

TRƯỜNG ĐẠI HỌC TRÀ VINH
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN
BỘ MÔN TOÁN



TÀI LIỆU GIẢNG DẠY MÔN TOÁN CAO CẤP A1

GV biên soạn: TRẦN THIỆN KHẢI

Trà Vinh, tháng 02-2013

Lưu hành nội bộ

MỤC LỤC

Nội dung	Trang
Chương 1: GIỚI HẠN CỦA DẠY SỐ VÀ HÀM SỐ	3
Bài 1: CÁC TRƯỜNG SỐ.....	3
Bài 2: HÀM SỐ VÀ GIỚI HẠN	8
Bài 3: GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ.....	15
Bài 4: VÔ CÙNG BÉ VÀ VÔ CÙNG LỚN	21
Bài 5: HÀM SỐ LIÊN TỤC	23
Chương 2: ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN HÀM MỘT BIẾN	26
Bài 1: ĐẠO HÀM.....	26
Bài 2: VI PHÂN.....	31
Bài 3: MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA PHÉP TÍNH VI PHÂN	36
Chương 3: TÍCH PHÂN HÀM MỘT BIẾN SỐ	46
Bài 1: TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH	46
Bài 2: TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH	61
Bài 3: MỘT SỐ ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH	67
Bài 4: TÍCH PHÂN SUY RỘNG	75
Chương 4: LÝ THUYẾT CHUỖI	82
Bài 1: LÝ THUYẾT CHUỖI.....	82
Bài 2: CHUỖI SỐ DƯƠNG	84
Bài 3: CHUỖI ĐẠN ĐẦU	86
Bài 4: CHUỖI LŨY THỪA.....	87
Chương 5: MA TRẬN, ĐỊNH THỨC VÀ ỨNG DỤNG	91
Bài 1: KHÔNG GIAN VECTƠ R^n	91
Bài 2: LÝ THUYẾT SƠ CẤP VỀ MA TRẬN.....	93
Bài 3: ĐỊNH THỨC.....	101
Bài 4: HẠNG CỦA MA TRẬN	112
Bài 5: HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH KHÔNG THUẦN NHẤT ..	116
Bài 6: HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT.....	131
<i>TÀI LIỆU THAM KHẢO</i>	136

Chương 1: GIỚI HẠN CỦA DẠY SỐ VÀ HÀM SỐ

Bài 1: CÁC TRƯỜNG SỐ

❖ **Mục tiêu học tập:** Sau khi học xong bài này, người học có thể:

- Nắm vững các kiến thức cơ bản về tập các số và các phép tính về số phức.
- Hiểu kỹ các kiến thức đó, làm thành thạo với các phép toán về số phức, biết sử dụng dạng lượng giác của số phức.

1.1. Tập các số

Tập số tự nhiên: $\mathbf{N} = \{1; 2; 3; \dots\}$

Tập số nguyên: $\mathbf{Z} = \{0; \pm 1; \pm 2; \dots\}$

Tập số hữu tỷ: $\mathbf{Q} = \left\{ x \text{ sao cho } x = \frac{p}{q}; p, q \in \mathbf{Z}, q \neq 0 \right\}$

Một số hữu tỷ bao giờ cũng viết được dưới dạng một số thập phân hữu hạn hay số thập phân vô hạn tuần hoàn.

Ví dụ 1: $\frac{1}{4} = 0,25$; $\frac{3}{4} = 0,75$.

$\frac{7}{6} = 1,1666\dots$ ta có thể viết $\frac{7}{6} = 1,1(6)$

$\frac{15}{11} = 1,363636\dots$ hay $\frac{15}{11} = 1,(36)$

Ngược lại, cho một số thập phân hữu hạn hay vô hạn tuần hoàn thì nó sẽ biểu diễn một số hữu tỷ nào đó.

- Số thập phân hữu hạn $a_0, a_1 a_2 \dots a_n$ sẽ biểu thị số hữu tỷ:

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n}$$

- Số thập phân vô hạn tuần hoàn $a_0, a_1, a_2 \dots a_n (b_1 b_2 \dots b_m)$ sẽ biểu thị số hữu tỷ:

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{10^{m-n}}{10^m - 1} \left(\frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \dots + \frac{b_m}{10^m} \right)$$

Nhận xét:

Một số thập phân hữu hạn cũng có thể được xem là số thập phân vô hạn tuần hoàn, chẳng hạn: $\frac{1}{4} = 0,25000\dots$ hay $\frac{1}{4} = 0,25(0)$

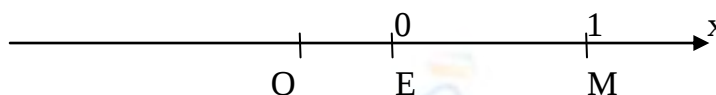
Như vậy có sự đồng nhất giữa tập số hữu tỷ và tập các số thập phân vô hạn tuần hoàn.

