

TRƯỜNG ĐẠI HỌC TRÀ VINH
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN
BỘ MÔN TOÁN



TÀI LIỆU GIẢNG DẠY MÔN TOÁN CAO CẤP A2

GV biên soạn: TRẦN THIỆN KHẢI

Trà Vinh, tháng 02-2013

Lưu hành nội bộ

MỤC LỤC

Nội dung	Trang
CHƯƠNG 1: PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN	5
BÀI 1: KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ HÀM NHIỀU BIẾN	5
1.1. Khái niệm cơ bản về hàm nhiều biến	5
1.1.1. R^n và các tập con	5
1.1.2. Định nghĩa hàm nhiều biến.....	7
1.1.3. Các ví dụ:	8
1.2. Biểu diễn hình học của hàm hai biến số	9
1.3. Giới hạn của hàm nhiều biến số: $Z = f(x; y)$	11
1.3.1. Định nghĩa giới hạn	11
1.3.2. Các ví dụ:	12
1.3.3. Chú ý.....	12
1.4. Sự liên tục của hàm số $Z = f(x; y)$	12
1.4.1. Định nghĩa 1	12
1.4.2. Định nghĩa 2	12
BÀI 2: ĐẠO HÀM RIÊNG VÀ VI PHÂN	15
2.1. Đạo hàm riêng	15
2.1.1. Định nghĩa	15
2.1.2. Đạo hàm riêng cấp cao	18
2.2. Vi phân toàn phần	19
2.2.1. Định nghĩa	19
2.2.2. Điều kiện khả vi.....	20
2.2.3. Vi phân cấp cao	21
2.2.4. Ứng dụng để tính gần đúng	22
2.3. Đạo hàm của hàm hợp	24
2.4. Đạo hàm của hàm ẩn	26
BÀI 3: CỰC TRỊ CỦA HÀM NHIỀU BIẾN	30
3.1. Cực trị tự do	30
3.2. Quy tắc tìm cực trị	30
3.3. Cực trị có điều kiện	32
3.3.1. Định nghĩa	32
3.3.2. Quy tắc thế.....	33
3.3.3. Phương pháp nhân tử của Lagrange	33
3.4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trong miền đóng	35
CHƯƠNG 2: TÍCH PHÂN HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ VÀ ỨNG DỤNG	37
BÀI 1: TÍCH PHÂN HAI LỚP	37
1.1. Khái niệm về tích phân hai lớp	37
1.1.1. Bài toán về thể tích của vật thể hình trụ cong	37
1.1.2. Định nghĩa tích phân hai lớp	38
1.2. Cách tính tích phân hai lớp	39
1.2.1. Đưa về tích phân lặp	39

1.2.2. Đổi biến trong tích phân kép	40
BÀI 2: TÍCH PHÂN BA LỚP	43
2.1. Định nghĩa và tính chất	43
2.1.1. Định nghĩa	43
2.1.2. Tính chất	43
2.2. Cách tính tích phân bội ba	44
2.2.1. Tích phân bội ba trong hệ tọa độ Descartes	44
2.2.2. Tính tích phân bội ba trong hệ tọa độ trụ	46
2.2.3. Tính tích phân bội ba trong hệ tọa độ cầu	47
BÀI 3: ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN HAI LỚP VÀ BA LỚP	49
3.1. Ứng dụng trong hình học	49
3.1.1. Tính diện tích hình phẳng.....	49
3.1.2. Tính thể tích của vật thể V	49
3.1.3. Tính thể tích của vật thể được giới hạn bởi các mặt	50
3.1.4. Tính diện tích của mặt cong	50
3.2. Ứng dụng trong vật lý	52
3.2.1. Tính khối lượng của vật thể.....	52
3.2.2. Tính tọa độ trọng tâm của một vật thể.....	53
CHƯƠNG 3: TÍCH PHÂN ĐƯỜNG, TÍCH PHÂN MẶT VÀ ỨNG DỤNG	56
BÀI 1: TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI I	56
1.1. Định nghĩa	56
1.2. Cách tính tích phân đường loại I	57
BÀI 2 : TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI II	59
2.1. Bài toán công của một lực biến thiên	59
2.2. Định nghĩa tích phân đường loại II	60
2.3. Cách tính tích phân đường loại II	61
2.4. Mối liên hệ giữa hai loại tích phân đường	63
2.5. Công thức Green	63
2.6. Điều kiện để tích phân đường không phụ thuộc vào đường lấy tích phân	65
BÀI 3: TÍCH PHÂN MẶT LOẠI I	69
3.1. Định nghĩa	69
3.2. Cách tính tích phân mặt loại I	69
BÀI 4: TÍCH PHÂN MẶT LOẠI II	71
4.1. Mặt cong hai phía	71
4.2. Định nghĩa tích phân mặt loại II	71
4.3. Cách tính tích phân mặt loại II	73
4.4. Công thức OXTRÔGRATXKI	75
4.5. Công thức Xtóc	76
CHƯƠNG 4: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP I, II VÀ ỨNG DỤNG	78
BÀI 1: TỔNG QUÁT VỀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN	78
1.1. Các bài toán thực tế	78
1.1.1. Bài toán 1:.....	78
1.1.2. Bài toán 2.....	79

