

**TRƯỜNG ĐẠI HỌC TRÀ VINH
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN
BỘ MÔN TOÁN**



TÀI LIỆU GIẢNG DẠY MÔN VI TÍCH PHÂN A2

GV biên soạn: Nguyễn Văn Tiên

**Trà vinh, tháng 2 năm 2013
Lưu hành nội bộ**

MỤC LỤC

Nội dung	Trang
CHƯƠNG 1. Đạo hàm và vi phân của hàm nhiều biến.....	1
1.1. Các khái niệm cơ bản	1
1.2. Đạo hàm và vi phân	12
1.3. Cực trị và GTLN- GTNN	20
Bài tập củng cố chương 1	29
CHƯƠNG 2. Tích phân bội	33
2.1. Tích phân hai lớp	33
2.2. Tích phân 3 lớp	52
Bài tập củng cố chương 2	65
CHƯƠNG 3. Tích phân đường - Tích phân mặt	68
3.1. Tích phân đường	68
3.2. Tích phân mặt	76
Bài tập củng cố chương 3	86
CHƯƠNG 4. Phương trình vi phân	89
4.1. Tổng quan về phương trình vi phân	89
4.2. Phương trình vi phân cấp 1	90
4.3. Phương trình vi phân cấp 2	99
Bài tập củng cố chương 4	109
TÀI LIỆU THAM KHẢO	112

CHƯƠNG 1

ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

❖ **Mục tiêu học tập:** Sau khi học xong bài này, người học có thể:

- Hiểu khái niệm hàm nhiều biến.
- Tính đạo hàm và vi phân của hàm nhiều biến.
- Ứng dụng đạo hàm và vi phân để tính gần đúng giá trị của biểu thức, tìm cực trị, giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.

1.1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.1.1. Tập hợp trong $\mathbb{R}^n$

Gọi $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i=1, 2, \dots, n\}$ là không gian n chiều ($n \in \mathbb{N}^*$).

Phần tử $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ của $\mathbb{R}^n$ được gọi là điểm hay vector, còn x_i ($i=1, 2, \dots, n$) được gọi là toạ độ thứ i của x .

Hai phần tử $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ và $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ được gọi là bằng nhau nếu $x_i = y_i$ ($i=1, 2, \dots, n$).

Khoảng cách giữa hai điểm $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ và $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ là số

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Trong tài liệu này, ta sẽ làm việc trên không gian nền gồm tập $\mathbb{R}^n$ được trang bị khoảng cách $d(x, y)$ như trên.

Trong $\mathbb{R}^n$ cho điểm M_0 và số thực $\varepsilon > 0$. lân cận của điểm M_0 bán kính ε là tập hợp $N_\varepsilon(M_0) = \{M \in \mathbb{R}^n : d(M, M_0) < \varepsilon\}$.

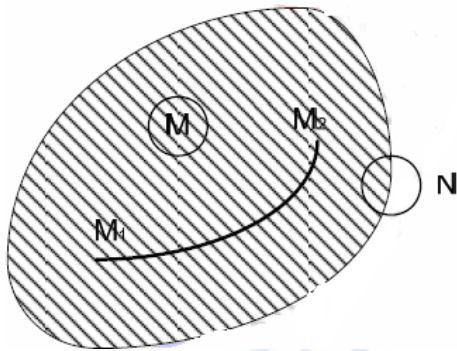
* **Định nghĩa:** Gọi S là tập con của $\mathbb{R}^n$ và $M_0 \in \mathbb{R}^n$:

♦ Điểm M_0 được gọi là điểm trong của S nếu tồn tại lân cận N_ε của M_0 sao cho $M_0 \in N_\varepsilon \subset S$. Tập S được gọi là mở nếu mọi điểm của nó đều là điểm trong.

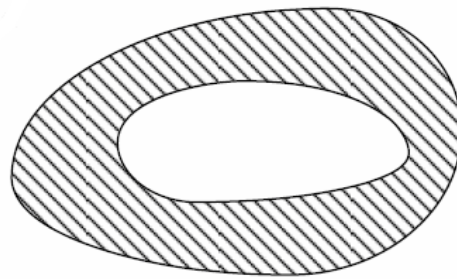
♦ Điểm M_0 được gọi là điểm biên của S nếu với mọi lân cận N_ε của M_0 đều vừa chứa những điểm thuộc S , vừa chứa những điểm không thuộc S , tức là $N_\varepsilon \cap S \neq \emptyset$, $N_\varepsilon \cap (\mathbb{R}^n \setminus S) \neq \emptyset$. Như vậy của S có thể thuộc S , cũng có thể không thuộc S . Tập hợp tất cả các điểm biên của S gọi là biên của S , kí hiệu ∂S .

♦ S được gọi là tập đóng nếu mọi điểm biên của S đều là điểm thuộc S , kí hiệu $\bar{S}$.

- ♦ Phần trong của S là tập các điểm trong của S .
- ♦ Tập $S = \{M \in \mathbb{R}^n / d(M_0, M) < r\}$ ($r > 0$) được gọi là hình cầu mở tâm M_0 , bán kính r .
- ♦ Tập S được gọi là bị chặn nếu tồn tại một hình cầu nào đó chứa nó.
- ♦ Tập S gọi là liên thông nếu với mọi cặp điểm M_1, M_2 trong S đều được nối với nhau bởi một đường cong liên tục nào đó nằm trọn trong S . Tập liên thông S gọi là đơn liên nếu nó bị giới hạn bởi một mặt kín (một đường cong kín trong $\mathbb{R}^n$; tập liên thông S gọi là đa liên nếu nó bị giới hạn bởi từ hai mặt kín trở lên rời nhau từng đôi một.



Hình 1



Hình 2

Trong $\mathbb{R}^2$, tập S trên Hình 1 liên thông, còn tập S trong Hình 2 là không liên thông.

1.1.2. Hàm nhiều biến

1.1.2.1. Định nghĩa

Cho $\mathbb{R}^n$ và $D \subset \mathbb{R}^n$.

