

$$thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^{-x} + e^x} \text{ đọc là hàm tang hyperbol}$$

$$cthx = \frac{chx}{shx} = \frac{e^{-x} + e^x}{e^x - e^{-x}} \text{ đọc là hàm cotang hyperbol}$$

Hàm cosin hyperbol là hàm chẵn, các hàm sin hyperbol, tang hyperbol, cotang hyperbol là các hàm lẻ;

$$\text{Và } sh0 = 0, ch0 = 1, ch^2x - sh^2x = 1, thx.cthx = 1$$

TaiLieu.vn

BÀI 2

GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

Mục tiêu học tập: Sau khi học xong bài này, người học có thể:

- Trình bày được các khái niệm về giới hạn dãy số và tính chất của giới hạn dãy số
- Tìm được giới hạn của một số dãy số cơ bản

1. Khái niệm:

1.1 Định nghĩa 1: Hàm số $u: N^* \rightarrow R$. Những giá trị của hàm số ứng với $n=1,2,3,\dots,n,\dots$ gọi là dãy số. Đặt $u_1 = u(1), u_2 = u(2), \dots, u_n = u(n), \dots$ Dãy số được viết dưới dạng $\{u_n\}$ hoặc $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$, các số u_i gọi là các số hạng của dãy, u_n gọi là số hạng tổng quát của dãy.

Ví dụ: a/ Dãy $\{u_n\} = \left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$ là dãy số: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$

b/ Dãy $\{u_n\} = \{n^2\}$ là dãy số: $1, 4, 9, \dots, n^2, \dots$

1.2 Định nghĩa 2: Số a được gọi là giới hạn của dãy số $\{u_n\}$ khi $n \rightarrow \infty$, ký hiệu

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$ hay $u_n \rightarrow a$ khi $n \rightarrow \infty$, nếu $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0: \forall n \geq N$ thì $|u_n - a| < \varepsilon$.

Dãy số có giới hạn thì gọi là hội tụ, ngược lại gọi là phân kỳ.

Ví dụ: Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Thật vậy, $\forall \varepsilon > 0$ bé tùy ý, ta có thể chọn một số rất

bé cụ thể nào đó, chẳng hạn $\varepsilon = \frac{1}{10^4}$.

Muốn cho $|u_n - a| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \frac{1}{10^4} \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{10^4} \Rightarrow n > 10^4 - 1$. Thì ta phải

chọn $N = 10^4 - 1$, lúc này ta sẽ có $|u_n - 1| < \varepsilon$

1.3 Định nghĩa 3: Dãy $\{u_n\}$ dần đến vô cùng khi n tiến đến vô cùng nếu với $M > 0$ lớn tùy ý, có số nguyên dương N sao cho với mọi $n > N$, ta luôn có $|u_n| > M$. Ký hiệu:

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$

Ví dụ: Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty$. Thật vậy: nếu chọn $M = 10^5$, muốn cho

$|\sqrt{n}| > 10^5 \Rightarrow n > 10^{10}$ thì ta chọn $N = 10^{10}$. Lúc này $\forall n > 10^{10} \Rightarrow |\sqrt{n}| > M$

1.4 Định nghĩa 4: Dãy $\{u_n\}$ gọi là vô cùng lớn $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = \infty$, Dãy $\{u_n\}$ gọi là vô cùng bé

$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = 0$. Lưu ý rằng nếu $\{u_n\}$ là vô cùng lớn thì $\left\{ \frac{1}{u_n} \right\}$ là vô cùng bé và ngược lại.

2. Các định lý về giới hạn của dãy

2.1. Các tính chất:

a/ Nếu dãy $\{u_n\}$ có giới hạn là a và $a > p$ ($a < p$) thì tồn tại N sao cho với mọi $n > N$ thì $u_n > p$ ($u_n < p$).

b/ Nếu dãy $\{u_n\}$ có giới hạn là a và $u_n \leq p$ ($u_n \geq p$), $\forall n$ thì $a \leq p$ ($a \geq p$).

c/ Nếu dãy $\{u_n\}$ có giới hạn là a thì a là duy nhất.

d/ Nếu dãy $\{u_n\}$ có giới hạn thì nó bị chặn, tức là $\exists k > 0: |u_n| \leq k, \forall n$.