1.2. Định nghĩa phương trình vi phân	79
BÀI 2: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP I	80
2.1. Tổng quát về phương trình vi phân cấp I	80
2.1.1. Định nghĩa	80
2.1.2. Định lý về tồn tại và duy nhất nghiệm	80
2.1.3. Nghiệm tổng quát và nghiệm riêng của phương trình vi phân cấp một	80
2.2. Phương trình vi phân có biến phân ly	81
2.2.1. Định nghĩa	81
2.2.2. Cách giải	81
2.3. Phương trình vi phân đẳng cấp	83
2.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp I	85
2.4.1. Định nghĩa	85
2.4.2. Cách giải	85
2.5. Phương trình BECNOULLI	86
2.5.1. Định nghĩa	86
2.5.2. Cách giải	86
2.6. Phương trình vi phân toàn phần	88
2.6.1. Định nghĩa	88
2.6.2. Cách giải	88
BÀI 3: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP II	92
3.1. Tổng quát về phương trình vi phân cấp II	92
3.1.1. Định nghĩa	92
3.1.2. Định lý về sự tồn tại và duy nhất của phương trình vi phân cấp hai.....	92
3.1.3. Nghiệm tổng quát và nghiệm riêng của phương trình vi phân cấp hai .	92
3.2. Các phương trình vi phân cấp hai giảm cấp được	93
3.2.1. Loại 1: Vế phải của phương trình không chứa y và y'	93
3.2.2. Loại 2: Khi vế phải của phương trình không chứa y	94
3.2.3. Loại 3: Vế phải không chứa x	94
3.3. Phương trình vi phân tuyến tính cấp II	95
3.3.1. Định nghĩa	95
3.3.2. Phương trình thuần nhất	95
3.3.3. Phương trình vi phân tuyến tính cấp II không thuần nhất.....	98
3.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai với hệ số là hằng số	99
3.4.1. Định nghĩa	99
3.4.2. Cách giải	100
TÀI LIỆU THAM KHẢO	105

CHƯƠNG 1: PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN

Phép tính vi phân hàm số nhiều biến số là sự mở rộng một cách tự nhiên và cần thiết của phép tính vi phân hàm số một biến số. Các bài toán thực tế thường xuất hiện sự phụ thuộc một biến số vào hai biến số hoặc nhiều hơn, chẳng hạn nhiệt độ T của một chất lỏng biến đổi theo độ sâu z và thời gian t theo công thức $T = e^{-t}z$, nhiệt lượng toả ra trên dây dẫn phụ thuộc vào điện trở của dây, cường độ của dòng và thời gian dẫn điện theo công thức $Q = 0,24RI^2t, \dots$. Vì vậy, khảo sát hàm số nhiều biến số vừa mang tính tổng quát vừa mang tính thực tiễn. Để học tốt nội dung này, ngoài việc nắm vững các phép tính đạo hàm của hàm một biến số, sinh viên phải có các kiến thức về hình học không gian. Trong nội dung này, yêu cầu sinh viên nắm vững các nội dung chính như các khái niệm chung của không gian R^n (n chiều), phép tính đạo hàm riêng và vi phân toàn phần, và ứng dụng đạo hàm, vi phân tính các bài toán cực trị.

BÀI 1: KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ HÀM NHIỀU BIẾN

❖ **Mục tiêu học tập:** Sau khi học xong bài này, người học có thể:

- Mô tả được miền xác định và đồ thị của hàm hai biến.
- Tính được giới hạn và sự liên tục của hàm hai biến số.

1.1. Khái niệm cơ bản về hàm nhiều biến

1.1.1. R^n và các tập con

Với n là một số nguyên dương, ký hiệu R^n được dùng để chỉ tập hợp tất cả các bộ n số thực $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ và ta thường gọi R^n là không gian (thực) n chiều. Khi bộ số thực $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ được đặt tên là P thì ta viết là: $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ và gọi nó là một điểm trong không gian R^n .

Cho 2 điểm $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ và $Q(y_1, y_2, \dots, y_n)$ trong R^n , khoảng cách giữa hai điểm P và Q , ký hiệu là $d(P, Q)$ được định nghĩa bởi:

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

Khoảng cách này thỏa bất đẳng thức tam giác sau đây:

$$d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q), \text{ với 3 điểm } P, Q, R \text{ tùy ý.}$$

Điểm $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ còn được viết gọn dưới dạng $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ với $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ và $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, khoảng cách giữa x và y còn được viết bởi:

$$|x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

Cho điểm $P \in R^n$ và r là số thực dương, tập hợp $B(P, r) = \{Q \in R^n \mid d(P, Q) < r\}$ được gọi là hình cầu mở tâm P bán kính r hay là lân cận bán kính r của P .

Tập hợp E trong R^n được gọi là bị chặn nếu có $r > 0$ sao cho $E \subset B(O, r)$ với O là điểm $O(0, 0, \dots, 0)$.

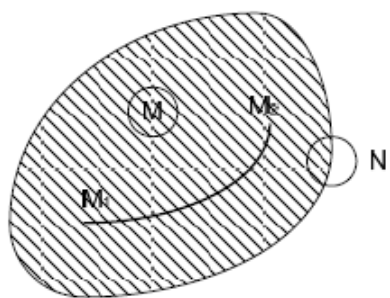
* Cho $M_0 \in R^n$ và $\varepsilon > 0$. Tập $\Omega_\varepsilon(M_0) = \{M \in R^n \mid d(M, M_0) < \varepsilon\}$ gọi là ε - lân cận

hoặc lân cận bán kính ε của M_0 hoặc hình cầu mở tâm M_0 bán kính ε (H.1a).

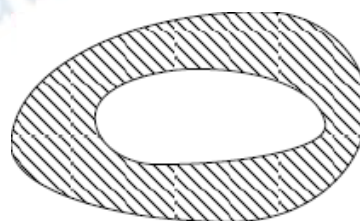
* Cho $E \subset \mathbb{R}^n$. Điểm $M \in E$ gọi là điểm trong của E nếu có $\Omega_\varepsilon(M) \subset E$ ($\exists \varepsilon > 0$). Điểm $N \in \mathbb{R}^n$ gọi là điểm biên của E nếu bất kỳ $\Omega_\varepsilon(M)$ đều chứa những điểm thuộc E và điểm không thuộc E ($\forall \varepsilon > 0$). Tập E gọi là mở nếu mọi điểm của nó đều là điểm trong, gọi là đóng nếu nó chứa mọi điểm biên của nó. Tập các điểm biên của E kí hiệu ∂E . Bao đóng của E hay tập E đóng ký hiệu $\bar{E}$ và có $\bar{E} = E \cup \partial E$ (H.1a).

* Tập E gọi là bị chặn hay giới nội nếu như tồn tại số N sao cho $E \subset \Omega_N(0)$.