Định nghĩa 1: Một số biểu diễn được dưới dạng một số thập phân vô hạn không tuần hoàn được gọi là số vô tỷ. Tập các số vô tỷ kí hiệu là: $\mathbf{I}$

Ví dụ 2: $\sqrt{2} = 1,414213562\dots$; $\pi = 3,141592653\dots$;

Tập số thực $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}$

Đường thẳng thực (trục số): Trên đường thẳng Δ , lấy điểm O làm gốc và chọn vectơ đơn vị $\overrightarrow{OE} = \vec{e}$. Số x là số thực khi và chỉ khi tồn tại duy nhất một điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}$. Khi đó điểm M được gọi là điểm biểu diễn hình học của số thực x trên đường thẳng Δ và đường thẳng Δ được gọi là đường thẳng thực hay trục số.



Hình 1.1

1.2. Số phức

- Số phức là số có dạng: $z = a + ib$, trong đó $a, b \in \mathbf{R}$, i là đơn vị ảo với $i^2 = -1$
- Ta ký hiệu: $a = \operatorname{Re} z$ gọi là phần thực; $b = \operatorname{Im} z$ gọi là phần ảo. $\mathbf{C}$ là tập hợp tất cả các số phức.
- Số phức $z = a + ib$ có thể biểu diễn hình học là một điểm $M(a; b)$ trên mặt phẳng Oxy.
- Số phức $\bar{z} = a - ib$ được gọi là số phức liên hợp của số phức $z = a + ib$, hai số phức liên hợp đối xứng nhau qua Ox.

Phép toán:

Cho 2 số phức $z_1 = a_1 + ib_1$; $z_2 = a_2 + ib_2$,

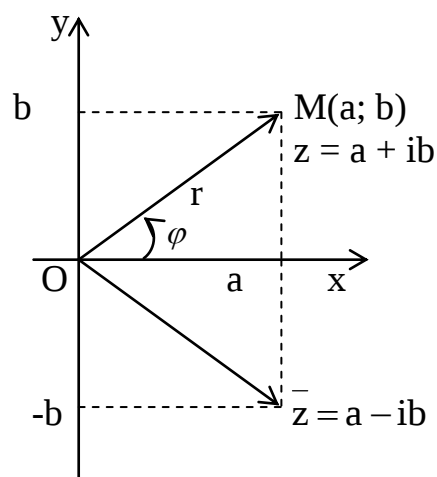
khi đó ta có:

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}; \quad (z_2 \neq 0)$$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \\ \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2 \end{cases}$$



Hình 1.2

Chú ý: Ta thực hiện các phép toán theo quy tắc chung thuận tiện hơn.

Ví dụ 3: $(1 - 3i) + (-2 + 7i) = -1 + 4i$

$$(1 - i)(2 + i) = 2 + i - 2i - i^2 = 3 - i$$

$$\frac{1}{4+i} = \frac{4-i}{(4+i)(4-i)} = \frac{4-i}{17}$$

Dạng lượng giác của số phức:

Ta biểu diễn số phức $z = a + ib$ bởi vector $\overrightarrow{OM}$, gọi $r = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$ là môđun của số phức z , ký hiệu: $|z|$.

Góc $\varphi = (\text{Ox}, \overrightarrow{OM})$ được xác định sai khác nhau $2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ gọi là argument,

Ký hiệu: $\text{Arg}z$. Ta có $\text{tg}\varphi = \frac{b}{a}$.

Từ ý nghĩa hình học, ta có $a = r \cos \varphi$; $b = r \sin \varphi \Rightarrow z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Ví dụ 4: Biểu diễn số phức $z = 1 + i$ dưới dạng lượng giác.

$$\text{Ta có: } r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \text{tg}\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} \Rightarrow z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

Cho các số phức:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi); \quad z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1); \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

$$\Rightarrow |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|; \quad \text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg}z_1 + \text{Arg}z_2 + 2k\pi$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

$$\Rightarrow \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}; \quad \text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{Arg}z_1 - \text{Arg}z_2 + 2k\pi$$

$$z^n = r^n [\cos n\varphi + i \sin n\varphi]$$

$$\Rightarrow |z^n| = |z|^n; \quad \text{Arg}(z^n) = n\text{Arg}z + 2k\pi$$

$$\sqrt[n]{z} = u \Leftrightarrow u^n = z$$

Biểu diễn u dưới dạng $u = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$.