2.2. Các định lý:

2.2.1 Định lý 1: Cho $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = b$,

a/ Nếu $u_n = v_n, \forall n$ thì $a = b$

b/ Nếu $u_n \geq v_n, \forall n$ thì $a \geq b$

2.2.2 Định lý 2: Nếu $u_n \leq v_n \leq w_n$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = a$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = a$

Ví dụ: Tính $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$

$$\text{Đặt } v_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$\text{Và } \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \leq v_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$\text{Mặt khác } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1$$

Theo định lý trên thì $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 1$

2.2.3. Các phép tính của giới hạn dãy số :

Nếu các dãy $\{u_n\}, \{v_n\}$ hội tụ

a/ thì dãy $\{u_n \pm v_n\}$ cũng hội tụ và $\lim_{n \rightarrow \infty} \{u_n \pm v_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$.

b/ thì dãy $\{u_n \cdot v_n\}$ cũng hội tụ và $\lim_{n \rightarrow \infty} \{u_n \cdot v_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$. Hơn nữa:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{k \cdot v_n\} = k \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$$

+ thì dãy $\left\{ \frac{u_n}{v_n} \right\}$ cũng hội tụ và $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{u_n}{v_n} \right\} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} v_n}, \lim_{n \rightarrow \infty} v_n \neq 0$.

Một số công thức giới hạn dãy số thường gặp:

$$\text{a. } \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} 0 & 0 < a < 1 \\ +\infty & a > 1 \end{cases}, \text{ b. } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, a > 0, \text{ c. } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1, \text{ d. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Bài tập:

1. Tìm các giới hạn:

$$\text{a. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 2n^2 + n + 3}{n^3 - 4n + 6}, \text{ b. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n + 3}{n^4 - 5n + 2}, \text{ c. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^6 + 3n^4 - 5}{n^4 - 5n + 2}, \text{ d. } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{1 - n^3}.$$

2. Tìm các giới hạn:

$$\text{a. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^4 + n - 7}}{n^2 - 5n + 2}, \text{ b. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sqrt{n^2 + 2n + 3}}{3 - \sqrt{2n^2 + 1}}, \text{ c. } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 3} - n),$$

$$\text{d. } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3n^2 + n + 3} - n\sqrt{3}), \text{ e. } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1}), \text{ f. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 + 4})}.$$

3. Cho $|q| < 1$, đặt $S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n$. Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

Áp dụng: Tìm các giới hạn: a. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 4 \cdot 3^n}{5 - 7 \cdot 3^n}$, b. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 2^n - 5 \cdot 7^n}{4^n + 3 \cdot 5^n}$

4. Tìm các giới hạn: a. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$, b. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{3n}$, c. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$, d. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}$

BÀI 3

GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

Mục tiêu học tập: Sau khi học xong bài này, người học có thể:

- Trình bày được các khái niệm về giới hạn hàm số và tính chất của giới hạn hàm số
- Tìm được giới hạn của một số hàm số cơ bản

1. Khái niệm:

1.1 Định nghĩa 1: Số a được gọi là giới hạn của hàm số $y = f(x)$ khi x dần về x_0 nếu

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$. Ký hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$.

Ví dụ: Chứng minh rằng $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$. Ta chọn một ε bé tùy ý cụ thể, chẳng hạn

$\varepsilon = \frac{1}{10^6}$. Muốn cho $\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < \frac{1}{10^6} \Rightarrow |x - 2| < \frac{1}{10^6}$ thì ta chọn $\delta = \varepsilon = \frac{1}{10^6}$. Lúc này ta

sẽ có $\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < \frac{1}{10^6}$ và $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$.