Ánh xạ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$

$$M = (x_1, \dots, x_n) \mapsto u = f(M) = f(x_1, \dots, x_n)$$

gọi hàm số của n biến số xác định trên D .

Tập D được gọi là tập xác định của hàm f . Đó là tập các điểm $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sao cho $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ xác định.

Tập $\{f(M) / M \in D\}$ gọi là tập giá trị của hàm số.

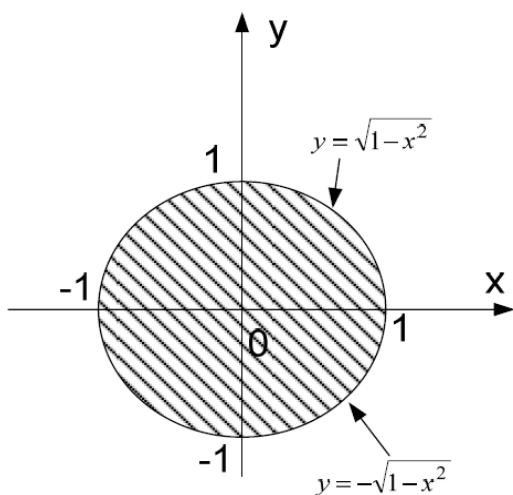
Khi $n=2$ hoặc $n=3$ ta thường kí hiệu $z=f(x, y)$, $u=f(x, y, z)$.

1.1.2.2. Ví dụ

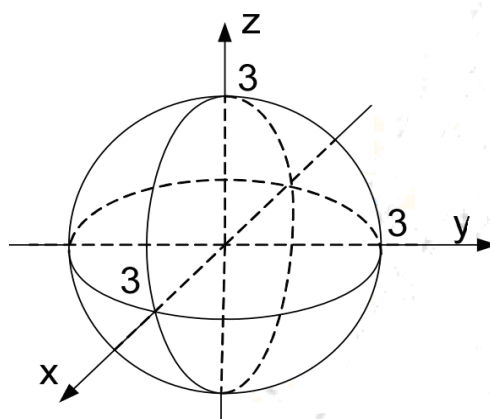
Trong $\mathbb{R}^2$, cho hàm số $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ thì $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. (hình 3)

Trong $\mathbb{R}^3$, cho hàm số $f(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}}$ thì

$$D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < 9\}. \text{ (hình 4)}$$



Hình 3

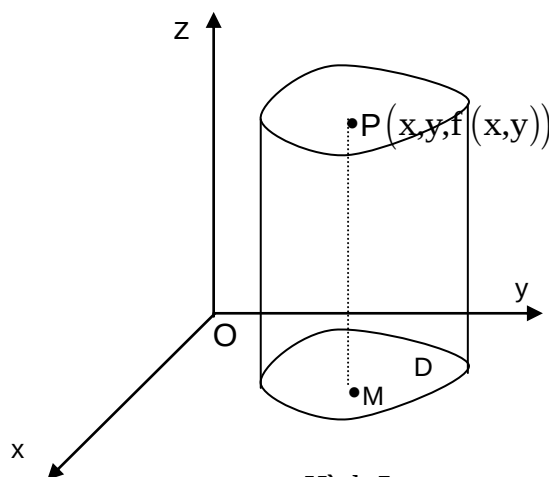


Hình 4

1.1.3. Biểu diễn hình học của hàm hai biến

Giả sử hàm hai biến $z=f(x,y)$ xác định trên miền D . Ta thấy cặp (x,y) biểu diễn một điểm $M(x,y)$ trong mặt phẳng Oxy , nên có thể xem hàm hai biến $f(x,y)$ là hàm của điểm $M(x,y)$. Ta biểu diễn hình học hàm hai biến như sau:

Vẽ hệ trục tọa độ Đêcác vuông góc $Oxyz$. Với mọi điểm $M(x,y)$ trong miền D của mặt phẳng Oxy cho tương ứng với một điểm P trong không gian có tọa độ là $(x,y,f(x,y))$. Quỹ tích của điểm P khi M chạy trong miền D được gọi là đồ thị của hàm hai biến $z=f(x,y)$.

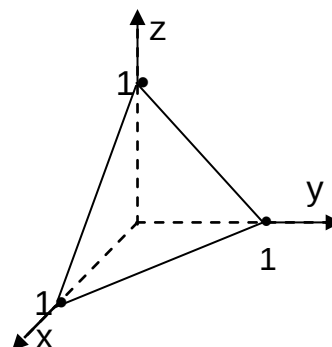


Hình 5

Đồ thị của hàm hai biến thường là một mặt cong trong không gian, mà hình chiếu của nó trên mặt phẳng Oxy là miền xác định của hàm.

Ví dụ:

Hàm $z=1-x-y$ ($0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1-x$) có đồ thị là



Hình 6

một mặt tam giác với các đỉnh $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$. (Hình 6)

1.1.4. Mặt bậc hai

Mặt bậc hai là những mặt mà phương trình của chúng là bậc hai đối với x, y, z .

1.1.4.1. Mặt elipxôit

Mặt elipxôit là mặt có phương trình:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

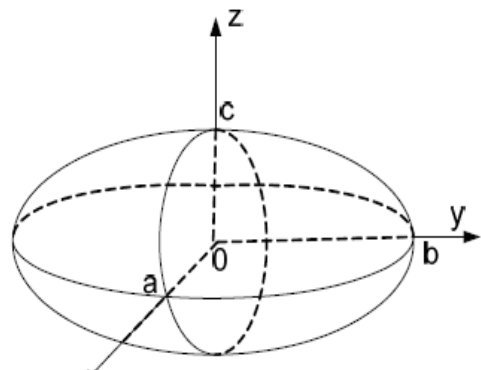
Trong đó a, b, c là những số dương. Vì x, y, z có mặt trong phương trình có mũ chẵn nên mặt elipxôit nhận các mặt phẳng tọa độ làm các mặt đối xứng, nhận O làm tâm đối xứng.