$$\text{Ta có: } u^n = z \Leftrightarrow \rho^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^n = r \\ n\theta = \varphi + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \theta = \frac{\varphi + k2\pi}{n}; k = 0; n-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + k2\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + k2\pi}{n} \right); \quad k = \overline{0; n-1}$$

Ví dụ 5: Tính a/. $A = (1+i)^{20}$. b/. $u = \sqrt[4]{1+i}$

Giải : a/ Ta có: $A = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \Rightarrow A = 2^{10} (\cos 5\pi + i \sin 5\pi) = -2^{10}$.

b/

$$z_2 = \sqrt[4]{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{4} + k2\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + k2\pi}{4} \right) = \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{\pi + k8\pi}{16} + i \sin \frac{\pi + k8\pi}{16} \right); \quad k = \overline{0; 3}$$

$$\Rightarrow u = \sqrt[4]{1+i} \text{ có 4 giá trị:}$$

$$u_0 = \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{\pi}{16} + i \sin \frac{\pi}{16} \right) \quad u_1 = \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{9\pi}{16} + i \sin \frac{9\pi}{16} \right)$$

$$u_2 = \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{17\pi}{16} + i \sin \frac{17\pi}{16} \right) \quad u_3 = \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{25\pi}{16} + i \sin \frac{25\pi}{16} \right)$$

1.3. Khoảng – Liên cận

Định nghĩa 2: Khoảng là tập hợp các số thực (hay các điểm) nằm giữa hai số thực (hay hai điểm) nào đó.

Phân loại khoảng:

Khoảng hữu hạn:

$$\text{Khoảng đóng: } [a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

$$\text{Khoảng mở: } (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

$$\text{Khoảng nửa đóng, nửa mở: } (a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

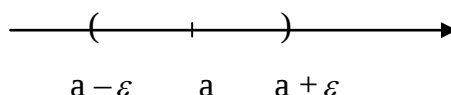
$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

Khoảng vô hạn:

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}; \quad (-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$

$$(b, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > b\}; \quad [b, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq b\}$$

Định nghĩa 3: Giả sử a là một số thực, khoảng mở $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ (với $\varepsilon > 0$) được gọi là lân cận bán kính ε của a .



Hình 1.3

❖ **Bài tập củng cố:**

1). Thực hiện các phép toán sau:

a) $(2+i)(3-i) + (3+2i)(4+i)$; b) $(3+5i)(2+i) - (1-2i)(5+3i)$; c) $\frac{(5+i)(7-6i)}{3+i}$;

d) $\frac{(5+i)(3+5i)}{2i}$; e) $(2+i)^3 + (2-i)^3$; f) $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$;

2). Tính các biểu thức:

(a) $(1+i)^{1000}$; (b) $(1+i\sqrt{3})^{150}$; (c) $(\sqrt{3}+i)^{30}$;

(d) $(1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2})^{24}$; (e) $(2-\sqrt{2}+i)^{12}$; (f) $(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i})^{12}$

Bài 2: HÀM SỐ VÀ GIỚI HẠN

❖ **Mục tiêu học tập:** Sau khi học xong bài này, người học có thể nắm vững một cách có hệ thống về hàm một biến số, giới hạn của dãy số.

2.1. Hàm số

2.1.1. Định nghĩa 1

Cho $X \subset \mathbf{R}$, một hàm số f xác định trên X là một quy tắc sao cho ứng với mỗi giá trị của biến x thuộc X có duy nhất một giá trị thực của biến y .

Kí hiệu $y = f(x)$

- x được gọi là biến độc lập, y được gọi là biến phụ thuộc.
- X được gọi là miền xác định của hàm số, kí hiệu là D_f .
- Tập $Y = \{y \in \mathbf{R} \mid y = f(x), x \in D_f\}$ được gọi là miền giá trị của hàm số, kí hiệu R_f

Ví dụ 1: Khi nuôi một con bò, quan sát quá trình tăng trọng của bò ta có mối liên hệ giữa thời gian nuôi t (ngày) và trọng lượng m (kg) của con bò là một hàm số $m = m(t)$.