1.2 Định nghĩa 2: Ta gọi a là giới hạn của $y = f(x)$ khi $x \rightarrow \infty$ nếu

$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 : |x| > A \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$. Ký hiệu: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$

Đặc biệt:

$$a/ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 : x > A \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$b/ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 : x < -A \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

Ví dụ: Chứng minh rằng : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ vì $\forall x > 0, |f(x) - 1| = \frac{1}{x} < \varepsilon$. Ta chọn A là số

dương lớn hơn $\frac{1}{\varepsilon}$ thì $\forall x > A > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$. Vậy $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$

1.3 Định nghĩa 3: Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn bằng vô cùng khi $x \rightarrow x_0$ nếu:

$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M$. Ký hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$

Đặc biệt:

$$a/ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M$$

$$b/ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| < -M$$

Ví dụ: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x} = \infty$

1.4 Định nghĩa 4: Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn bằng vô cùng khi $x \rightarrow \infty$ nếu:

$\forall M > 0, \exists A > 0 : |x| > A \Rightarrow |f(x)| > M$. Ký hiệu $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

Đặc biệt:

$$a/ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists A > 0 : x > A \Rightarrow |f(x)| > M$$

$$b/ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists A > 0 : x < -A \Rightarrow |f(x)| > M$$

$$c/ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists A > 0 : x < -A \Rightarrow |f(x)| < -M$$

$$d/ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists A > 0 : x > A \Rightarrow |f(x)| < -M$$

Ví dụ: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

2. Một số công thức giới hạn:

$$a/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$f/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$b/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$g/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

$$c/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, a > 0$$

$$h/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$d/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

$$i/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$e/ \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$k/ \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$$

3. Giới hạn một phía

3.1 Định nghĩa: Số a được gọi là giới hạn phải (trái) của $f(x)$ tại x_0 khi x tiến về bên phải (trái) x_0 . Ký hiệu: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a$ ($\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a$)

Ví dụ: a/ Dễ thấy $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

b/ Xét hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$ tại $x = 0$, ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ và } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{-x} = -1$$

3.2 Định lý: Điều kiện cần và đủ để $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ là $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ và

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

4. Các định lý và tính chất về giới hạn:

4.1. Tính chất:

a/ Nếu $f(x) = C$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = C$

b/ Giới hạn a nếu có của hàm số là duy nhất.

4.2. Các định lý về phép tính giới hạn:

Giả sử $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = C$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ thì:

$$a/ \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = C \pm B$$

$$b/ \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x).g(x)) = C.B$$

$$c/ \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{C}{B}, B \neq 0$$

Hệ quả:

$$a/ \lim_{x \rightarrow x_0} k.f(x) = k.C$$

$$b/ \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\sum_{i=1}^n f_i(x) \right) = \sum_{i=1}^n \lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x)$$

$$c/ \lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x) \cdot \dots \cdot f_n(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f_3(x) \cdot \dots \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$$

$$\text{Đặc biệt: } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x))^n$$

4.3. Các tiêu chuẩn tồn tại giới hạn

a/ **Tiêu chuẩn Cauchy (Tiêu chuẩn 1)**: Điều kiện cần và đủ để tồn tại giới hạn của $f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$ là: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sao cho $\forall x_1, x_2$ thỏa

$$0 < |x_1 - x_0| < \delta, 0 < |x_2 - x_0| < \delta \text{ thì } |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

b/ **Tiêu chuẩn 2**: Cho $f(x)$ xác định $\forall x > 0$. Nếu

* $f(x)$ đơn điệu tăng

* $f(x)$ bị chặn trên

Thì $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

$$c/ \text{Tiêu chuẩn 3: Nếu } \begin{cases} f(x) \leq h(x) \leq g(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a \end{cases} \text{ thì } \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a$$

Ví dụ: Tính $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin^2(n!x)}{x^2}$. Ta có $0 \leq \frac{\sin^2(n!x)}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$. Suy ra $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin^2(n!x)}{x^2} = 0$

5. Vô cùng bé và vô cùng lớn

5.1. Vô cùng bé.

5.1.1 Khái niệm: Hàm số $f(x)$ gọi là vô cùng bé (VCB) khi $x \rightarrow x_0$ nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