♦ Cắt mặt elipxôit bởi các mặt phẳng tọa độ xOy , yOz , zOx , các giao tuyến theo thứ tự là các đường elip:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z=0;$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad y=0;$$

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad x=0;$$



♦ Cắt mặt elipxôit bởi mặt phẳng $z=k$, k là hằng số, giao tuyến có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2}, \quad z=k \quad (*)$$

Nếu $k < -c$ hoặc $k > c$ thì phương trình $(*)$ vô nghiệm, mặt phẳng $z=k$ không cắt mặt elipxôit.

Nếu $k = \pm c$ thì giao tuyến thu về điểm $(0,0,\pm c)$.

Nếu $-c < k < c$ thì phương trình $(*)$ có thể viết:

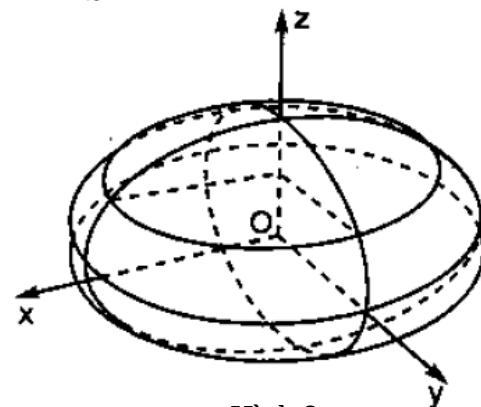
$$\frac{x^2}{a^2 \left(1 - \frac{k^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{k^2}{c^2}\right)} = 1, \quad z=k$$

Đó là phương trình của đường elip có tâm tại $(0,0,k)$, có bán kính trục là

$$a \sqrt{1 - \frac{k^2}{c^2}}, \quad b \sqrt{1 - \frac{k^2}{c^2}}$$

Khi k tăng từ 0 đến c , các bán kính trục nhỏ dần đến 0. Khi k tăng từ $-c$ đến c giao tuyến di chuyển và sinh ra mặt elipxôit. Các hằng số a, b, c gọi là các bán kính trục của elipxôit.

Nếu hai trong ba bán trục bằng nhau, chẳng hạn $a=c$, ta có mặt elipxôit tròn xoay, sinh bởi



Hình 8

đường elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z=0$ quay quanh trục Oz. Nếu $a=b=c$, mặt elipxôit trở thành mặt cầu tâm O bán kính a.

1.1.4.2. Mặt hypebôlôit một tầng

Mặt hypebôlôit một tầng phương trình có dạng:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Trong đó a, b, c là những số dương. Mặt đó nhận các phẳng tọa độ làm các mặt đối xứng, nhận O làm tâm đối xứng. Mặt hypebôlôit một tầng cắt mặt

phẳng tọa độ xOy theo đường elip: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z=0$; nó cắt các mặt phẳng tọa xOz, yOz theo các đường hypebol.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, y=0;$$

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, x=0$$

♦ Giao tuyến của mặt hypebôlôit một tầng với mặt phẳng $z=k$, k là hằng số, là đường elip có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}, z=k$$

Khi $|k|$ tăng từ 0 đến $+\infty$, các bán trục của elip đó theo thứ tự tăng từ a đến $+\infty$ và từ b đến $+\infty$. Khi k biến thiên từ $-\infty$ đến $+\infty$ giao tuyến đó dịch chuyển và sinh ra mặt hypebôlôit một tầng.

Nếu $a=b$, ta có mặt hypebôlôit một tầng tròn xoay, do hypebol

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, y=0 \text{ quay quanh trục Oz sinh ra.}$$

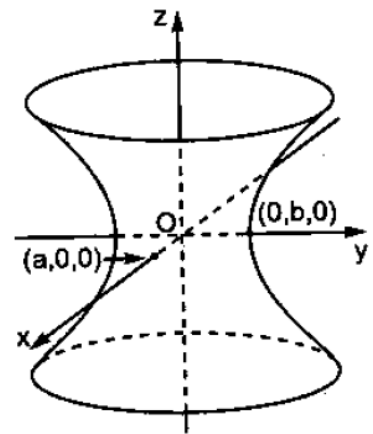
1.1.4.3. Mặt hypebôlôit hai tầng

Mặt hypebôlôit hai tầng là mặt có phương trình:

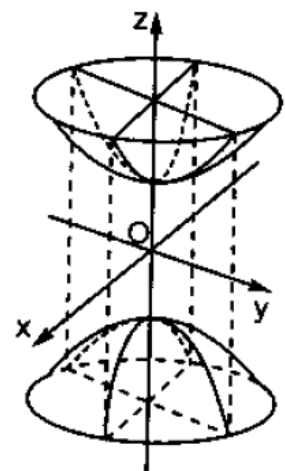
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

Trong đó a, b, c là những số dương. Mặt hypebôlôit nhận các mặt phẳng tọa độ làm các mặt đối xứng, nhận O làm tâm đối xứng.

♦ Cắt mặt hypebôlôit hai tầng bởi mặt phẳng $z=k$, k là hằng số, giao tuyến có phương trình:



Hình 9



Hình 10

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2} - 1, z=k$$

Nếu $|k| < c$ thì mặt phẳng $z=k$ không cắt mặt hypebôlôit hai tầng.

Nếu $k = \pm c$ thì mặt phẳng $z=k$ tiếp xúc mặt hypebôlôit hai tầng tại $(0,0,c)$ hoặc $(0,0,-c)$.

Nếu $|k| > c$ thì giao tuyến của mặt phẳng $z=k$ với mặt hypebôlôit hai tầng là đường elip có bán trục là $a\sqrt{\left(\frac{k^2}{c^2}-1\right)}$, $b\sqrt{\left(\frac{k^2}{c^2}-1\right)}$.

Khi $|k|$ tăng từ c đến $+\infty$, các bán kính trục lớn dần từ 0 đến $+\infty$, giao tuyến di chuyển và sinh ra mặt hypebôlôit hai tầng.