Một hàm số thường được cho dưới dạng công thức như các ví dụ sau:

$$y = x$$

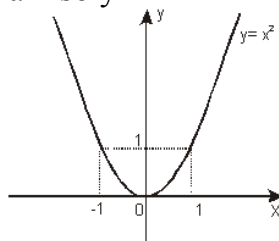
$$y = 2x + 3$$

$$y = \sin x - 2x$$

2.1.2. Định nghĩa 2

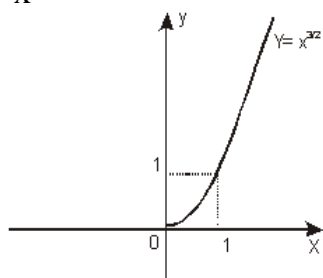
Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp các điểm $M(x, f(x))$ trong hệ tọa độ Descartes, $G = \{M(x, f(x)), x \in D_f\}$

Ví dụ 1': 1) Đồ thị hàm số $y = x^2$



Hình 1.4

2) Đồ thị hàm số $y = x^{3/2}$



Hình 1.5

2.1.3. Các tính chất

a. Hàm số đơn điệu

Định nghĩa 3:

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là tăng (hay tăng nghiêm ngặt) trên tập $E \subset D_f$, nếu với mọi $x_1, x_2 \in E$, $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) \leq f(x_2)$ (hay $f(x_1) < f(x_2)$).
- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là giảm (hay giảm nghiêm ngặt) trên tập $E \subset D_f$, nếu với mọi $x_1, x_2 \in E$, $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) \geq f(x_2)$ (hay $f(x_1) > f(x_2)$).
- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm số đơn điệu (hay đơn điệu nghiêm ngặt) trên $E \subset D_f$ nếu nó tăng hoặc giảm (hay tăng nghiêm ngặt hoặc giảm nghiêm ngặt) trên E .

Nếu ta sử dụng thuật ngữ trên mà không nhắc đến tập E thì coi như $E = D_f$

Ví dụ 2: Hàm số $y = f(x) = x^2$ giảm nghiêm ngặt trên $(-\infty, 0]$ và tăng nghiêm ngặt trên $[0, +\infty)$.

Thật vậy, giả sử $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ và $x_1 < x_2$. Khi đó ta có:

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) < 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Vậy hàm số $y = x^2$ tăng nghiêm ngặt trên $[0, +\infty)$.

Chứng minh tương tự ta có hàm số $y = x^2$ giảm nghiêm ngặt trên $(-\infty, 0]$.

b. Hàm số chẵn và hàm số lẻ.

Định nghĩa 4: Tập X được gọi là tập đối xứng qua gốc tọa độ O nếu với bất kỳ $x \in X$ thì $-x \in X$. Người ta thường gọi tắt là tập đối xứng.

Định nghĩa 5: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập đối xứng X , khi đó ta có:

- Hàm số $y = f(x)$ là hàm số chẵn nếu với mọi x thuộc X thì $f(-x) = f(x)$.
- Hàm số $y = f(x)$ là hàm số lẻ nếu với mọi x thuộc X thì $f(-x) = -f(x)$.

Ví dụ 3:

a. Hàm số $f(x) = x^2$ là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$.

b. Hàm số $g(x) = x^3$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$.

Thật vậy, với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có:

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

$$g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

Chú ý: Đồ thị của hàm số chẵn đối xứng qua trục tung, đồ thị của hàm số lẻ đối xứng qua gốc tọa độ O .

c. Hàm số bị chặn.

Định nghĩa 6:

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là bị chặn dưới trên tập $X \subset D_f$ nếu tồn tại số $a \in \mathbb{R}$ sao cho

$$f(x) \geq a, \forall x \in X.$$

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là bị chặn trên trên tập $X \subset D_f$ nếu tồn tại số $b \in \mathbf{R}$ sao cho $f(x) \leq b, \forall x \in X$.
- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là bị chặn trên tập $X \subset D_f$ nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại hai số $a, b \in \mathbf{R}$ sao cho $a \leq f(x) \leq b, \forall x \in X$.

Chú ý: Đồ thị của hàm số bị chặn sẽ nằm giữa hai đường thẳng $y = a$ và $y = b$.

Ví dụ 4: Hàm số $f(x) = \frac{4}{x}$ bị chặn trên tập $X = [1, +\infty)$.

Thật vậy, với mọi $x \in X$ ta luôn có: $f(x) = \frac{4}{x} > 0$ và $f(x) = \frac{4}{x} < 4$

Vậy hàm số $f(x) = \frac{4}{x}$ bị chặn trên tập $X = [1, +\infty)$.

d. Hàm số tuần hoàn.

Định nghĩa 7: Hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm số tuần hoàn nếu tồn tại số $t \neq 0$ sao cho với mọi $x \in D_f$ ta luôn có $x \pm t \in D_f$ và $f(x + t) = f(x)$.

Số dương T nhỏ nhất (nếu có) trong các số t nói trên được gọi là chu kỳ của hàm số tuần hoàn.