* Tập E gọi là liên thông nếu mỗi cặp điểm M_1, M_2 trong E đều được nối với nhau bởi một đường cong liên tục nào đó nằm trọn trong E . Tập liên thông E gọi là đơn liên nếu nó bị giới hạn bởi một mặt kín (một đường cong kín trong $\mathbb{R}^2$; một mặt cong kín trong $\mathbb{R}^3$) (H.1a). Tập liên thông E gọi là đa liên nếu nó bị giới hạn bởi từ hai mặt kín trở lên rời nhau từng đôi một (H.1b).



(Hình 1a)



(Hình 1b)

Ví dụ 1: Xét các tập sau trong $\mathbb{R}^2$.

$$A = \{(x; y) : x^2 + y^2 < 4\}$$

$$B = \{(1;2), (-1;0), (0;0)\} \text{ và } \mathbb{R}^2$$

Giải:

$\partial A = \{(x; y) : x^2 + y^2 = 4\}$ - đường tròn tâm O bán kính 2, $A = \{(x; y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$: hình tròn kể cả biên.

$A, \mathbb{R}^2$ là các tập liên thông, B không liên thông (gồm 3 điểm rời rạc).

A, B là các tập giới nội, $\mathbb{R}^2$ không giới nội (cả mặt phẳng Oxy).

Cụ thể cho $\mathbb{R}^2$: Hình tròn mở tâm $M_0(x_0, y_0)$, bán kính $r > 0$

$$B(M_0, r) = \{M(x; y) \in \mathbb{R}^2 : d(M, M_0) < r\} = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\}$$

Hình tròn mở này cũng gọi là một r -lân cận của M_0 và mọi tập con của $\mathbb{R}^2$ chứa một r -lân cận nào đó của M_0 gọi là một lân cận của M_0 .

Xét một điểm $M_0 \in \mathbb{R}^2$ và một tập $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Có thể xảy ra ba trường hợp loại trừ nhau sau đây:

- Có một lân cận của M_0 nằm trọn trong A , nghĩa là chỉ chứa những điểm của A . Khi đó M_0 được gọi là điểm trong của tập A .
- Có một lân cận của M_0 nằm trọn ngoài A , nghĩa là hoàn toàn không chứa điểm

nào của A. Khi đó M_0 là một điểm trong của phần bù của A.

- Bất kỳ lân cận nào của M_0 cũng có cả những điểm của A và những điểm không thuộc A. Khi đó M_0 là một điểm biên của A.

Chú ý. 1) Điểm trong của A là một điểm thuộc A.

2) Điểm biên của A có thể thuộc hoặc không thuộc A.

+ Một tập hợp được gọi là mở nếu mọi điểm thuộc nó đều là điểm trong của nó.

+ Một tập hợp được gọi là đóng nếu mọi điểm không thuộc nó đều là điểm trong của phần bù của nó.

+ Một tập hợp là đóng nếu phần bù của nó là mở.

+ Một tập hợp là mở nếu nó không chứa điểm biên nào của nó.

+ Một tập hợp là đóng nếu nó chứa tất cả các điểm biên của nó.

+ Điểm M_0 được gọi là điểm tụ của A, nếu mọi lân cận của M_0 đều chứa vô số điểm của A.

Chú ý 1) Điểm tụ có thể thuộc A, có thể không thuộc A.

2) Có những tập hợp không là tập đóng, cũng không là tập mở.

Ví dụ 2: Xét tập hợp các điểm trong mặt phẳng. Cho tập hợp A

$$A = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 < 1\}$$

Tất cả các điểm trong của A: $\{(x;y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 < 1\}$

Tất cả các điểm biên của A: $\{(x;y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 = 1\}$

Tất cả các điểm tụ của A: $\{(x;y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1\}$

Tập A là tập mở.

Ví dụ 3: Xét tập hợp các điểm trong mặt phẳng. Cho A là tập hợp các điểm nằm trong hình tròn đơn vị mà tọa độ các điểm là các số hữu tỉ.

$$A = \{(x;y) \in \mathbb{Q}^2: x^2 + y^2 < 1\}$$

A không có điểm trong.

Tập điểm biên và điểm tụ bằng nhau: $\{(x;y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1\}$

A không đóng, không mở.

1.1.2. Định nghĩa hàm nhiều biến

Ví dụ 4: 1) Nhiệt độ T tại một điểm trên bề mặt trái đất tại một thời điểm t cho trước phụ thuộc vào kinh độ x và vĩ độ y của điểm này. Chúng ta có thể coi T là một hàm theo hai biến x và y, ký hiệu: $T = T(x,y)$

2) Thể tích V của một bình hình trụ phụ thuộc vào bán kính đáy r và chiều cao h. Thực tế ta biết $V = \pi r^2 h$. Khi đó V là một hàm hai biến theo r và h: $V = \pi r^2 h$.

Một ánh xạ f từ tập D của các cặp số thực $(x; y)$ vào tập R của các số thực được gọi là hàm của hai biến số độc lập x, y .

Ký hiệu: $f = f(x; y)$ hay $Z = f(x; y)$

Nghĩa là mỗi một cặp số thực $(x; y) \in D$ được tương ứng với một số thực xác định $f = f(x; y)$. Tập D được gọi là miền xác định của hàm hai biến số $f = f(x; y)$.

Tương tự như vậy, nếu với mỗi một bộ của n biến số độc lập $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ được tương ứng với một số thực u thì u được gọi là hàm của n biến số độc lập $x_1; x_2; \dots; x_n$.

Ký hiệu: $u = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$

$\forall (x; y)$ thì $\exists M(x; y) \in Oxy$ và ngược lại.

$\Rightarrow$ Nếu với mỗi $M(x; y) \in D$ được tương ứng với một số thực xác định f thì f được coi là hàm của điểm $M(x; y)$: $f = f(M) = f(x; y)$

* **Chú ý 1:** Cách gọi và kí hiệu như trên rất gọn và tiện lợi cho ta hình dung một cách trực quan về mối liên hệ giữa biến số và hàm số.

- Miền xác định D của hàm $f = f(x; y)$ có thể là một tập hợp điểm của phần mặt phẳng Oxy được giới hạn bởi một đường cong kín nào đó.