Nếu $a=b$, ta có mặt hai tầng tròn xoay, do hypebôn

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1, z=0 \text{ quay quanh trục Oz sinh ra.}$$

1.1.4.4. Mặt parabolôit eliptic

Đó là mặt có phương trình $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$ trong đó p, q là các số dương.

Mặt parabolôit eliptic nhận các mặt phẳng yOz, zOx làm mặt đối xứng.

♦ Mặt parabolôit eliptic cắt các mặt phẳng $x=0, y=0$ theo các đường parabol nhận Oz làm trục: $y^2 = 2qz, x=0$; $x^2 = 2pz, y=0$.

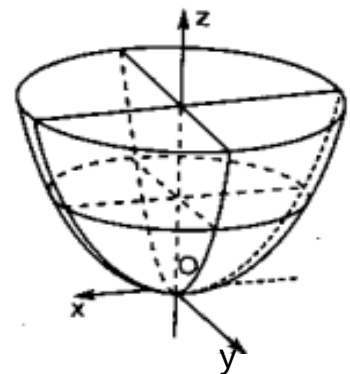
♦ Giao tuyến của mặt parabolôit eliptic với mặt phẳng $z=k$ là đường elip có các bán trục: $\sqrt{2pk}, \sqrt{2qk}$: $\frac{x^2}{2pk} + \frac{y^2}{2qk} = 2z, z=k$ nếu $k>0$, là gốc toạ độ nếu $k=0$. Khi k tăng từ 0 đến $+\infty$, giao tuyến di chuyển và sinh ra mặt parabolôit eliptic.

1.1.4.5. Mặt parabolôit hypebôlic

Đó là mặt có phương trình $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$ trong đó p, q là các số dương.

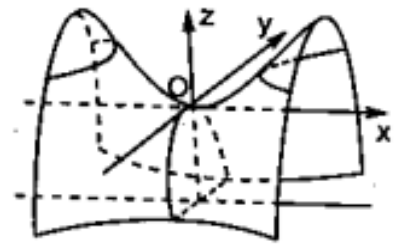
Mặt parabolôit hypebôlic nhận các mặt phẳng yOz, zOx làm mặt đối xứng.

♦ Cắt mặt parabolôit hypebôlic bởi mặt phẳng zOx giao tuyến là đường parabol $x^2=2pz, y=0$, parabol này nhận Oz làm trục.



Hình 11

♦ Cắt mặt parabolôit hypebôlic bởi mặt phẳng $x=k$ song song với mặt phẳng yOz , ta được đường: $y^2 = -2q\left(z - \frac{k^2}{2p}\right)$, $x=k$. Đó là đường parabol có tham số q , có trục song song với Oz , quay bề lõm về phía $z < 0$, có đỉnh nằm trên đường $x^2 = 2pz$, $y=0$. Khi k biến thiên từ $-\infty$ đến $+\infty$, giao tuyến di chuyển và sinh ra mặt parabolôit hypebôlic.



Hình 12

♦ Cắt mặt parabolôit hypebôlic bởi mặt phẳng $z=k$, ta được đường $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$, $z=k$.

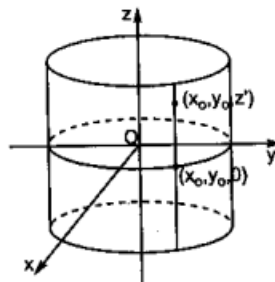
Nếu $k > 0$, đó là đường hypebôn có trục thực nằm trong mặt phẳng zOx và song song với Ox , có bán trục thực $\sqrt{2pk}$, bán trục ảo $\sqrt{2qk}$. Nếu $k < 0$, đó là đường hypebôn có trục thực nằm trong mặt phẳng yOz và song song với Oy , bán trục thực $\sqrt{-2qk}$, bán trục ảo $\sqrt{-2pk}$.

Nếu $k=0$, phương trình của giao tuyến trở thành $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0$; $z=0$, nên giao tuyến trong trường

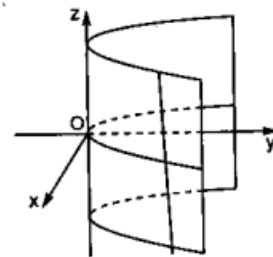
hợp này là cặp đường thẳng giao nhau $y = \pm \sqrt{\frac{q}{p}}x$ trong mặt phẳng Oxy .

1.1.4.6. Mặt trụ bậc hai

Nếu 1 trong 3 biến số không có mặt trong phương trình của mặt nào đó thì mặt đó là mặt trụ.



Hình 13



Hình 14

♦ Chẳng hạn, mặt có

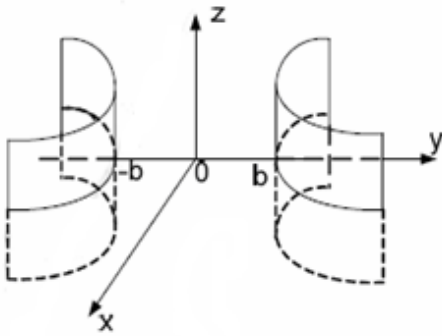
phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, trong đó a, b là các hằng số dương là mặt trụ elip có đường sinh song song trục Oz .

♦ Mặt có phương trình $y = x^2$ biểu diễn mặt trụ parabol có đường sinh song song trục Oz .

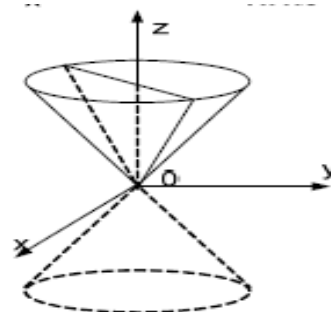
♦ Mặt trụ hyperbolic có phương trình: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$.

1.1.4.7. Mặt nón bậc hai

Phương trình chính tắc của mặt nón có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ (Hình 16).