Ví dụ 5:

- Các hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$.
- Các hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$.
- Các hàm số $y = \sin(ax + b)$ và $y = \cos(ax + b)$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi}{|a|}$

Thật vậy, xét hàm số $f(x) = \sin(ax + b)$.

Giả tồn tại số $t \neq 0$ sao cho $f(x + t) = f(x) \forall x \in R$

$$\Leftrightarrow \sin[a(x + t) + b] = \sin(ax + b) \forall x \in R$$

$$\Leftrightarrow \sin[a(x + t) + b] - \sin(ax + b) = 0 \forall x \in R$$

$$\Leftrightarrow 2\cos(ax + \frac{at}{2} + b)\sin\frac{at}{2} = 0 \forall x \in R$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{at}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{at}{2} = k\pi, k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\} \Leftrightarrow t = \frac{2k\pi}{a}, k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$$

Số T dương nhỏ nhất ứng với $k = 1$ (hoặc $k = -1$), do đó ta có $T = \frac{2\pi}{|a|}$ là chu kỳ của hàm số $f(x) = \sin(ax + b)$.

Các hàm số còn lại chứng minh tương tự (coi như bài tập)

e. Hàm số hợp và hàm số ngược.

Định nghĩa 8: Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ thỏa $\mathbf{R}_f \subset \mathbf{D}_g$, khi đó hàm số hợp của $f(x)$ và $g(x)$ là hàm số $h(x)$ được xác định $h(x) = g[f(x)]$ với mọi $x \in \mathbf{D}_f$.

Kí hiệu $h = g \circ f$.

Ví dụ 6: Cho hai hàm số $f(x) = x^2$ và $g(x) = 2^x$. Hãy xác định hàm số $g \circ f$ và $f \circ g$.

$$g \circ f = g[f(x)] = g(x^2) = 2^{x^2}$$

$$f \circ g = f[g(x)] = f(2^x) = (2^x)^2 = 2^{2x}$$

Định nghĩa 9: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa: với mọi $x_1, x_2 \in \mathbf{D}_f$ và $x_1 \neq x_2$, ta luôn có $f(x_1) \neq f(x_2)$. Khi đó hàm số ngược của hàm số f , kí hiệu f^{-1} được xác định bởi: $x = f^{-1}(y)$, với $y = f(x)$.

Ví dụ 7: Hàm số $y = x^3$ có hàm ngược là $y = \sqrt[3]{x}$.

Chú ý:

Nếu g là hàm ngược của hàm f thì $\mathbf{D}_g = \mathbf{R}_f$ và $\mathbf{R}_g = \mathbf{D}_f$.

Đồ thị của hai hàm số ngược nhau đối xứng qua đường thẳng $y = x$.

Điều kiện để hàm số $y = f(x)$ có hàm ngược là hàm f phải tồn tại trong miền xác định của nó.

f. Hàm số sơ cấp.

Định nghĩa 10: Các hàm số sơ cấp cơ bản là các hàm số:

- Hàm số lũy thừa: $y = x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbf{R}$).
- Hàm số mũ: $y = ax$ ($0 < a \neq 1$)
- Hàm số logarithm: $y = \log ax$ ($0 < a \neq 1$)
- Các hàm số lượng giác: $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x$
- Các hàm lượng giác ngược: $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \text{arccot} x$

i. $y = \arcsin x$:

Hàm số $y = \sin x$ là hàm tăng nghiêm ngặt trên $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ nên nó có hàm ngược: $x = \arcsin y$.

Hàm ngược của $y = \sin x$ ($-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) là $y = \arcsin x$, đồ thị của nó đối xứng với đồ thị của hàm $y = \sin x$ ($-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) qua đường thẳng $y = x$.

ii. $y = \arccos x$:

Hàm số $y = \cos x$ là hàm giảm nghiêm ngặt trên $[0; \pi]$ nên nó có hàm ngược $x = \arccos y$.

Hàm ngược của hàm $y = \cos x$ ($0 \leq x \leq \pi$) là $y = \arccos x$, đồ thị của nó đối xứng với đồ thị của hàm số $y = \cos x$ ($0 \leq x \leq \pi$) qua đường thẳng $y = x$.

iii. $y = \arctg x$:

Hàm số $y = \tg x$ là hàm tăng nghiêm ngặt trên $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ nên nó có hàm ngược: $x = \arctg y$.