- Đường cong kín đó được gọi là biên của miền.

- Nếu các điểm trên biên của miền D cũng thuộc miền xác định của hàm thì miền xác định của hàm là một miền đóng (kín).

- Nếu các điểm trên biên của miền D không thuộc miền xác định của hàm thì miền xác định của hàm là một miền mở.

* **Chú ý 2:** Miền xác định của hàm có thể là toàn bộ mặt phẳng Oxy .

Miền giá trị của f : $E = \{a \in R: \exists (x; y) \in D: a = f(x; y)\}$

1.1.3. Các ví dụ:

a). $Z = x^2 + y^2$. Miền xác định D_1 của hàm là cả mặt phẳng Oxy .

b). $Z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

D_2 là $\forall (x; y): 1 - x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1 \Rightarrow D_2$ là một đường tròn có bán kính bằng 1 $\Rightarrow D_2$ đóng (kín). (Hình 1.2a)

a) $Z = \ln(x + y)$.

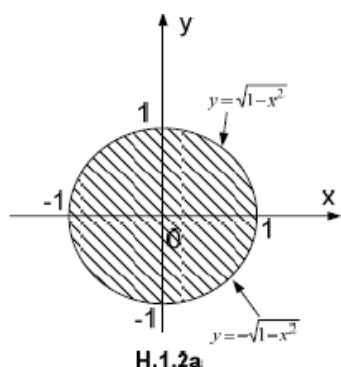
D_3 là $\forall (x; y): x + y > 0 \Leftrightarrow x > -y \Leftrightarrow y > -x$.

D_3 là nửa mặt phẳng nằm về phía trên của đường phân giác của góc phần tư thứ II, D_3 mở. (Hình 1.2b)

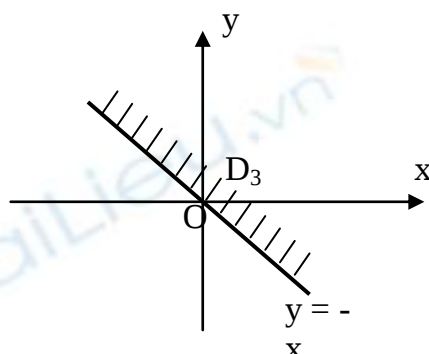
$$b). u = \frac{y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}}.$$

Miền xác định là tập $(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$ thỏa $x^2 + y^2 + z^2 < 9$. Đó là hình cầu tâm O, bán kính bằng 3. (Hình 1.2c). Hình cầu mở này mô tả bởi hệ bất phương trình:

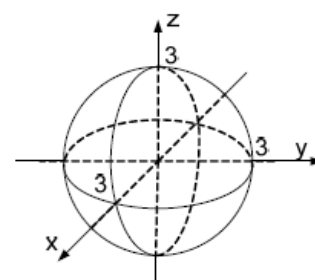
$$\begin{cases} -3 < x < 3 \\ -\sqrt{9 - x^2} \leq y \leq \sqrt{9 - x^2} \\ -\sqrt{9 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{9 - x^2 - y^2} \end{cases}$$



Hình 1.2a



Hình 1.2b

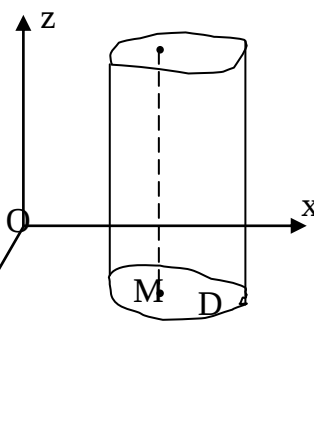


Hình 1.2c

1.2. Biểu diễn hình học của hàm hai biến số

Gọi $Z = f(x;y)$ là hàm số được xác định ở trong miền D. Ta vẽ hệ trục tọa độ Đềcac Oxyz trong không gian. Từ điểm M ta kẻ đường thẳng vuông góc (Oxy) và trên đường thẳng đó lấy điểm P sao cho $\overline{MP} = Z = f(x;y)$

$$\Rightarrow P(x;y;z) \in \text{Oxyz}.$$



Hình 1.3

- Khi điểm M biến thiên khắp miền D thì ở không gian Oxyz điểm P tương ứng đã vẽ nên một mặt cong nào đó mà hình chiếu của nó trên mặt phẳng (Oxy) là miền xác định của hàm.

- Vậy biểu diễn hình học của hàm $Z = f(x; y)$ là một mặt cong S nào đó trong không gian Oxyz mà hình chiếu của nó trên mặt phẳng (Oxy) là miền xác định D.

Chú ý: Phương trình tổng quát của mặt bậc hai trong hệ tọa độ Descartes Oxyz là:

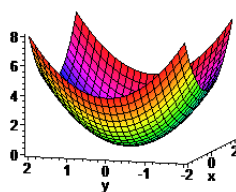
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0$$

Từ chương trình Toán cao cấp A2, để vẽ mặt bậc hai:

- 1) Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng biến đổi trực giao.
- 2) Tìm phép biến đổi, xác định trục tọa độ mới.
- 3) Vẽ hình.

Ví dụ 5:

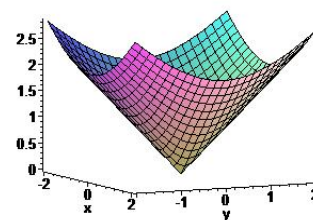
- 1.) $Z = x^2 + y^2$ có biểu diễn hình học là mặt parabolôit tròn xoay.



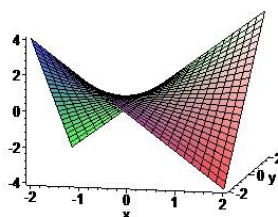
Hình 1.4

- 2.) Hàm $Z = \sqrt{x^2 + y^2}$ có đồ thị là nửa trên mặt nón.