Hình 15



Hình 16

1.1.5. Giới hạn của hàm nhiều biến

1.1.5.1. Định nghĩa

Nói rằng dãy điểm $\{M_n(x_n, y_n)\}$ dần đến điểm $M_0(x_0, y_0)$ trong $\mathbb{R}^2$; kí hiệu $M_n \rightarrow M_0$

khi $n \rightarrow \infty$ nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} d(M_n, M_0) = 0$ hay $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0 \end{cases}$

1.1.5.2. Định nghĩa

Cho hàm $z = f(M) = f(x, y)$ xác định trong lân cận U nào đó của điểm $M_0(x_0, y_0)$, có thể trừ tại điểm M_0 . Ta nói rằng hàm $f(M)$ có giới hạn là L khi $M(x, y)$ dần đến $M_0(x_0, y_0)$ nếu mọi dãy điểm $M_n(x_n, y_n)$ (khác M_0) thuộc lân cận U dần đến M_0 ta đều có: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = L$.

Thường kí hiệu:

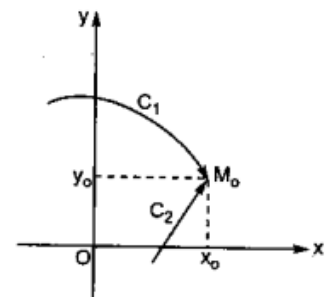
$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = L \text{ hay } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = L \text{ hay } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = L.$$

(Sử dụng ngôn ngữ ε, δ ta cũng có định nghĩa sau: Hàm $f(M)$ có giới hạn là L khi $M \rightarrow M_0$ khi và chỉ khi $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon, M_0) > 0$ sao cho $d(M_0, M) < \delta \Rightarrow |f(M) - L| < \varepsilon$).

*Chú ý:

1. Tất cả các khái niệm giới hạn vô hạn hoặc các định lí về giới hạn: tổng, tích, thương đều giống như hàm số một biến số.

2. Từ định nghĩa ta nhận thấy: Giới hạn L của hàm số $f(x, y)$ khi $M \rightarrow M_0$ không phụ thuộc đường đi của M tiến đến M_0 . Vì thế, nếu khi dãy M_n tiến đến M_0 trên hai đường C_1, C_2 khác nhau mà dãy $f(M_n)$ tiến đến hai giới hạn khác nhau thì hàm số không có giới hạn tại M_0 .



Hình 17

1.1.5.3. Ví dụ

1. Tìm giới hạn của các hàm số sau:

$$a) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2 - y^2}{x - y}.$$

Giải

Ta có $M_0(1,1)$ không thuộc miền xác định D của hàm số đã cho.

Xét dãy điểm bất kì $M_k(x_k, y_k) \subset D$ hội tụ đến điểm $M_0(1,1)$, nghĩa là:

$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 1, \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = 1$. Giới hạn của dãy giá trị hàm số tương ứng là:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(M_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k^2 - y_k^2}{x_k - y_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} (x_k + y_k) = 1 + 1.$$

Vậy hàm số có giới hạn tại $M_0(1,1)$ bằng 2.

$$b) \lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x+y}{x^2 - xy + y^2}.$$

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \frac{x+y}{x^2 - xy + y^2} \right| = \frac{|x+y|}{|x^2 - xy + y^2|} \leq \frac{|x+y|}{|x^2 + y^2| - |xy|} \\ &\leq \frac{|x+y|}{2|xy| - |xy|} = \frac{|x+y|}{|xy|} \leq \left| \frac{1}{x} \right| + \left| \frac{1}{y} \right| \rightarrow 0 \text{ khi } \begin{cases} x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty \end{cases} \end{aligned}$$

Theo nguyên lý kẹp ta được:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x+y}{x^2 - xy + y^2} = 0.$$

$$c) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

Giải

Ta có $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$0 \leq \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = |x| \frac{|x| + |y|}{x^2 + y^2} \leq \frac{|x|}{2}$$

$$\text{Do đó khi } x \rightarrow 0 \text{ thì } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$$

2. Chứng minh rằng hàm số sau không có giới hạn tại điểm $M_0(0,0)$:

$$f(x,y) = \frac{x^2 + 3y^2}{5xy}$$

Giải

Xét dãy điểm $M_k \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right) \subset D$ miền xác định của hàm số và dãy điểm này hội tụ đến điểm

$M_0(0,0)$. Khi đó dãy hàm số tương ứng có giới hạn là:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k, y_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}}{\frac{5}{k^2}} = \frac{4}{5}$$

Mặt khác, xét dãy điểm $N_k \left(\frac{1}{k}, \frac{2}{k} \right) \subset D$.

Dãy giá trị hàm số tương ứng có giới hạn là:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k, y_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k^2} + \frac{12}{k^2}}{\frac{10}{k^2}} = \frac{13}{10}$$

Vậy theo định nghĩa hàm số đã cho không có giới hạn tại điểm $M_0(0,0)$.

1.1.6. Tính liên tục của hàm số nhiều biến số

1.1.6.1. Định nghĩa

Giả sử $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, điểm M_0 thuộc D .

Hàm số f được gọi là liên tục tại M_0 nếu:

i) $M_0 \in D$ (tức là tồn tại giá trị $f(M_0)$)

ii) Tồn tại giới hạn $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M)$.

iii) $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0)$.

Giả sử hàm số $f(M)$ xác định trên miền D . Nói rằng hàm số liên tục trên miền D nếu nó liên tục tại mọi điểm $M \in D$.

Hàm số $f(M)$ liên tục trên miền đóng $\bar{D}$ nếu nó liên tục trên miền D và liên tục tại mọi điểm $N \in \partial D$.

***Chú ý:** Với $M_0(x_0, y_0)$, gọi: $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, là các số gia của các biến độc lập x , y và $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ là số gia toàn phần của hàm số $f(x, y)$ tương ứng với các số gia Δx , Δy . Khi đó hàm số $f(x, y)$ liên tục tại (x_0, y_0) nếu nó xác định tại (x_0, y_0) và

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \Delta f = 0.$$

1.1.6.2. Định nghĩa

Hàm số $u=f(M)$ được gọi là gián đoạn tại M_0 nếu nó không liên tục tại điểm này.