Hàm ngược của hàm $y = \tg x$ ($-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$) là $y = \arctg x$, đồ thị của nó đối xứng với đồ

thị của hàm $y = \tg x$ ($-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) qua đường thẳng $y = x$.

iv. $y = \operatorname{arccotg} x$:

Hàm số $y = \cotg x$ giảm nghiêm ngặt trên $(0, \pi)$ nên nó có hàm ngược $x = \operatorname{arccotg} y$.

Hàm ngược của hàm $y = \cotg x$ ($0 < x < \pi$) là $y = \operatorname{arccotg} x$, đồ thị của nó đối xứng với đồ thị của $y = \cotg x$ ($0 < x < \pi$) qua đường thẳng $y = x$.

Định nghĩa 11: Hàm số sơ cấp là những hàm số được tạo thành bởi một số hữu hạn các phép toán đại số thông thường (cộng, trừ, nhân, chia với mẫu khác không) và phép lấy hàm hợp từ những hàm số sơ cấp cơ bản và các hằng số.

$$y = \cos 4x + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 3$$

Ví dụ 8: Các hàm số sơ cấp: $y = 2^{-x} + x^4 + 2$

$$y = \sqrt[5]{x^2} - \lg 3x + 1$$

2.2. Giới hạn của dãy số

2.2.1. Các định nghĩa

Định nghĩa 1: Cho hàm số f xác định trên tập $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, khi đó các giá trị của hàm f ứng với $n = 1, 2, 3, \dots$ lập thành một dãy số: $f(1), f(2), f(3), \dots, f(n)$.

Nếu ta đặt $x_n = f(n)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ thì dãy số nói trên được viết thành: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ hay viết gọn $\{x_n\}$. Mỗi $x_1, x_2, x_3, \dots$ được gọi là số hạng của dãy số $\{x_n\}$, x_n gọi là số hạng tổng quát.

Ví dụ 1:

a. $\{x_n\}$, với $x_n = a \ \forall n: a, a, a, \dots$

b. $\{x_n\}$, với $x_n = (-1)^n: -1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n$

Định nghĩa 2: Số a được gọi là giới hạn của dãy số $\{x_n\}$ nếu $\forall \varepsilon > 0$ cho trước (bé tùy ý), tồn tại số tự nhiên N sao cho: $\forall n > N$ thì $|x_n - a| < \varepsilon$.

Ký hiệu: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ hay $x_n \rightarrow a$ khi $n \rightarrow \infty$.

Định nghĩa 3:

- Nếu dãy $\{x_n\}$ có giới hạn là một số hữu hạn a thì ta nói dãy số $\{x_n\}$ hội tụ hay hội tụ về a .

- Nếu dãy $\{x_n\}$ không hội tụ thì ta nói dãy số $\{x_n\}$ phân kì.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$

Với mọi $\varepsilon > 0$, ta xét $\left| x_n - 1 \right| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$

Vậy $\forall \varepsilon > 0$ (bé tùy ý), $\exists N = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right]$ sao cho $\forall n > N \Rightarrow \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$

Vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$

Định nghĩa 4: Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là dãy số dần tới ∞ khi $n \rightarrow \infty$ nếu $\forall M > 0$, lớn tùy ý, $\exists N$ sao cho $\forall n > N$ thì $|x_n| > M$.

Ký hiệu: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ hay $x_n \rightarrow \infty$ khi $n \rightarrow \infty$.

Ví dụ 3: Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 5^n = \infty$

Xét $|x_n| = |5^n| = 5^n > M \Rightarrow n > \log_5 M$

$\forall M > 0$, lớn tùy ý: $\exists N = [\log_5 M]: n > N \Rightarrow |5^n| > M$.

Vậy: $\lim_{n \rightarrow \infty} 5^n = \infty$

2.2.2. Các tính chất

1. Nếu dãy số $\{x_n\}$ có giới hạn thì giới hạn đó là duy nhất.
2. Nếu dãy số $\{x_n\}$ có $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ và $a > p$ (hay $a < q$) thì tồn tại số dương N sao cho $\forall n > N \Rightarrow x_n > p$ (hay $x_n < q$).
3. Nếu dãy $\{x_n\}$ có giới hạn thì nó bị chặn, tức là tồn tại số $M > 0$ sao cho

$$|x_n| \leq M, \forall n.$$

4. Cho ba dãy số $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ thỏa $x_n \leq y_n \leq z_n \forall n$.

Khi đó, nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$.