Hình 1.5



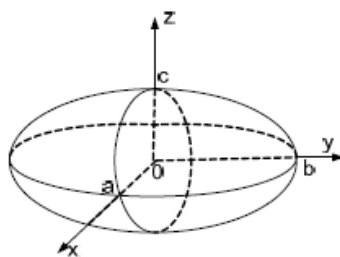
- 3.) Hàm $Z = xy$ có đồ thị là mặt yên ngựa.



Hình 1.6

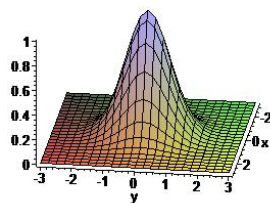
- 4.) $Z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ có biểu diễn hình học là nửa trên mặt cầu tâm O, bán kính 1.

- 5.) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ có biểu diễn hình học là Ellipsoid:



H.1.3

Hình 1.7



6.) Hàm $Z = e^{-x^2-y^2}$ có đồ thị:

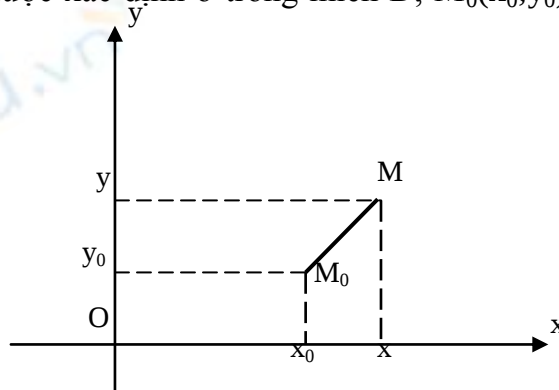
Hình 1.8

Chú ý: đối với hàm có từ ba biến số trở lên thì không có biểu diễn hình học bằng những hình ảnh hình học thông thường.

1.3. Giới hạn của hàm nhiều biến số: $Z = f(x; y)$

Giả sử $Z = f(x; y) = f(M)$ là hàm số được xác định ở trong miền D , $M_0(x_0; y_0)$, $M(x; y)$ là hai điểm của miền D .

Hình 1.9



Gọi $\rho = M_0M = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$

1.3.1. Định nghĩa giới hạn

Cho hàm n biến $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ xác định trên một lân cận bán kính r của một điểm $P \in \mathbb{R}^n$ và có thể không xác định tại P . Ta nói $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tiến về $L \in \mathbb{R}$ (hay có giới hạn là L). Khi $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dần đến P nếu với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại $\delta > 0$ sao cho:

$$0 < d(P, M) < \delta \Rightarrow |f(M) - L| < \varepsilon.$$

Khi đó ta viết: $\lim_{M \rightarrow P} f(M) = L$

Trong trường hợp hàm hai biến $z = f(x; y)$ thì giới hạn có thể được định nghĩa là:

Số L được gọi là giới hạn của hàm: $Z = f(x; y) = f(M)$. Khi $M \rightarrow M_0$ ($x \rightarrow x_0; y \rightarrow y_0$) (một cách độc lập với nhau) khi $y \rightarrow 0$.

Ta luôn có $|f(x; y) - L| \rightarrow 0$ nghĩa là số L được gọi là giới hạn của hàm $Z = f(x; y) = f(M)$ khi $M \rightarrow M_0$, nếu $\forall \varepsilon > 0$ bé tùy ý, $\exists \rho > 0$ sao cho $\rho = M_0M < \delta$

$$\Rightarrow |f(x; y) - L| < \varepsilon; L = \lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y)$$

1.3.2. Các ví dụ:

$$\text{a) } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} (x^2 - y^2) = -3$$

$$\text{b) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{1 - xy}{x^2 + y^2} = 1$$

$$\text{c) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{x^2 + y^2} = \infty \text{ (VCL)}$$

$$\text{d) } \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{1}{x^2 + y^2} = 0 \text{ (VCB)}$$

$$\text{e) } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} (x^2 + 2y) = 3$$

$$\text{f) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{x^2 + y^2} = +\infty$$

1.3.3. Chú ý

1) Tất cả các khái niệm giới hạn vô hạn hoặc các định lý về giới hạn: tổng, tích, thương đều giống như hàm số một biến số.

2) Từ định nghĩa ta nhận thấy: Giới hạn của hàm số $f(x, y)$ khi $M \rightarrow M_0$ không phụ thuộc đường đi của M tiến đến M_0 , vì thế nếu chỉ ra hai đường đi của M tiến đến M_0 mà $f(M)$ tiến đến hai giá trị khác nhau thì hàm số không có giới hạn tại M_0 .

1.4. Sự liên tục của hàm số $Z = f(x; y)$

Giả sử $Z = f(x; y) = f(M)$ là hàm số xác định trong miền D và $M_0(x_0; y_0)$ là điểm thuộc D .

1.4.1. Định nghĩa 1

Hàm $f(x; y) = f(M)$ được gọi là liên tục tại $M_0 \in D$ nếu nó xác định tại M_0 và tồn tại giới hạn $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y) = \lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0) = f(x_0; y_0)$.

Từ đó suy ra nếu hàm $Z = f(x; y)$ liên tục tại mọi điểm $(x; y) \in D$ thì ta nói rằng hàm $Z = f(x; y)$ liên tục trong miền D .

Nếu ta đặt $\Delta x = x - x_0$; $\Delta y = y - y_0$ là các số gia của các biến độc lập x, y thì

$$\Delta Z = f(x; y) - f(x_0; y_0)$$

Gọi là số gia trên phần tương ứng cho hàm. Khi đó ta có: $x = x_0 + \Delta x$; $y = y_0 + \Delta y$ và $\Delta Z = f(x; y) - f(x_0; y_0) = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)$. Khi đó :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y) = f(x_0; y_0) \Leftrightarrow \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} [f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)] = 0 = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta Z = 0$$

1.4.2. Định nghĩa 2

Hàm $Z = f(x; y)$ liên tục tại $M_0(x_0; y_0) \in D$ nếu nó xác định tại M_0 và có

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta Z = 0.$$

Hàm $Z = f(x; y)$ gián đoạn tại $M_0(x_0; y_0) \in D$ nếu nó không liên tục tại M_0 .