Như vậy hàm $u=f(M)$ gián đoạn tại M_0 nếu:

- i) Hoặc không xác định tại M_0 .
- ii) Hoặc hàm xác định tại M_0 nhưng không tồn tại $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M)$.
- iii) Hoặc hàm xác định tại M_0 nhưng $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) \neq f(M_0)$.

1.1.6.3. Ví dụ

Xét tính liên tục của các hàm số sau:

$$a) f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{khi } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x=y=0 \end{cases}$$

Giải

Hàm số $f(x,y)$ liên tục tại mọi điểm $x^2 + y^2 \neq 0$.

Xét tính liên tục của $f(x,y)$ tại $(0,0)$:

$$\text{Ta có: } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0 = f(0,0)$$

Vậy $f(x,y)$ liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

$$b) f(x,y) = \begin{cases} \frac{|xy|^\alpha}{x^2 + y^2} & \text{khi } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x=y=0 \end{cases}$$

trong đó α là hằng số dương.

Giải

Hàm số $f(x,y)$ liên tục tại mọi điểm $x^2 + y^2 \neq 0$.

Xét tính liên tục của hàm số $f(x,y)$ tại điểm $(0,0)$.

$$\text{Ta có } |xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \Rightarrow |f(x,y)| \leq \frac{1}{2^\alpha} (x^2 + y^2)^{\alpha-1}$$

$$\text{Nếu } \alpha > 1 \text{ thì } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0).$$

Vậy $f(x,y)$ liên tục tại điểm $(0,0)$.

Nếu $\alpha \leq 1$ thì

$$\text{Ta có: } f(x,x) = \frac{x^{2\alpha}}{2x^2} = \frac{1}{2x^{2(1-\alpha)}}. \text{ Nên } f(x,x) \text{ không dần tới } 0 \text{ khi } x \rightarrow 0.$$

Vậy $f(x,y)$ không liên tục tại $(0,0)$.

1.2. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

1.2.1. Đạo hàm riêng

1.2.1.1. Định nghĩa

Cho $Z = f(x,y)$ xác định trong miền D và $M_0(x_0, y_0) \in D$. Cố định $y = y_0$, nếu hàm $f(x, y_0)$ có đạo hàm theo biến x tại $x = x_0$ thì đạo hàm đó được gọi là đạo hàm riêng của hàm $f(x,y)$ theo biến x tại $M_0(x_0, y_0)$.

Ký hiệu: $Z'_x, f'_x(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial Z}{\partial x}(x_0, y_0)$, tức là

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Tương tự: Cố định $x = x_0$, nếu hàm $f(x_0, y)$ có đạo hàm theo biến y tại $y = y_0$ thì đạo hàm đó được gọi là đạo hàm riêng của hàm $f(x,y)$ theo biến y tại $M_0(x_0, y_0)$.

Ký hiệu: $Z'_y, f'_y(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), \frac{\partial Z}{\partial y}(x_0, y_0)$. tức là

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Một cách tổng quát, ta có thể mở rộng khái niệm đạo hàm riêng ra đối với hàm n biến với $n \geq 3$. Chẳng hạn, đạo hàm riêng theo biến z của hàm $u = f(x, y, z)$ tại $M_0(x_0, y_0, z_0)$ là:

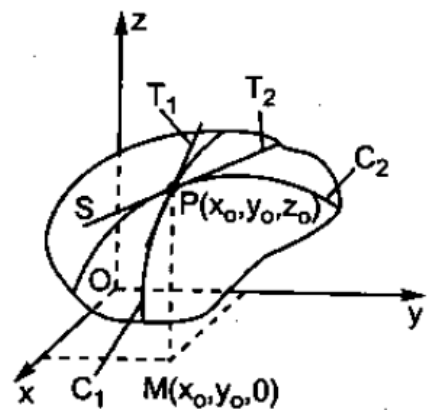
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta z}$$

* **Nhận xét:** Như vậy khi tính đạo hàm riêng theo biến x tại (x_0, y_0) bằng cách coi $y = y_0$ là hằng số và tính đạo hàm của hàm một biến $f(x, y_0)$ tại $x = x_0$. Tương tự, tính đạo hàm riêng theo biến y tại (x_0, y_0) ta tính đạo hàm của hàm một biến $f(x, y_0)$ tại $y = y_0$ (xem $x = x_0$ là hằng số).

Như vậy, theo nhận xét trên thì các quy tắc và công thức tính đạo hàm riêng cũng giống như quy tắc và các công thức tính đạo hàm hàm một biến.

1.2.1.2. Ý nghĩa

Gọi S là đồ thị của hàm số $Z = f(x,y)$, C_1 là giao tuyến của S và mặt phẳng $y = y_0$, C_2 chính là đồ thị của hàm số một biến số $f(x, y_0)$ trên mặt phẳng $y = y_0$. Do đó đạo hàm riêng $f'_x(x_0, y_0)$ là hệ số góc của đường tiếp



Hình 18

tuyến T_1 của C_1 tại điểm $P(x_0, y_0, z_0)$ trong đó $Z_0 = f(x_0, y_0)$. Còn đạo hàm riêng $f'_y(x_0, y_0)$ là hệ số góc của đường tiếp tuyến T_2 của C_2 của mặt S với mặt phẳng $x = x_0$ tại điểm $P(x_0, y_0, z_0)$.

Đạo hàm riêng của hàm số $z = f(x, y)$ theo biến x tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ cũng biểu thị vận tốc biến thiên của hàm số $Z = f(x, y)$ theo hướng x tại điểm $M_0(x_0, y_0)$, còn đạo hàm riêng của hàm số $Z = f(x, y)$ theo biến y tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ biểu thị vận tốc biến thiên của hàm số $Z = f(x, y)$ theo hướng y tại điểm $M_0(x_0, y_0)$,

1.2.1.3. Ví dụ

- Tìm đạo hàm riêng của hàm số $Z = \ln \tan \frac{x}{y}$.
- Tìm đạo hàm riêng của hàm số $u = e^{x^2 y} \cos z$.
- Tìm đạo hàm riêng của hàm số $u = \arctan(x - y)^z$.