5. Giả sử $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ là các dãy số hội tụ, khi đó ta có:

Dãy số $\{x_n \pm y_n\}$ cũng hội tụ và $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

Dãy số $\{x_n \cdot y_n\}$ cũng hội tụ và $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

Dãy số $\{x_n : y_n\}$ cũng hội tụ và $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n : y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n : \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

Dãy số $\{k \cdot x_n\}$ cũng hội tụ và $\lim_{n \rightarrow \infty} kx_n = k \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Dãy số $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ cũng hội tụ và $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} \quad (\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0)$

❖ Bài tập củng cố:

1) Chứng minh rằng khi $n \rightarrow \infty$ dãy:

$$3, 2 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{3}, 2 + \frac{1}{4}, \dots, 2 + \frac{1}{n}, \text{ có giới hạn bằng } 2.$$

2) Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ với:

$$\text{a) } x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \quad \text{b) } x_n = \frac{2n}{n^3 + 1}. \quad \text{c) } x_n = (-1)^n \cdot 0,999^n.$$

Bài 3: GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

❖ **Mục tiêu học tập:** Sau khi học xong bài này, người học có thể:

Nắm được một cách có hệ thống về giới hạn hàm số để ứng dụng về sau.

Làm được các bài tập về giới hạn bằng cách tính trực tiếp hoặc sử dụng giới hạn cơ bản.

3.1. Các định nghĩa

Trong phần này ta luôn giả sử $f(x)$ là hàm số được xác định trong lân cận điểm x_0 , không nhất thiết phải xác định tại x_0 .

Định nghĩa 1: Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là L nếu với mọi dãy số $\{x_n\}$ trong lân cận của x_0 thỏa: $x_n \neq x_0 \forall n$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$.

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow x_0$.

Định nghĩa 2: Số L được gọi là giới hạn của hàm số $f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước (bé tùy ý) tồn tại số δ dương sao cho với mọi x thỏa:

$$0 < |x - x_0| < \delta \text{ ta có } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Định nghĩa 3: Số L được gọi là giới hạn phải (trái) của hàm số $f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước (bé tùy ý) tồn tại số δ dương sao cho với mọi x thỏa $x_0 < x < x_0 + \delta$ ($x_0 - \delta < x < x_0$) ta có $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$ ($\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$).

Định nghĩa 4: Số L được gọi là giới hạn của hàm số $f(x)$ khi $x \rightarrow \infty$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ (bé tùy ý) tồn tại số $M > 0$ (lớn tùy ý) sao cho với mọi x thỏa $|x| > M$ ta có $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow \infty$.

Mệnh đề: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$

Tương tự, ta có các định nghĩa giới hạn vô tận

Ví dụ 1:

a) Chứng minh: $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$.

Vì $x \rightarrow 0$ ta có thể chỉ rút: $|x| < \frac{\pi}{2} \Rightarrow |\sin x| < |x| < \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$, bé tùy ý:

$$\exists \delta = \varepsilon > 0 : 0 < |x - 0| = |x| < \delta \Rightarrow |\sin x - 0| = |\sin x| \leq |x| < \varepsilon$$

$$\text{Vậy } \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$$

b) Chứng minh: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$.

Khi $x \rightarrow 3 \Rightarrow x - 3 \rightarrow 0$ ta có: $\left| \frac{x^2 - 9}{x - 3} - 6 \right| = |(x + 3) - 6| = |x - 3| < \varepsilon$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > \varepsilon : 0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^2 - 9}{x - 3} - 6 \right| < \varepsilon.$$

$$\text{Vậy: } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$$

c) Chứng minh: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$.

Xét: $\left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \left| \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{|x|} < \varepsilon \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{\varepsilon}$, với mọi $\varepsilon > 0$ (bé tùy ý),

$$\exists M = \frac{1}{\varepsilon} > 0 : |x| > M \Rightarrow \left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon.$$

$$\text{Vậy } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Qua các ví dụ trên. Ta thấy việc tìm giới hạn theo định nghĩa khá phức tạp. Thông thường ta sẽ sử dụng các quy tắc tìm giới hạn và dựa trên các giới hạn đã biết để tính giới hạn.

3.2. Các tính chất

Dựa vào giới hạn của dãy số, định nghĩa giới hạn của hàm số, ta suy ra các tính chất sau:

1. Nếu $f(x)$ có giới hạn thì giới hạn đó là duy nhất.
2. Nếu hàm số $f(x)$ có giới hạn là L khi $x \rightarrow x_0$ và $L > a$ (hay $L < a$) thì trong một lân cận nào đó của x_0 (không kể x_0) ta có $f(x) > a$ (hay $f(x) < a$).
3. Nếu $f(x) \leq g(x)$ trong một lân cận nào đó của điểm x_0 và

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b \text{ thì } b \leq a.$$

4. Nếu $f(x) = C$ (với C là hằng số) thì $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = C$.

5. Nếu $f(x)$ là một hàm số sơ cấp xác định tại điểm x_0 và ở trong lân cận x_0 thì $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