$\Rightarrow Z = f(x; y)$ gián đoạn tại M_0 khi nó rơi vào một trong ba trường hợp sau:

* Hoặc là $Z = f(x; y)$ không xác định tại $M_0(x_0; y_0)$.

* Hoặc là nó xác định tại M_0 nhưng không có giới hạn: $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y)$.

* Hoặc là hàm $Z = f(x; y)$ xác định tại M_0 và có giới hạn $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y)$

nhưng $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y) \neq f(x_0; y_0)$.

Ví dụ 6: Hàm $f(x; y) = \frac{2x - y}{x^2 + y^2}$ liên tục tại mọi điểm $(x_0; y_0)$ khác $(0; 0)$.

Lưu ý: + Các hàm sau đây được gọi là hàm sơ cấp cơ bản: Hàm hằng, hàm mũ, hàm lũy thừa, hàm lượng giác, hàm lượng giác ngược, hàm logarit.

+ Hàm thu được từ các hàm sơ cấp cơ bản bằng hữu hạn các phép toán: cộng, trừ, nhân, chia, khai căn được gọi là hàm sơ cấp.

+ Hàm sơ cấp liên tục tại những điểm mà nó xác định.

❖ Bài tập củng cố:

1) Tìm miền xác định của các hàm số:

a) $z = x^2 + y^2$.

b) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

c) $z = \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{xy}$

d) $z = \ln \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$

e) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \ln(4 - x^2 - y^2)$

f) $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}$

g) $z = \sqrt{y^2 - 2px} \quad (p > 0)$

h) $z = \lg(xy) + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

2) a) Cho hàm số: $f(x, y) = xy + \frac{y}{x}$. Tìm $f(y, x)$; $f(-x, -y)$; $f(1, \frac{y}{x})$

b) Cho hàm số $f(x, y, z) = \frac{x + y + z}{x^2 + y^2 + z^2}$. Tìm $f(x, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2})$.

c) Cho $z = x \cdot f\left(\frac{y}{x}\right)$. Hãy tìm các hàm f và z nếu biết $z = \sqrt{1 + y^2}$ khi $x = 1$.

3) Cho $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{2xy}$. Tính $f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$, $f(-x, -y)$.

4) Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 3}} (x^2 - 2x + y^2 - 6y + 4)$ b) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(\frac{a}{x^2 + y^2}\right)$ c) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 3}} (x^2 + y^2)$

d) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(\frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}\right)$ e) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)$

5) Tính liên tục của hàm hai biến tại $O(0,0)$: $z = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0, & (x, y) = (0,0) \end{cases}$

BÀI 2: ĐẠO HÀM RIÊNG VÀ VI PHÂN

❖ **Mục tiêu học tập:** Sau khi học xong bài này, người học có thể:

Nắm vững các qui tắc tính đạo hàm riêng trên cơ sở tính đạo hàm của hàm một biến.

Áp dụng công thức tính được đạo hàm riêng của hàm số ẩn, hàm số hợp.

Áp dụng công thức vi phân toàn phần và biết cách áp dụng vào phép tính gần đúng.

2.1. Đạo hàm riêng

2.1.1. Định nghĩa

Giả sử $Z = f(x; y)$ là hàm số xác định và liên tục trong miền D , nếu giữ y không đổi, cho x một số gia $\Delta x \neq 0$ và khá bé thì hàm $Z = f(x; y)$ có một số gia tương ứng gọi là số gia riêng theo biến x của hàm tại $M(x; y)$.

$$\Delta_x Z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y).$$

Tương tự, giữ x không đổi, cho y một số gia $\Delta y \neq 0$ khá bé thì $Z = f(x; y)$ có một số gia tương ứng là một số gia riêng theo biến y của hàm tại $M(x; y)$,

$$\Delta_y Z = f(x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Nếu khi Δx (hoặc Δy) $\rightarrow 0$ mà $\frac{\Delta_x Z}{\Delta x}$ (hoặc $\frac{\Delta_y Z}{\Delta y}$) tiến tới một giới hạn xác định thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm riêng theo biến x (hoặc y) của hàm tại điểm M ,

$$\text{kí hiệu: } Z'(x) = f'_x(x; y) \quad (Z'_y = f'_y(x; y))$$

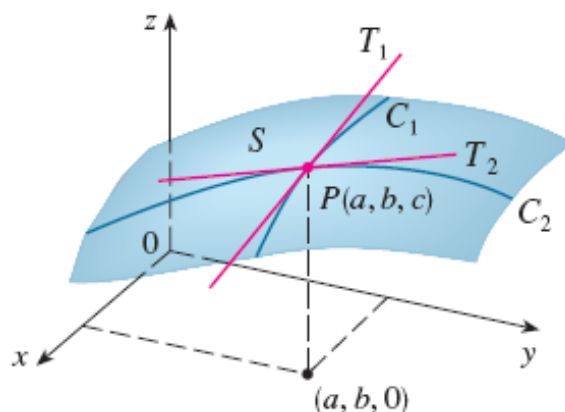
$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x Z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x}$$

$$\text{Tương tự } \frac{\partial Z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y Z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta y}$$

- Như vậy: Muốn tính đạo hàm riêng theo một biến số nào đó ta chỉ việc xem hàm số chỉ phụ thuộc vào biến đó còn các biến khác xem như không đổi và áp dụng qui tắc đối với hàm một biến để tính đạo hàm riêng.

- Biểu diễn hình học:

Hình 1.10



Trong đó: $f(x,y)$ biểu diễn bởi mặt S .

Giả sử $f(a,b) = c$, nên điểm $P(a,b,c) \in S$. Cố định $y = b$. Đường cong C_1 là giao của S và mặt phẳng $y = b$.

Phương trình của đường cong C_1 là $g(x) = f(x, b)$. Hệ số góc của tiếp tuyến T_1 với đường cong C_1 là: $g'(a) = f'_x(a;b)$.

Đạo hàm riêng theo x của $f = f(x,y)$ là hệ số góc của tiếp tuyến T_1 với đường cong C_1 tại $P(a,b,c)$.