1.2.1.4. Đạo hàm riêng cấp cao

♦ Định nghĩa

Giả sử hàm $Z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng Z'_x, Z'_y . Các đạo hàm riêng này được gọi là đạo hàm riêng cấp 1 của hàm số $Z = f(x, y)$. Chúng cũng là các hàm số theo biến x, y . Vì vậy có thể xét đạo hàm riêng của chúng: $(Z'_x)'_x, (Z'_x)'_y, (Z'_y)'_x, (Z'_y)'_y$ gọi là đạo hàm riêng cấp 2 của hàm $Z = f(x, y)$. Ta dùng các kí hiệu sau:

$$(Z'_x)'_x = Z''_{xx} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}, (Z'_x)'_y = Z''_{xy} = \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x},$$

$$(Z'_y)'_x = Z''_{yx} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}, (Z'_y)'_y = Z''_{yy} = \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}$$

Tổng quát, các đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng cấp $(n-1)$ của hàm $Z = f(x, y)$ được gọi là các đạo hàm riêng cấp n của hàm Z .

♦ Định lý 1. (Định lý Schwartz)

Nếu hàm $Z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ trong miền D và nếu các đạo hàm riêng ấy liên tục tại $(x_0, y_0) \in D$ thì

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

Định lí Schwartz còn được mở rộng cho hàm nhiều hơn hai biến và cho các đạo hàm riêng cấp cao hơn. Chẳng hạn, hàm số $u=f(x,y,z)$ có các đạo hàm riêng cấp 3 liên tục tại điểm $(x_0,y_0,z_0) \in D$ thì

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}(x_0,y_0,z_0) = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z \partial y}(x_0,y_0,z_0) = \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x \partial z}(x_0,y_0,z_0)$$

♦**Ví dụ:**

Tính đạo hàm riêng cấp 2 của các hàm số sau:

a) $Z=f(x,y)=x^2e^y+x^3y^2-y^5$.

b) $Z=f(x,y)=e^{\frac{\sin y}{x}}+\arctan xy$.

c) $u=f(x,y,z)=z^2e^{x-yz}$.

1.2.2. Vi phân

1.2.2.1. Định nghĩa

Cho hàm số $Z=f(x,y)$ xác định trong miền D và $(x_0,y_0) \in D$. Cho x số gia Δx , y số gia Δy sao cho $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \in D$.

Hàm $Z=f(x,y)$ được gọi là khả vi tại (x_0,y_0) nếu số gia toàn phần

$$\Delta f=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

có thể viết dưới dạng:

$$\Delta f=A.\Delta x+B.\Delta y+\alpha.\Delta x+\beta.\Delta y$$

trong đó, A, B là các hằng số; $\alpha, \beta \rightarrow 0$ khi $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$.

Khi đó đại lượng $A.\Delta x+B.\Delta y$ được gọi là vi phân toàn phần của hàm $Z=f(x,y)$ tại (x_0,y_0) và kí hiệu là $df(x_0,y_0)$ hay dz . Ta có:

$$dz=df(x_0,y_0)=A.\Delta x+B.\Delta y$$

Hàm $Z=f(x,y)$ gọi là khả vi trong miền D nếu $Z=f(x,y)$ khả vi tại mọi điểm $(x,y) \in D$.

***Nhận xét:**

Từ định nghĩa trên, ta có:

$$\text{Hàm số } Z=f(x,y) \text{ khả vi tại } (x_0,y_0) \Leftrightarrow \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta f - df}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0.$$

1.2.2.2. Điều kiện khả vi của hàm số

***Điều kiện cần**

♦ **Định lí 2:** Nếu hàm số $Z=f(x,y)$ khả vi tại (x_0,y_0) thì hàm $Z=f(x,y)$ liên tục tại (x_0,y_0) .

♦ **Định lí 3:** Nếu hàm số $Z=f(x,y)$ khả vi tại (x_0,y_0) thì tại đó tồn tại các đạo hàm riêng $f'_x(x_0,y_0)$, $f'_y(x_0,y_0)$ và có

$$df(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y$$

***Nhận xét:**

i) Nếu hàm số $Z=f(x,y)=x$ thì $\frac{\partial Z}{\partial x}=1$ và $\frac{\partial Z}{\partial y}=0$. Ta có

$$dx=dZ=\frac{\partial Z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial Z}{\partial y}\Delta y = \Delta x$$

Tương tự, nếu hàm số $Z=f(x,y)=y$ thì $\frac{\partial Z}{\partial y}=1$ và $\frac{\partial Z}{\partial x}=0$. Ta có

$$dy=dZ=\frac{\partial Z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial Z}{\partial y}\Delta y = \Delta y.$$

Do đó vi phân của hàm $Z=f(x,y)$ thường được viết dưới dạng:

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial x}dx + \frac{\partial Z}{\partial y}dy$$

ii) Biểu thức vi phân có thể mở rộng cho hàm nhiều biến $n \geq 3$ biến. Chẳng hạn

• Với hàm ba biến $u=f(x,y,z)$, ta có:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

Với hàm n biến $u=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$, ta có:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n$$

Theo định lí 3 thì hàm $Z=f(x,y)$ khả vi tại (x_0,y_0) thì tại (x_0,y_0) tồn tại các đạo hàm riêng $f'_x(x_0,y_0)$, $f'_y(x_0,y_0)$. Tuy nhiên sự tồn tại các đạo hàm riêng này không đủ để khẳng định rằng hàm $Z=f(x,y)$ khả vi tại (x_0,y_0) .