Ví dụ: a/ $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 \Rightarrow f(x) = \sin x$ là VCB

b/ $\lim_{x \rightarrow 0} \tan x = 0 \Rightarrow f(x) = \tan x$ là VCB

c/ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$ là VCB

5.1.2 Định lý: $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow f(x) - a$ là VCB khi $x \rightarrow x_0$

Hay là: $f(x) = a + \alpha(x)$, $\alpha(x)$ là VCB khi $x \rightarrow x_0$

5.1.3 Tính chất:

a/VCB.C=VCB

b/VCB $\pm$ VCB=VCB

c/VCB.BC=VCB

d/VCB.HT=VCB

Trong đó C- hằng số, BC- đại lượng bị chặn, HT- đại lượng hội tụ

Ví dụ: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \sin x = 0$ với $\sin x$ là đại lượng bị chặn.

5.1.4 So sánh các vô cùng bé: Cho $f(x), g(x)$ là hai VCB khi $x \rightarrow x_0$. Giả sử tồn tại

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = A, 0 \leq A \leq +\infty. \text{ Khi đó}$$

a/ Nếu $A = 0$ thì ta nói $f(x)$ là VCB bậc cao hơn $g(x)$ hay $g(x)$ là VCB bậc thấp hơn $f(x)$, khi đó ta ký hiệu $f(x) = O(g(x))$

b/ Nếu $0 < A < +\infty$ thì ta nói $f(x)$ và $g(x)$ là hai VCB cùng hay cùng cấp, đặc biệt khi $A = 1$ ta nói $f(x)$ và $g(x)$ là hai VCB tương đương, khi đó ta ký hiệu $f(x) \sim g(x)$

c/ Nếu $A = +\infty$ thì ta nói $g(x)$ là VCB bậc cao hơn $f(x)$ hay $f(x)$ là VCB bậc thấp hơn $g(x)$, khi đó ta ký hiệu $g(x) = O(f(x))$.

Ngược lại nếu giới hạn trên không tồn tại thì ta nói $g(x)$ và $f(x)$ không so sánh được.

5.1.5 Định lý:

a/ Nếu $f(x) \sim g(x), h(x) \sim t(x)$ trong đó $f(x), g(x)$ là hai VCB khi $x \rightarrow x_0$ thì

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{h(x)}{t(x)} \right).$$

b/ Giả sử $f_i(x), g_j(x), i=1, n; j=1, m$ là các VCB khi $x \rightarrow x_0$. Khi đó

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)}{g_1(x) + g_2(x) + \dots + g_m(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f_{i_0}(x)}{g_{j_0}(x)} \right). \text{ Trong đó } f_{i_0}(x) \text{ là VCB bậc thấp nhất}$$

trong các $f_i(x)$ và $g_{j_0}(x)$ là VCB bậc thấp nhất trong các $g_j(x)$

Ví dụ: Khi $x \rightarrow 0$ thì các VCB sau là tương đương:

$$\sin x \sim x, \tan x \sim x, \arcsin x \sim x, \arctan x \sim x, \ln(x+1) \sim x, e^x - 1 \sim x, (1+x)^a - 1 \sim ax, a^x - 1 \sim x \ln a$$

Ví dụ: Tính $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{e^{2x} - 1}$. Ta có khi $x \rightarrow 0$ thì $\sin 5x \sim 5x, e^{2x} - 1 \sim 2x$

$$\text{Vậy } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{e^{2x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}$$

5.2. Vô cùng lớn.

5.2.1 Khái niệm: Hàm số $f(x)$ gọi là vô cùng lớn (VCL) khi $x \rightarrow x_0$ nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$