Tương tự, đạo hàm riêng theo y của $f = f(x,y)$ là hệ số góc của tiếp tuyến T_2 với đường cong C_2 tại $P(a,b,c)$.

Ví dụ 1:

1.) Cho hàm $Z = \ln(x^2 + y^2)$

$$\Rightarrow \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

2.) Cho hàm $Z = x^2 \cdot \sin y$

$$\Rightarrow \frac{\partial Z}{\partial x} = 2x \sin y; \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = x^2 \cos y$$

3.) Cho hàm $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\Rightarrow \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

4) Cho hàm $f(x;y) = 4 - x^2 - 2y^2$. Tìm $f'_x(1;1)$ và biểu diễn hình học của đạo hàm riêng này?

$$\text{Có } f'_x(x;y) = -2x \Rightarrow f'_x(1;1) = -2.$$

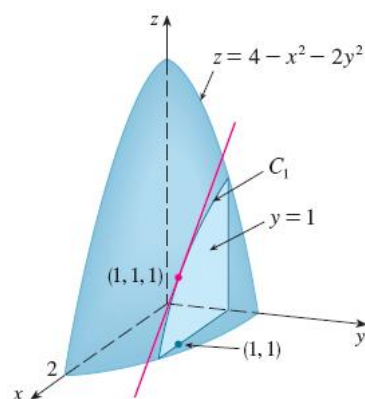
Mặt phẳng $y = 1$ cắt ngang được đường cong C_1 .

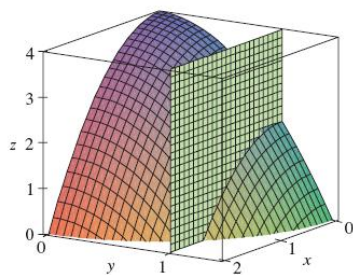
Tiếp tuyến với C_1 tại $(1,1,1)$ là đường thẳng màu hồng.

Hệ số góc của tiếp tuyến với C_1 tại $(1,1,1)$ là đạo hàm riêng cần tìm.

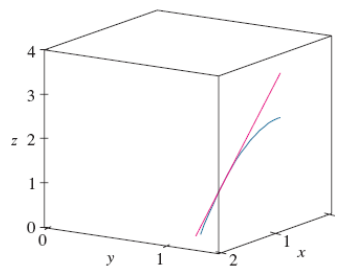
Hình 1.11

Biểu diễn hình học:





Hình 1.12



Hình 1.13

Tìm $f'_y(1;1)$ và biểu diễn hình học của đạo hàm riêng này?

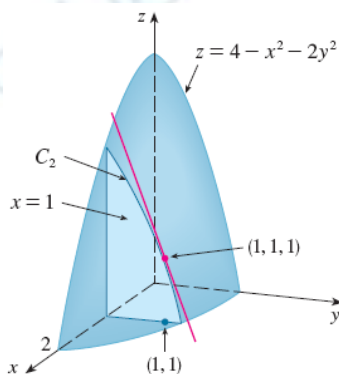
Có $f'_y(x;y) = -4y \Rightarrow f'_y(1;1) = -4$.

Mặt bậc hai $f = f(x,y)$ màu xanh.

Mặt phẳng $x = 1$ cắt ngang được đường cong C_2 .

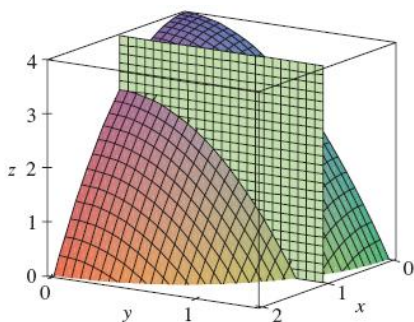
Tiếp tuyến với C_2 tại $(1,1,1)$ là đường thẳng màu hồng.

Hệ số góc của tiếp tuyến với C_2 tại $(1,1,1)$ là đạo hàm riêng cần tìm.

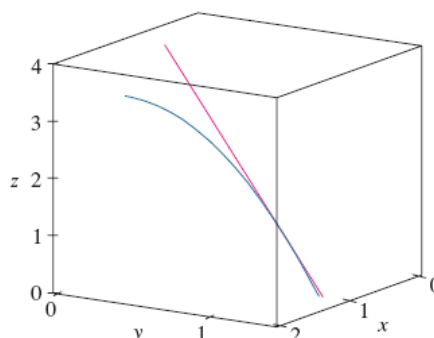


Hình 1.14

Biểu diễn hình học của $f'_y(1;1)$:



Hình 1.15



Hình 1.16

Tính chất của đạo hàm riêng

Vì đạo hàm riêng là đạo hàm của hàm một biến nên tính chất của đạo hàm riêng cũng là tính chất của đạo hàm của hàm một biến.

$$(af)'_x = af'_x$$

$$(f + g)'_x = f'_x + g'_x$$

$$(f \cdot g)'_x = f'_x \cdot g + f \cdot g'_x$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'_x = \frac{gf'_x - fg'_x}{g^2}$$

Hàm một biến: hàm liên tục tại x_0 khi và chỉ khi hàm có đạo hàm cấp 1 tại x_0 .

Hàm nhiều biến: Tồn tại hàm có các đạo hàm riêng cấp 1 tại (x_0, y_0) nhưng không liên tục tại điểm này.

2.1.2. Đạo hàm riêng cấp cao

Giả sử $Z = f(x; y)$ có các đạo hàm riêng theo biến x, y ; $\frac{\partial Z}{\partial x}$; $\frac{\partial Z}{\partial y}$ các đạo hàm riêng này được gọi là các đạo hàm riêng cấp một. Nếu các đạo hàm riêng này còn phụ thuộc biến x, y thì các đạo hàm riêng của các đạo hàm trên được gọi là đạo hàm riêng cấp hai của hàm Z theo biến x, y . Kí hiệu: $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}$; $\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}$; $\frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x}$.