Chẳng hạn xét hàm $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$ tại $(0,0)$. Ta có:

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0$$

$$\text{Tương tự, } f'_y(0,0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = 0$$

Nhưng hàm $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$ không khả vi tại $(0,0)$, thật vậy:

$$\text{Xét } \frac{\Delta f - [f'_x(0,0)\Delta x + f'_y(0,0)\Delta y]}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \frac{\sqrt[3]{\Delta x \Delta y}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

$$\text{Lấy } \Delta x = \Delta y \text{ thì } \frac{\Delta f - [f'_x(0,0)\Delta x + f'_y(0,0)\Delta y]}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \frac{\Delta x^{2/3}}{2|\Delta x|} \rightarrow \infty.$$

*Điều kiện đủ

♦ **Định lí 4:** Nếu hàm số $Z=f(x,y)$ có tại các đạo hàm riêng ở lân cận điểm (x_0, y_0) và nếu các đạo hàm riêng đó liên tục tại (x_0, y_0) thì $Z=f(x,y)$ khả vi tại (x_0, y_0) .

* **Chú ý:** Ta có các công thức tính vi phân của hàm hai biến giống như ở hàm một biến.

$$d(au) = a du$$

$$d(u \pm v) = du \pm dv$$

$$d(uv) = v du + u dv$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$$

Nhờ các công thức trên ta có thể rút ngắn việc tính vi phân của hàm hai biến.

1.2.2.3. Ví dụ

1) Tìm vi phân toàn phần của hàm số:

$$\text{a) } Z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\text{b) } u = e^{x^2+y^2} \sin^2 z.$$

2) Tính vi phân toàn phần của hàm số: $Z = f(x, y) = \ln(x^2 + xy + y^2)$ tại $M_0(1, 2)$ biết

$$\Delta x = 0,1; \Delta y = 0,2.$$

1.2.2.4. Ứng dụng vi phân toàn phần để tính gần đúng

Giả sử hàm số $Z=f(x,y)$ khả vi tại (x_0, y_0) . Ta có:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

Trong đó $\alpha \rightarrow 0$ khi $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$

Khi $|\Delta x|, |\Delta y|$ khá bé thì

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx f'_x(x_0, y_0) \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \Delta y$$

Ta có công thức xấp xỉ

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \Delta y$$

Ví dụ:

Tính giá trị gần đúng của $A = (1,04)^{2,03}$.

Giải

Xét hàm $f(x, y) = x^y$, ta có

$$f'_x(x, y) = yx^{y-1}; f'_y(x, y) = x^y \ln x.$$

Khi đó ta được công thức tính gần đúng

$$A = (x_0 + \Delta x)^{(y_0 + \Delta y)} \approx x_0^{y_0} + y_0 x_0^{y_0-1} \Delta x + x_0^{y_0} \ln x_0 \Delta y$$

Nếu chọn

$$x_0 = 1, \Delta x = 0,04$$

$$y_0 = 2, \Delta y = 0,03$$

thì $A \approx 1 + 2.1.(0,04) + 1.\ln 1.(0,03) = 1,08$.

1.2.2.5. Vi phân cấp cao

♦ Định nghĩa

Giả sử hàm số $Z = f(x, y)$ khả vi. Khi vi phân toàn phần $dZ = \frac{\partial Z}{\partial x} dx + \frac{\partial Z}{\partial y} dy$ cũng là hàm của hai biến x, y . Nếu dZ có vi phân toàn phần thì vi phân đó được gọi là vi phân cấp hai của Z , kí hiệu d^2Z . Ta có

$$d^2Z = d(dZ).$$

Tổng quát, vi phân của vi phân cấp $n-1$ của hàm Z được gọi là vi phân cấp n hay n lần khả vi.

$$d^n Z = d(d^{n-1} Z).$$

Hàm số có vi phân cấp n được gọi là khả vi đến cấp n hay n lần khả vi.

♦ Công thức tính vi phân cấp cao

Giả sử hàm số $Z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp n liên tục. Ta có:

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial x} dx + \frac{\partial Z}{\partial y} dy \text{ với } dx, dy \text{ không đổi.}$$

Suy ra

$$d^2Z = d(dZ) = d\left(\frac{\partial Z}{\partial x}dx + \frac{\partial Z}{\partial y}dy\right) = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}dy^2$$

$$= \text{Kí hiệu} \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z$$

Tương tự đối với vi phân cấp cao hơn hai, ta đi đến công thức tổng quát

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z$$

***Chú ý:**

i) Công thức trên vi phân cấp cao kí hiệu như trên được hiểu một cách hình thức là lũy thừa bậc n của một nhị thức. Sau khi khai triển hàm z được đặt vào trong dấu ∂ .

ii) Nếu x, y lại là hàm của hai biến độc lập s, t nào đó thì công thức trên không còn đúng khi $n \geq 2$.

♦ Ví dụ:

Tính vi phân cấp 2 của hàm số $Z = f(x, y) = e^x \cdot \sin y$

Ta có : $Z'_x = e^x \cdot \sin y, Z'_y = e^x \cdot \cos y \Rightarrow Z''_{xx} = e^x \cdot \sin y, Z''_{xy} = Z''_{yx} = e^x \cdot \cos y, Z''_{yy} = -e^x \sin y$.

1.2.3. Đạo hàm của hàm hợp

1.2.3.1. Định nghĩa

Cho hàm $Z = f(u, v)$ trong đó $u = u(x, y), v = v(x, y)$ là hàm của hai biến độc lập x, y .

Khi đó $Z = f[u(x, y), v(x, y)]$ là hàm hợp của hai biến x, y qua hai biến trung gian x, y .

1.2.3.2. Định lý 5

Cho hàm $Z = f(u, v)$ trong đó $u = u(x, y), v = v(x, y)$. Nếu các hàm $f(u, v), u(x, y), v(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục đối với các biến của chúng thì tồn tại các đạo hàm riêng

$\frac{\partial Z}{\partial x}, \frac{\partial Z}{\partial y}$ và có

$$\begin{aligned}\frac{\partial Z}{\partial x} &= \frac{\partial Z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial Z}{\partial y} &= \frac{\partial Z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}$$

***Chú ý:**

i) Nếu $Z = f(u, v)$ với $u = u(x), v = v(x)$ là các hàm của x thì $Z = f[u(x), v(x)]$ là hàm một biến theo x . Khi đó $\frac{dZ}{dx}$ được gọi là đạo hàm toàn phần của Z theo x .