Ví dụ: a/ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x = \infty \Rightarrow f(x) = \tan x$ là VCL

b/ $\lim_{x \rightarrow 0} \cot anx = \infty \Rightarrow f(x) = \cot anx$ là VCL

c/ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$ là VCL

5.2.2 Tính chất:

a/ VCL.VCL=VCL

b/ VCL+BC=VCL

c/ VCL+HT=VCL

d/ Tổng hai VCL có thể không là VCL, nhưng tổng hai VCL cùng dấu là VCL

e/ $\frac{1}{\text{VCL}} = \text{VCB}, \frac{1}{\text{VCB}} = \text{VCL}$

Trong đó BC- đại lượng bị chặn, HT- đại lượng hội tụ

5.2.3 So sánh các vô cùng lớn: Cho $f(x), g(x)$ là hai VCL khi $x \rightarrow x_0$. Giả sử tồn tại

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = A, 0 \leq A \leq +\infty. \text{ Khi đó}$$

a/ Nếu $A=0$ thì ta nói $f(x)$ là VCL bậc thấp hơn $g(x)$ hay $g(x)$ là VCL bậc cao hơn $f(x)$

b/ Nếu $0 < A < +\infty$ thì ta nói $f(x)$ và $g(x)$ là hai VCL cùng hay cùng cấp, đặc biệt khi $A=1$ ta nói $f(x)$ và $g(x)$ là hai VCL tương đương, khi đó ta ký hiệu $f(x) \sim g(x)$

c/ Nếu $A=+\infty$ thì ta nói $f(x)$ là VCL bậc cao hơn $g(x)$ hay $g(x)$ là VCL bậc thấp hơn $f(x)$

Ngược lại nếu giới hạn trên không tồn tại thì ta nói $g(x)$ và $f(x)$ không so sánh được.

5.2.4 Định lý:

a/ Nếu $f(x) \sim g(x), h(x) \sim t(x)$ trong đó $f(x), g(x)$ là hai VCL khi $x \rightarrow x_0$ thì

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{h(x)}{t(x)} \right).$$

b/ Giả sử $f_i(x), g_j(x), i = 1, n; j = 1, m$ là các VCL khi $x \rightarrow x_0$. Khi đó

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)}{g_1(x) + g_2(x) + \dots + g_m(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f_{i_0}(x)}{g_{j_0}(x)} \right).$$
 Trong đó $f_{i_0}(x)$ là VCL bậc cao nhất trong

các $f_i(x)$ và $g_{j_0}(x)$ là VCL bậc cao nhất trong các $g_j(x)$

Ví dụ: Tính $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 + x^3 - 2x^2 + x - 7}{-2x^7 + 4x^6 + 3x + 2}$. Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 + x^3 - 2x^2 + x - 7}{-2x^7 + 4x^6 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5}{-2x^7} = 0$

Lưu ý: Trong quá trình giải các bài tập ta sẽ gặp các dạng vô định:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 0^\infty, 1^\infty$$

Bài tập:

1. Tìm các giới hạn:

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$, b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$, c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$, d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

e. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$, f. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{(x^2 - 5x + 4)}$, g. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 - x^2 - 1} - x)$,

h. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{(x+a)(x+b)(x+c)} - x)$, i. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x})$.

2. Tìm các giới hạn:

a. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}}$, b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5}$, c.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$$

d. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(2x-3)^{30}(3x+2)^{20}}{(2x+1)^{50}}$, e. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x+1)(x^2+1)(x^3+1)\dots(x^n+1)}{((nx)^n + 1)^{\frac{n+1}{2}}}$,

f. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + x^3 + \dots + x^n - n}{x - 1}$, HD: Lưu ý công thức $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

g. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, h. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x}$.

3. Tìm các giới hạn:

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x}$, b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$, c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \sin 3x \cdot \sin 5x}{45x^3}$, d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{3x}$

e. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x \dots \sin nx}{n! x^n}$.

4. Tìm các giới hạn:

a. $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}}$, b. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{x})^x$, c. $\lim_{x \rightarrow \infty} (2 - \frac{3}{x})^x$, d. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1})^{x^2}$

e. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{x}},$ f. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}}$

Tailieu.vn

BÀI 4 HÀM SỐ LIÊN TỤC

Mục tiêu học tập: Sau khi học xong bài này, người học có thể:

Trình bày được các khái niệm về hàm số liên tục và tính chất của hàm số liên tục

1. Khái niệm:

1.1 Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên miền D , $x_0 \in D$. $y = f(x)$ được gọi là liên tục tại $x = x_0$ nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Nếu $y = f(x)$ không liên tục tại $x = x_0$ ta nói $y = f(x)$ gián đoạn tại $x = x_0$