6. Giả sử $f(x)$, $g(x)$ và $h(x)$ là những hàm số được xác định trong một lân cận nào đó của điểm x_0 , không nhất thiết xác định tại x_0 . Khi đó, nếu các hàm số $f(x)$, $g(x)$ và $h(x)$ thỏa mãn điều kiện: $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ và

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L \text{ thì } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L.$$

7. Giả sử hàm số $f(x)$ xác định tại mọi x dương lớn tùy ý, khi đó nếu hàm $f(x)$ là hàm số đơn điệu tăng và bị chặn trên thì $f(x)$ có giới hạn khi $x \rightarrow +\infty$

8. Giả sử hàm số $f(x)$ xác định tại mọi x âm lớn tùy ý về giá trị tuyệt đối, khi đó nếu hàm $f(x)$ là hàm số đơn điệu giảm và bị chặn dưới thì $f(x)$ có giới hạn khi $x \rightarrow -\infty$.

9. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L.$

10. Nếu các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có giới hạn khi $x \rightarrow x_0$ thì các hàm $[f(x) \pm g(x)]$, $f(x).g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ cũng có giới hạn và ta có:

$$\lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x).$$

$$\lim [f(x).g(x)] = \lim f(x).\lim g(x).$$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} ; \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$$

11. Xét hàm hợp $f(u)$ và $u = u(x)$, khi đó ta có:

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = u_0$, $f(u)$ xác định trong một lân cận của u_0 và $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = L$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} f[u(x)] = L$.

Ví dụ 2: Tính: $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{2^x(x^2 + 3x - 5)}$

Đặt $f(u) = \sqrt{u}$; $u(x) = 2^x(x^2 + 3x - 5)$, ta có

$$\lim_{x \rightarrow 2} u(x) = \lim_{x \rightarrow 2} 2^x(x^2 + 3x - 5) = 20$$

$$\lim_{u \rightarrow 20} f(u) = \lim_{u \rightarrow 20} \sqrt{u} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\text{Vậy } \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{2^x(x^2 + 3x - 5)} = 2\sqrt{5}$$

3.3. Các giới hạn cơ bản

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a. \text{ Đặt biệt } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \text{ hay } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Chú ý: Khi tính giới hạn của hàm số chúng ta thường gặp các dạng vô định như : $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 1^\infty$. sau đây là một vài ví dụ minh họa.

Ví dụ 3:

$$\text{a). Tính: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x}.$$

$$\begin{aligned} \text{Có: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x+x^2} - 1)(\sqrt{1+x+x^2} + 1)}{x(\sqrt{1+x+x^2} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x(\sqrt{1+x+x^2} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{b). Tính: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 - 3x + 2}.$$

$$\text{Có: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-6)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-6}{x-2} = 5$$

$$\text{c). Tính: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}.$$

$$\text{Có: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cdot \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\text{d). Tính: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

$$\text{Có: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{e). Tính: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}.$$

$$\text{Có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = 1.$$

$$\text{f). Tính: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} + \sqrt{x} - \sqrt{x}).$$

$$\text{Có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} + \sqrt{x} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{g). Tính: } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{2x}}.$$

$$\text{Có: } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} [(1 + \sin x)^{\frac{1}{\sin x}}]^{\frac{\sin x}{2x}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

❖ **Bài tập củng cố:**

1). Tìm các giới hạn:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} \quad & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{2 - x} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{2x-1} \right)^{x^2} \quad \text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3n^3} \\ \text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+1}+2n)^2}{\sqrt[3]{n^6+2}} \quad & \text{f) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)!-n!} \quad \text{g) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right) \\ \text{h) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}} \quad & \text{i) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + x + 1}{x^3 + 7x + 5} \quad \text{j) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x}) \end{aligned}$$

2). Tìm các giới hạn:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6} \quad & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2} \quad & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1} \quad \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} \quad \text{g) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1} \end{aligned}$$

3). Tìm các giới hạn:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x) \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x})$$

4). Tìm các giới hạn:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(a+x) - \cos(a-x)}{x} \quad & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1+\cos x}}{x^2} \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x} \quad & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} \quad \text{f) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cot gx - \cot ga}{x-a} \\ \text{g) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin x}{3x} \quad & \text{h) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \cot gx \right) \end{aligned}$$

5). Tìm các giới hạn:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 2} \right)^x \quad & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\cot g^2 x} \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \tan x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}} \quad & \text{e) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-3} \right)^{3x+4} \end{aligned}$$