Ta có:
$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right) = f''_{xx}(x, y);$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right) = f''_{yy}(x, y);$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right) = f''_{xy}(x, y);$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right) = f''_{yx}(x, y)$$

Định lý: Nếu hàm $Z = f(x; y)$ và các đạo hàm riêng của nó: $\frac{\partial Z}{\partial x}$; $\frac{\partial Z}{\partial y}$; $\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}$; $\frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x}$, liên tục trong miền D thì ở trong miền D , $\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x}$, nghĩa là các đạo hàm riêng cấp hai $\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}$; $\frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x}$ không phụ thuộc vào thứ tự của các biến lấy đạo hàm đó liên tục trong miền D . Đồng thời định lý nói trên còn có thể mở rộng đối với các hàm nhiều hơn hai biến số và các đạo hàm riêng cấp cao.

Ví dụ 2: 1) $u = f(x; y; z)$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x \partial z} \text{ nếu các đạo hàm riêng này liên tục.}$$

2). $Z = x^2 y + y^2$

$$\begin{aligned}\frac{\partial Z}{\partial x} &= 2xy; & \frac{\partial Z}{\partial y} &= x^2 + 2y \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} &= 2y; & \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} &= 2x; & \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} &= 2; & \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} &= 2x \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} = 2x\end{aligned}$$

3). $u = Z^2 e^{x+y^2}$

$$\begin{aligned}u'_x &= Z^2 e^{x+y^2}; & u''_{xy} &= 2yZ^2 e^{x+y^2}; & u'''_{xyz} &= 4yZe^{x+y^2} \\ u'_y &= 2yZ^2 e^{x+y^2}; & u''_{yx} &= 4yZe^{x+y^2}; & u''_{yz} &= 4yZe^{x+y^2} \\ u'_z &= 2Ze^{x+y^2}; & u''_{zx} &= 2Ze^{x+y^2}; & u'''_{zxy} &= 4yZe^{x+y^2}\end{aligned}$$

Vậy: $u'''_{xyz} = u'''_{yxz} = u'''_{zxy} = 4yZe^{x+y^2}$

2.2. Vi phân toàn phần

2.2.1. Định nghĩa

Xét hàm $Z = f(x; y)$, nếu ta cho x một số gia Δx , cho y một số gia Δy thì hàm $Z = f(x; y)$ có một số gia tương ứng $\Delta Z = f(x; y) = f(x + \Delta x; y + \Delta y)$ gọi là số gia toàn phần của hàm $Z = f(x; y)$ tại $M(x; y)$. Nếu tại điểm $M(x; y)$, có:

$$\Delta Z = A.\Delta x + B.\Delta y + \alpha(\Delta x; \Delta y) \quad (1)$$

Trong đó A, B là những đại lượng không phụ thuộc vào $\Delta x, \Delta y$. Còn $\alpha(\Delta x; \Delta y)$ là một vô cùng bé cấp cao hơn $\rho = \sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y}$ khi $\rho \rightarrow 0$. Khi đó ta nói rằng hàm số $Z = f(x; y)$ khả vi tại $M(x; y)$.

Và biểu thức $A.\Delta x + B.\Delta y$ được gọi là vi phân toàn phần của $Z = f(x; y)$ tại điểm $M(x; y)$.

Ký hiệu: dZ hay $df(x; y)$

$$dZ = A.\Delta x + B.\Delta y$$

$\Rightarrow$ Nếu hàm $Z = f(x; y)$ khả vi tại mọi điểm $(x; y) \in D$ thì ta nói rằng hàm $Z = f(x; y)$ khả vi trong miền D .

- Chú ý: Nếu $A \neq 0$ hoặc $B \neq 0$ thì $dZ \neq 0$.

$\Rightarrow$ Tại cùng một điểm $M(x; y)$ thì ΔZ và dZ chỉ sai khác nhau bởi $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ là một vô cùng bé cấp cao hơn ρ khi $\rho \rightarrow 0$. Nghĩa là tại $M(x; y)$, $\Delta Z = dZ$ hay nói cách khác dZ là phần chính bậc nhất của ΔZ .

2.2.2. Điều kiện khả vi

• **Định lý 1:** Nếu hàm $Z = f(x; y)$ khả vi tại $M(x; y)$ thì tại $M(x; y)$ hàm $Z = f(x; y)$ có các đạo hàm riêng theo biến x , biến y .

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = A; \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = B \Rightarrow dZ = \frac{\partial Z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial Z}{\partial y} \Delta y$$

Vì x và y là các biến số độc lập nên $\Delta x = dx$; $\Delta y = dy$ đều là những hằng số nên

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial Z}{\partial y} \Delta y = \frac{\partial Z}{\partial x} dx + \frac{\partial Z}{\partial y} dy$$

• **Định lý 2:** Nếu tại $M(x; y)$ hàm $Z = f(x; y)$ có các đạo hàm riêng liên tục theo biến x, y thì hàm số $Z = f(x; y)$ khả vi tại $M(x; y)$.

*** Nhận xét:**

1). Định lý 1 và định lý 2 nói trên là điều kiện cần và đủ để hàm $Z = f(x; y)$ khả vi. Cụ thể, định lý 1 là điều kiện cần; định lý 2 là điều kiện đủ.

Định lý 2: Cần chú ý đến điều kiện liên tục của hàm số. Nếu bỏ qua điều kiện đó thì định lý 2 sẽ không còn đúng nữa.

2). Biểu thức: $f(x; y) \Delta Z = f(x; y) dx$ gọi là vi phân riêng đối với x của $Z = f(x; y)$.

3). Suy ra quy tắc vi phân toàn phần của $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n$$

Ví dụ 3:

1). Tìm ΔZ và dZ của $Z = xy$ tại $M(2; 3)$ với $\Delta x = 0,1$; $\Delta y = 0,2$.

$$\Delta Z = (2 + 0,1)(3 + 0,2) - (2 \times 3) = 0,72$$

$$dZ = y \cdot \Delta x + x \cdot \Delta y = 3 \times 0,1 + 2 \times 0,2 = 0,7$$

$$\text{Tại cùng điểm } M(2, 3) \text{ thì } \Delta Z = dZ = 0,72 - 0,70 = 0,02.$$

2). Tính du tại $M(x; y; z)$ nếu $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$