Ví dụ: Xét hàm số $y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$. Vậy $f(x)$ liên tục tại $x = 0$

1.2 Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên miền D , $x_0 \in D$. Khi đó $y = f(x)$ được gọi là liên tục trái (phải) tại $x = x_0$ nếu: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ ($\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$)

$y = f(x)$ được gọi là liên tục trong $(a; b)$ nếu $y = f(x)$ liên tục tại mọi điểm của $(a; b)$

2. Các tính chất và định lý:

2.2 Định lý: Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = x_0$ khi và chỉ khi $y = f(x)$ liên tục trái và liên tục phải tại $x = x_0$

Ví dụ: Xét hàm số $y = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

Ta có $a / f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$.
b / $f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{|x|} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = -1 \neq f(0)$.
Vậy $f(x)$ liên tục phải tại $x = 0$,

nhưng không liên tục trái tại $x = 0$.

2.3 Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D . Khi đó tập hợp các điểm $M(x, f(x))$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy, khi x thay đổi trong D được gọi là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ trên D

2.4 Định lý: Đồ thị của hàm số liên tục là một đường liên nét.

2.5 Định lý: Nếu $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì $y = f(x)$ bị chặn trên $[a; b]$, tức là $\exists M > 0: |f(x)| \leq M, \forall x \in D$

2.6 Định lý: Nếu $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $[a; b]$, tức là $\exists x_1, x_2: \begin{cases} f(x_1) \geq f(x), \forall x \in D \\ f(x_2) \leq f(x), \forall x \in D \end{cases}$

2.7 Định lý: Nếu $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì $y = f(x)$ nhận mọi giá trị trung gian giữa $f(a)$ và $f(b)$

2.8 Định lý: Nếu $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì có $c \in (a; b)$ để $f(c) = 0$, nói cách khác phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong $(a; b)$

Ví dụ: Chứng minh rằng phương trình $x^9 - 3x^4 + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm trong $(0; 1)$.

3. Điểm gián đoạn, phân loại điểm gián đoạn:

x_0 là điểm gián đoạn của $y = f(x)$ khi

a/ $y = f(x)$ không xác định tại x_0

b/ Không tồn tại giới hạn của $y = f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$

c/ Tồn tại giới hạn của $y = f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$, nhưng giới hạn này khác $f(x_0)$

Như vậy ta có thể phân loại các điểm gián đoạn như sau:

d/ x_0 là điểm gián đoạn loại 1 khi $\exists f(x_0^-), f(x_0^+)$. Đặc biệt khi $f(x_0^-) = f(x_0^+)$ thì ta nói x_0 là điểm gián đoạn có thể bỏ được.

e/ Các trường hợp khác gọi là điểm gián đoạn loại 2.

CHƯƠNG II
ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CỦA HÀM MỘT BIẾN SỐ
BÀI 1
ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ

Mục tiêu học tập: Sau khi học xong bài này, người học có thể:
Trình bày được các khái niệm về đạo hàm và tính chất của đạo hàm hàm số, tính được đạo hàm của hàm số hợp, hàm số ngược.

1. Khái niệm

1.1. Bài toán mở đầu:

Xét đường cong $(C): y = f(x)$, một điểm $M_0(x_0, y_0)$ cố định trên (C) và một cát tuyến MM_0 . Nếu $M(x, y)$ chạy trên đường cong (C) đến điểm $M_0(x_0, y_0)$ mà cát tuyến MM_0 dần tới một vị trí tới hạn TM_0 , thì đường thẳng TM_0 gọi là tiếp tuyến của đường cong (C) tại điểm $M_0(x_0, y_0)$. Vậy khi nào thì $(C): y = f(x)$ có tiếp tuyến tại $M_0(x_0, y_0)$ và hệ số góc của tiếp tuyến đó được tính như thế nào?

Đặt $\begin{cases} \Delta x = x - x_0 \\ \Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \end{cases}$ thì hệ số góc của cát tuyến MM_0 là $\tan \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Cho điểm $M_0(x_0, y_0)$ tiến dần đến M dọc theo đường cong (C) , khi đó $\Delta x \rightarrow 0$, nếu tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ dần tới một giới hạn xác định thì β cũng dần đến một góc xác định là α , nghĩa là cát tuyến MM_0 dần tới vị trí tới hạn TM_0 và tạo với Ox một góc α .

Từ đó, nếu tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ dần tới một giới hạn xác định khi $\Delta x \rightarrow 0$ thì đường cong $(C): y = f(x)$ có tiếp tuyến tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ và hệ số góc của tiếp tuyến là:

$$\tan \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \tan \beta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

1.2. Định nghĩa:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên miền D , $x_0 \in D$. Cho biến x số gia Δx thỏa $x_0 + \Delta x \in D$. Xét số gia hàm số: $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Ta gọi giới hạn $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = I$ (nếu tồn tại hữu hạn) là đạo hàm của $y = f(x)$ tại x_0 và ta cũng nói $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 .

Ký hiệu: $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = I$

Nhận xét: nếu đặt $x = x_0 + \Delta x$ thì $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = I$.

Ví dụ: Tính đạo hàm của các hàm số sau bằng định nghĩa:

a/ $y = x^2$, b/ $y = x^3$, c/ $y = \sin x$, d/ $y = \sqrt{x}$

1.3. Đạo hàm một phía:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên miền D , $x_0 \in D$.

Ta gọi giới hạn $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = I$ ($\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x} = I$) (nếu tồn tại hữu hạn) là đạo hàm phải (trái) của $y = f(x)$ tại x_0 . Ký hiệu: + Đạo hàm phải $I = f'_+(x_0)$
+ Đạo hàm trái $I = f'_-(x_0)$

1.4 Định lý: $\exists f'(x_0) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists f'_+(x_0), \exists f'_-(x_0) \\ f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \end{cases}$

2. Các quy tắc tính đạo hàm:

$$a / (C)' = 0$$

$$b / (U \pm V)' = U' \pm V'$$

$$c / (CU)' = C(U)'$$

$$d / (U.V)' = U'.V + U.V'$$

$$e / \left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'.V - U.V'}{V^2} (V \neq 0)$$

3. Đạo hàm hàm hợp, hàm ngược:

3.1. Đạo hàm hàm hợp:

Giả sử hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm $u'(x_0)$ tại x_0 và $u_0 = u(x_0)$. Tại $u_0 = u(x_0)$ hàm $y = y(u)$ có đạo hàm $y'(u_0)$ đối với biến u . Khi đó tại x_0 hàm số $y = y(u(x))$ có đạo hàm $y'_x(x_0)$ theo biến x và $y'_x(x_0) = y'_u(u_0).u'_x(x_0)$ hay $y'_x = y'_u.u'_x$.

Ví dụ:

$$a / ((x^3 + 4)^5)' = 5.(x^3 + 4)^4 . 3x^2$$

$$b / (\sin^4(\ln x))' = 4 \sin^3(\ln x) . \frac{1}{x}$$

3.2. Đạo hàm hàm ngược:

Giả sử các điều kiện sau được thỏa:

a/ Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y'(x_0) \neq 0$ tại x_0

b/ Hàm số $y = f(x)$ là đơn ánh.

c/ Hàm ngược $x = g(y)$ liên tục tại $y_0 = f(x_0)$

Khi đó hàm số ngược của hàm số $y = f(x)$ sẽ có đạo hàm $x'_y(y_0)$ tại y_0 và

$$x'_y(y_0) = \frac{1}{y'_x(x_0)}$$

Ta thường ký hiệu hàm ngược là $g(y)$ là $f^{-1}(x)$ và khi đó $(f^{-1})' = \frac{1}{f'}$

Ví dụ: Tính đạo hàm của hàm số: $y = \arctan x$, ta có $y = \arctan x$ là hàm số ngược của

hàm số $x = \tan y$, nên $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$.

4. Các công thức đạo hàm cơ bản: