

**TRƯỜNG ĐẠI HỌC TRÀ VINH
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN
BỘ MÔN TOÁN**



TÀI LIỆU GIẢNG DẠY MÔN VI TÍCH PHÂN

GV biên soạn: Nguyễn Văn Tiên

**Trà vinh, tháng 2 năm 2013
Lưu hành nội bộ**

MỤC LỤC

Nội dung

Trang

Chương 1. Đạo hàm và vi phân của hàm một biến	1
1.1. Hàm số	1
1.2. Giới hạn của dãy số	3
1.3. Giới hạn của hàm số	5
1.4. Hàm số liên tục	11
1.5. Đạo hàm	13
1.6. Vi phân	16
1.7. Đạo hàm và vi phân cấp cao	17
1.8. Một số định lý cơ bản về hàm khả vi	18
1.9. Quy tắc De L'hopital	20
1.10. Công thức Taylor	21
Bài tập củng cố chương 1	23
Chương 2. Tích phân của hàm một biến	27
2.1. Tích phân bất định	27
2.2. Tích phân xác định	35
2.3. Tích phân suy rộng	40
Bài tập củng cố chương 2	44
Chương 3. Lý thuyết chuỗi	47
3.1. Chuỗi số	47
3.2. Chuỗi lũy thừa	54
Bài tập củng cố chương 3	58
Chương 4. Đạo hàm và vi phân của hàm nhiều biến	60
4.1. Các khái niệm cơ bản	60
4.2. Đạo hàm và vi phân	67
4.3. Cực trị và GTLN, GTNN của hàm số	75
Bài tập củng cố chương 4	84
Chương 5. Phương trình vi phân	88
5.1. Tổng quan về phương trình vi phân	88
5.2. Phương trình vi phân cấp 1	90
5.3. Phương trình vi phân cấp 2	97
Bài tập củng cố chương 5	109
TÀI LIỆU THAM KHẢO	114

Chương 1

ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CỦA HÀM MỘT BIẾN

❖ **Mục tiêu học tập:** Sau khi học xong bài này, người học có thể:

- Tìm giới hạn, xét tính liên tục của hàm số.
- Tính đạo hàm, vi phân của hàm.

1.1. Hàm số

1.1.1. Khái niệm hàm số

Cho $D \subset \mathbb{R}$. Ánh xạ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là một hàm số xác định trên D

Tập D gọi là miền xác định của f .

$T = \{f(x) | x \in D\}$ gọi là miền giá trị của f .

$G = \{(x, f(x)) | x \in D\}$ gọi là đồ thị của hàm số.

Ví dụ: Hàm số

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = f(x) = x^2 + 1$$

Tập xác định $D = \mathbb{R}$, tập giá trị $T = [1; +\infty)$.

1.1.2. Tính chất

Cho các hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ và $y=F(x)$.

a/ $f = g$ khi và chỉ khi f, g có cùng miền xác định D và $\forall x \in D : f(x)=g(x)$.

b/ $f > g$ khi và chỉ khi f, g có cùng miền xác định D và $\forall x \in D : f(x) > g(x)$.

c/ $F=f+g \Leftrightarrow \forall x \in D$ là miền xác định của F thì $F(x)=f(x)+g(x)$.

d/ Hiệu, tích, thương của f, g được định nghĩa tương tự.

e/ Hàm số $y=f(x)$ gọi là tăng hay đồng biến $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

f/ Hàm số $y=f(x)$ gọi là giảm hay nghịch biến $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

g/ Hàm số $y=f(x)$ gọi là bị chặn (hay giới nội) trong D nếu $\exists k > 0 : |f(x)| < k, \forall x \in D$.

h/ Hàm số $y=f(x)$ gọi là hàm số chẵn trên miền đối xứng $(-a; a)$ nếu $\forall x \in (-a; a) :$
 $f(-x)=f(x)$.

i/ Hàm số $y=f(x)$ gọi là hàm số lẻ trên miền đối xứng $(-a; a)$ nếu $\forall x \in (-a; a) :$
 $f(-x)=-f(x)$.

j/ Hàm số $y=f(x)$ có tập xác định $D \subset \mathbb{R}$, hàm số f gọi là hàm số tuần hoàn nếu tồn tại số $l \neq 0$ sao cho nếu $x \in D$ thì $x+l \in D$ và $f(x+l)=f(x)$, số dương bé nhất trong các số l trên gọi là chu kỳ của hàm số tuần hoàn $y=f(x)$.

Ví dụ: Hàm số $y=\sin x, y=\cos x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π . Hàm số $y=\tan x, y=\cot x$ tuần hoàn với chu kỳ π .

1.1.3. Hàm số hợp.

1.1.3.1. Khái niệm

Cho hàm số: $f: X \rightarrow Y$ và $g: Y \rightarrow Z$. Hàm số $h: X \rightarrow Z$ gọi là hàm số hợp của f, g ký hiệu: $h = f \circ g$ xác định bởi $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

1.1.3.1. Ví dụ 1

Cho $f(x) = x^2 + 1, g(x) = \sin 2x$ thì

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 + 1 = \sin^2 2x + 1.$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sin 2(f(x)) = \sin 2(x^2 + 1) = \sin(2x^2 + 2).$$

1.1.4. Hàm số ngược

Cho hàm số $f: X \rightarrow Y$, nếu f là một song ánh thì $f^{-1}: Y \rightarrow X$ là hàm số ngược của f .

Ví dụ: Hàm số $y = 2x - 2$, hàm số ngược của nó là $x = \frac{y+2}{2}$ (hoặc $y = \frac{x+2}{2}$).

1.1.5. Một số hàm số sơ cấp cơ bản

- ♦ Hàm số $y = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, miền xác định của nó phụ thuộc vào α .
 - Nếu $\alpha \in \mathbb{N}$ thì $D = \mathbb{R}$.
 - Nếu $\alpha \in \mathbb{Z}^-$ thì $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
 - Nếu $\alpha \in \mathbb{Q}^+$ thì $D = \mathbb{R}^+$.
 - Nếu $\alpha \in \mathbb{Q}^-$ thì $D = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.
- ♦ Hàm số $y = a^x, a > 0, a \neq 1$, xác định $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, hàm số tăng khi $a > 1$, giảm khi $0 < a < 1$.
- ♦ Hàm số $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$, là hàm số ngược của $y = a^x$ xác định khi $x > 0$, hàm số tăng khi $a > 1$, giảm khi $0 < a < 1$.
- ♦ Hàm số lượng giác:
 - $y = \sin x, y = \cos x$ miền xác định là $\mathbb{R}$.

- $y = \tan x$, xác định khi $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

- $y = \cot x$, xác định khi $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

♦ Hàm số lượng giác:

- $y = \arcsin x$ là hàm số ngược của $y = \sin x$.

- $y = \arccos x$ là hàm số ngược của $y = \cos x$.

- $y = \arctan x$ là hàm số ngược của $y = \tan x$.

- $y = \operatorname{arccot} x$ là hàm số ngược của $y = \cot x$.

♦ Hàm số hyperbol

- $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (sin hyperbol)

- $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (cosin hyperbol)

- $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ (tan hyperbol)

- $\operatorname{coth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ (cotan hyperbol)

Ta có các công thức:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$$

$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y$$

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y$$

$$\operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y$$

$$\operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y ; \dots$$

1.2. Dãy số và giới hạn của dãy số

1.2.1. Khái niệm

♦ **Định nghĩa 1.** Hàm số $u : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ($\mathbb{N}^*$ là tập các số nguyên dương). Những giá trị của hàm số ứng với $n = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$ gọi là một dãy số.

Đặt $u_1 = u(1), u_2 = u(2), \dots, u_n = u(n), \dots$, dãy số được viết dưới dạng $\{u_n\}$ hoặc $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$,

Các số u_i gọi là các số hạng của dãy, u_n gọi là số hạng tổng quát của dãy.

♦ **Ví dụ:** Dãy $\{u_n\} = \left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$ là dãy số : $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$

♦ **Định nghĩa 2.** Số a được gọi là giới hạn của dãy số $\{u_n\}$ khi $n \rightarrow \infty$, ký hiệu $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$ hay $u_n \rightarrow a$ khi $n \rightarrow \infty$, nếu $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} > 0: \forall n \geq N$ thì $|u_n - a| < \varepsilon$.

Dãy số có giới hạn thì gọi là dãy số hội tụ, ngược lại gọi là dãy phân kỳ.

Ví dụ: Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Thật vậy,

$\forall \varepsilon > 0$ bé tùy ý, ta có thể chọn một số rất bé cụ thể nào đó, chẳng hạn $\varepsilon = \frac{1}{10^4}$.

Muốn cho $|u_n - a| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \frac{1}{10^4} \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{10^4} \Rightarrow n > 10^4 - 1$. Thì ta phải chọn

$N = 10^4 - 1$, lúc này ta sẽ có $|u_n - 1| < \varepsilon$.

♦ **Định nghĩa 3.** Dãy $\{u_n\}$ dần đến vô cùng khi n tiến đến vô cùng nếu với $M > 0$ lớn tùy ý, có số nguyên dương N sao cho với mọi $n > N$, ta luôn có $|u_n| > M$. Ký hiệu: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$.

♦ **Ví dụ:** Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty$. Thật vậy: nếu chọn $M = 10^5$, muốn cho $|\sqrt{n}| > 10^5 \Rightarrow n > 10^{10}$ thì ta chọn $N = 10^{10}$. Lúc này $\forall n > 10^{10} \Rightarrow |\sqrt{n}| > M$.

♦ **Định nghĩa 4.** Dãy $\{u_n\}$ gọi là vô cùng lớn nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = \infty$; dãy $\{u_n\}$ gọi là vô cùng bé nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = 0$. Lưu ý rằng nếu $\{u_n\}$ là vô cùng lớn thì $\left\{ \frac{1}{u_n} \right\}$ là vô cùng bé và ngược lại.

1.2.2. Các định lý về giới hạn của dãy

1.2.2.1. Các tính chất

- Nếu dãy $\{u_n\}$ có giới hạn là a và $a > p (a < p)$ thì tồn tại N sao cho với mọi $n > N \Rightarrow u_n > p (u_n < p)$.
- Nếu dãy $\{u_n\}$ có giới hạn là a và $u_n \leq p (u_n \geq p), \forall n$ thì $a \leq p (a \geq p)$.
- Nếu dãy $\{u_n\}$ có giới hạn là a thì a là duy nhất.
- Nếu dãy $\{u_n\}$ có giới hạn thì nó bị chặn, tức là $\exists k > 0: |u_n| \leq k, \forall n$.

1.2.2.2. Các định lý

♦ **Định lý 1.** Cho $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = b$

- Nếu $u_n = v_n, \forall n$ thì $a = b$
- Nếu $u_n \geq v_n, \forall n$ thì $a \geq b$

♦ **Định lý 2.** Nếu $u_n \leq v_n \leq w_n$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = a$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = a$.

Ví dụ: Tính $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$

Đặt $v_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

Và $\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \leq v_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$

Mặt khác $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1$

Theo định lý trên thì $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 1$.

1.2.2.3. Các phép tính của giới hạn dãy số

Nếu các dãy $\{u_n\}, \{v_n\}$ hội tụ thì

- Dãy $\{u_n \pm v_n\}$ cũng hội tụ và $\lim_{n \rightarrow \infty} \{u_n \pm v_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$.

- Dãy $\{u_n \cdot v_n\}$ cũng hội tụ và $\lim_{n \rightarrow \infty} \{u_n \cdot v_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$. Hơn nữa $\lim_{n \rightarrow \infty} \{k \cdot v_n\} = k \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$

- Dãy $\left\{ \frac{u_n}{v_n} \right\}$ cũng hội tụ và $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{u_n}{v_n} \right\} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} v_n}, \lim_{n \rightarrow \infty} v_n \neq 0$.

* Một số công thức giới hạn dãy số thường gặp:

$$a. \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} 0 & 0 < a < 1 \\ +\infty & a > 1 \end{cases},$$

$$b. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, a > 0,$$

$$c. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

$$d. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

1.3. Giới hạn của hàm số

1.3.1. Khái niệm

♦ **Định nghĩa 1.** Cho hàm số f xác định trên tập D . Số L được gọi là giới hạn của hàm số $y=f(x)$ khi x dần về x_0 nếu: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Ký hiệu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L.$$

♦ **Ví dụ:** Chứng minh rằng $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$.

Ta chọn một ε bé tùy ý cụ thể, chẳng hạn $\varepsilon = \frac{1}{10^6}$.

Muốn cho $\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < \frac{1}{10^6} \Rightarrow |x - 2| < \frac{1}{10^6}$ thì ta chọn $\delta = \varepsilon = \frac{1}{10^6}$. Lúc này ta sẽ có

$$\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < \frac{1}{10^6} \text{ và } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4.$$

♦ **Định nghĩa 2.** Ta gọi L là giới hạn của $y=f(x)$ khi $x \rightarrow \infty$ nếu $\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0: |x| > A \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Ký hiệu: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$.

Đặc biệt:

$$+ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0: x > A \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

$$+ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0: x < -A \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Ví dụ: Chứng minh rằng: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$.

Vì $\forall x > 0, |f(x) - 1| = \frac{1}{x} < \varepsilon$. Ta chọn A là số dương lớn hơn $\frac{1}{\varepsilon}$ thì $\forall x > A > \frac{1}{\varepsilon}$

$$\Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon. \text{ Vậy } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1.$$

♦ **Định nghĩa 3.** Ta nói hàm số $y=f(x)$ có giới hạn bằng vô cùng khi $x \rightarrow x_0$ nếu: $\forall M > 0, \exists \delta > 0: |x| > \delta \Rightarrow |f(x)| > M$. Ký hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

Đặc biệt;

$$+ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M.$$

$$+ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| < -M.$$

Ví dụ: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x} = \infty$.

♦ **Định nghĩa 4.** Ta nói hàm số $y=f(x)$ có giới hạn bằng vô cùng khi $x \rightarrow \infty$ nếu: $\forall M > 0, \exists A > 0: |x| > A \Rightarrow |f(x)| > M$. Ký hiệu $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

Đặc biệt:

$$+ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists A > 0 : x > A \Rightarrow |f(x)| > M.$$

$$+ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists A > 0 : x < -A \Rightarrow |f(x)| > M.$$

$$+ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists A > 0 : x < -A \Rightarrow |f(x)| < -M.$$

$$+ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists A > 0 : x > A \Rightarrow |f(x)| < -M.$$

$$\text{Ví dụ: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

1.3.2. Một số công thức giới hạn:

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\text{c. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$\text{d. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

$$\text{e. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, a > 0$$

$$\text{f. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\text{g. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

$$\text{h. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\text{j. } \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$$

1.3.3. Giới hạn một phía

♦ **Định nghĩa:** Số a được gọi là giới hạn phải (trái) của hàm số $f(x)$ tại x_0 khi x tiến về bên phải (trái) x_0 . Ký hiệu: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a$ ($\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a$)

♦ **Ví dụ:**

$$\text{a. Dễ thấy } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

$$\text{b. Xét hàm số } f(x) = \frac{\sin x}{|x|} \text{ tại } x = 0, \text{ ta có:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ và } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{-x} = -1$$

♦ **Định lý:** Điều kiện cần và đủ để $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ là:

$$+ \exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

$$+ \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x).$$

1.3.4. Các định lý và tính chất về giới hạn của hàm số

1.3.4.1. Tính chất

a/ Nếu $f(x) = C$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = C$.

b/ Giới hạn a nếu có của hàm số là duy nhất.

1.3.4.2. Các định lý về phép tính giới hạn

Giả sử $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = C$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ thì:

a/ $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = C \pm B$

b/ $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = C \cdot B$

c/ $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{C}{B}, B \neq 0$

*** Hệ quả:**

a/ $\lim_{x \rightarrow x_0} k \cdot f(x) = k \cdot C$

b/ $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\sum_{i=1}^n f_i(x) \right) = \sum_{i=1}^n \lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x)$

c/ $\lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x) \cdot \dots \cdot f_n(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f_3(x) \cdot \dots \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$

Đặc biệt: $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^n$.

1.3.4.3. Các tiêu chuẩn tồn tại giới hạn

♦ **Tiêu chuẩn Cauchy (Tiêu chuẩn 1).** Điều kiện cần và đủ để tồn tại giới hạn của $f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$ là: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sao cho $\forall x_1, x_2$ thỏa $0 < |x_1 - x_0| < \delta, 0 < |x_2 - x_0| < \delta$ thì $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

♦ **Tiêu chuẩn 2.** Cho $f(x)$ xác định $\forall x > 0$. Nếu $f(x)$ đơn điệu tăng và $f(x)$ bị chặn trên thì $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

♦ **Tiêu chuẩn 3.** Nếu $\begin{cases} f(x) \leq h(x) \leq g(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a \end{cases}$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a$

Ví dụ: Tính $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin^2(n!x)}{x^2}$.

Ta có $0 \leq \frac{\sin^2(n!x)}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ và $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$, suy ra $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin^2(n!x)}{x^2} = 0$.

1.3.5. Vô cùng bé và vô cùng lớn

1.3.5.1. Vô cùng bé

♦ **Khái niệm.** Hàm số $f(x)$ gọi là vô cùng bé (VCB) khi $x \rightarrow x_0$ nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

♦ **Ví dụ:**

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 \Rightarrow f(x) = \sin x$ là VCB.

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \tan x = 0 \Rightarrow f(x) = \tan x$ là VCB.

c. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$ là VCB.

♦ **Định lý.** $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow f(x) - a$ là VCB khi $x \rightarrow x_0$, hay là $f(x) = a + \alpha(x)$, $\alpha(x)$

là VCB khi $x \rightarrow x_0$.

* **Tính chất:**

a. $\text{VCB} \cdot \text{C} = \text{VCB}$

b. $\text{VCB} \pm \text{VCB} = \text{VCB}$

c. $\text{VCB} \cdot \text{BC} = \text{VCB}$

d. $\text{VCB} \cdot \text{HT} = \text{VCB}$

Trong đó C- hằng số, BC- đại lượng bị chặn, HT- đại lượng hội tụ.

Ví dụ: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \sin x = 0$ với $\sin x$ là đại lượng bị chặn.

♦ **So sánh các vô cùng bé.** Cho $f(x), g(x)$ là hai VCB khi $x \rightarrow x_0$. Giả sử tồn tại

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A, 0 \leq A \leq +\infty. \text{ Khi đó}$$

a. Nếu $A = 0$ thì ta nói $f(x)$ là VCB bậc cao hơn $g(x)$ hay $g(x)$ là VCB bậc thấp hơn $f(x)$, khi đó ta ký hiệu $f(x) = O(g(x))$.

b. Nếu $0 < A < +\infty$ thì ta nói $f(x)$ và $g(x)$ là hai VCB cùng hay cùng cấp, đặc biệt khi $A = 1$ ta nói $f(x)$ và $g(x)$ là hai VCB tương đương, khi đó ta ký hiệu $f(x) \sim g(x)$.

c. Nếu $A = +\infty$ thì ta nói $g(x)$ là VCB bậc cao hơn $f(x)$ hay $f(x)$ là VCB bậc thấp hơn $g(x)$, khi đó ta ký hiệu $g(x) = O(f(x))$.

Ngược lại nếu giới hạn trên không tồn tại thì ta nói $g(x)$ và $f(x)$ không so sánh được.

♦ **Định lý.**

a. Nếu $f(x) \sim g(x), h(x) \sim t(x)$ trong đó $f(x), g(x)$ là hai VCB khi $x \rightarrow x_0$ thì

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{t(x)}.$$

b. Giả sử $f_i(x), g_j(x), i=1, n; j=1, m$ là các VCB khi $x \rightarrow x_0$. Khi đó

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)}{g_1(x) + g_2(x) + \dots + g_m(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_{i_0}(x)}{g_{j_0}(x)}. \text{ Trong đó } f_{i_0}(x) \text{ là VCB bậc thấp nhất trong}$$

các $f_i(x)$ và $g_{j_0}(x)$ là VCB bậc thấp nhất trong các $g_j(x)$.

♦ **Ví dụ:**

a. Khi $x \rightarrow 0$ thì các VCB sau là tương đương: $\sin x \sim x, \tan x \sim x, \arcsin x \sim x, \arctan x \sim x, \ln(x+1) \sim x, e^x - 1 \sim x, (1+x)^a - 1 \sim ax, a^x - 1 \sim x \ln a$.

b. Tính $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{e^{2x} - 1}$.

Ta có khi $x \rightarrow 0$ thì $\sin 5x \sim 5x, e^{2x} - 1 \sim 2x$.

Vậy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{e^{2x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}$.

c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{e^{3x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$

1.3.5.2. Vô cùng lớn

♦ **Khái niệm.** Hàm số $f(x)$ gọi là vô cùng lớn (VCL) khi $x \rightarrow x_0$ nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$

♦ **Ví dụ:**

a. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x = \infty \Rightarrow f(x) = \tan x$ là VCL.

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \cot x = \infty \Rightarrow f(x) = \cot x$ là VCL.

c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$ là VCL.

***Tính chất**

a. $VCL \cdot VCL = VCL$.

b. $VCL + BC = VCL$.

c. $VCL + HT = VCL$.

d. Tổng hai VCL có thể không là VCL, nhưng tổng hai VCL cùng dấu là VCL.

e. $\frac{1}{VCL} = VCB, \frac{1}{VCB} = VCL$.

Trong đó BC- đại lượng bị chặn, HT- đại lượng hội tụ.

♦ **So sánh các vô cùng lớn.** Cho $f(x), g(x)$ là hai VCL khi $x \rightarrow x_0$. Giả sử tồn tại

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A, 0 \leq A \leq +\infty. \text{ Khi đó}$$

a. Nếu $A=0$ thì ta nói $f(x)$ là VCL bậc thấp hơn $g(x)$ hay $g(x)$ là VCL bậc cao hơn $f(x)$.

b. Nếu $0 < A < +\infty$ thì ta nói $f(x)$ và $g(x)$ là hai VCL cùng hay cùng cấp, đặc biệt khi $A=1$ ta nói $f(x)$ và $g(x)$ là hai VCL tương đương, khi đó ta ký hiệu $f(x) \sim g(x)$.

c. Nếu $A = +\infty$ thì ta nói $f(x)$ là VCL bậc cao hơn $g(x)$ hay $g(x)$ là VCL bậc thấp hơn $f(x)$.

Ngược lại nếu giới hạn trên không tồn tại thì ta nói $g(x)$ và $f(x)$ không so sánh được.

*** Định lý.**

a. Nếu $f(x) \sim g(x), h(x) \sim t(x)$ trong đó $f(x), g(x)$ là hai VCL khi $x \rightarrow x_0$ thì

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{t(x)}.$$

b. Giả sử $f_i(x), g_j(x), \overline{i=1, n; j=1, m}$ là các VCL khi $x \rightarrow x_0$. Khi đó

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)}{g_1(x) + g_2(x) + \dots + g_m(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_{i_0}(x)}{g_{j_0}(x)}. \text{ Trong đó } f_{i_0}(x) \text{ là VCL bậc cao nhất}$$

trong các $f_i(x)$ và $g_{j_0}(x)$ là VCL bậc cao nhất trong các $g_j(x)$.

Lưu ý: Trong quá trình giải các bài tập ta sẽ gặp các dạng vô định: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty,$

$0^0, \infty^0, 0^\infty, 1^\infty$. Khi đó ta phải khử các dạng vô định.

1.4. Hàm số liên tục

1.4.1. Khái niệm

♦ **Định nghĩa.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên miền $D, x_0 \in D$. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục tại $x = x_0$ nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Nếu $y = f(x)$ không liên tục tại $x = x_0$ ta nói hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại $x = x_0$.

♦ **Ví dụ:** Xét hàm số
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$. Vậy $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

♦ **Định nghĩa.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên miền D , $x_0 \in D$. Khi đó hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trái (phải) tại $x = x_0$ nếu: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0^-)$ ($\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0^+)$).

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trong $(a; b)$ nếu $y = f(x)$ liên tục tại mọi điểm của $(a; b)$.

1.4.2. Các tính chất và định lý

♦ **Định lý.** Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = x_0$ khi và chỉ khi $y = f(x)$ liên tục trái và liên tục phải tại $x = x_0$.

Ví dụ: Xét hàm số $y = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

Ta có

$$f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$$

$$f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{|x|} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = -1 \neq f(0)$$

Vậy $f(x)$ liên tục phải tại $x = 0$, nhưng không liên tục trái tại $x = 0$.

♦ **Định nghĩa.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D . Khi đó tập hợp các điểm $M(x, f(x))$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy, khi x thay đổi trong D được gọi là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ trên D .

♦ **Định lý.** Đồ thị của hàm số liên tục là một đường liền nét.

♦ **Định lý.** Nếu $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì $y = f(x)$ bị chặn trên $[a; b]$, tức là $\exists M > 0: |f(x)| \leq M, \forall x \in D$.

♦ **Định lý.** Nếu $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $[a; b]$, tức là $\exists x_1, x_2: \begin{cases} f(x_1) \geq f(x), \forall x \in D \\ f(x_2) \leq f(x), \forall x \in D \end{cases}$

♦ **Định lý.** Nếu $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì $y = f(x)$ nhận mọi giá trị trung gian giữa $f(a)$ và $f(b)$.

♦ **Định lý.** Nếu $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì có $c \in (a; b)$ để $f(c) = 0$, nói cách khác phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong $(a; b)$.

Ví dụ: Chứng minh rằng phương trình $x^9 - 3x^4 + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm trong $(0;1)$.

1.4.3. Phân loại điểm gián đoạn:

Cho hàm số $y = f(x)$. Điểm x_0 là điểm gián đoạn của $y = f(x)$ khi:

- $y = f(x)$ không xác định tại x_0
- Không tồn tại giới hạn của $y = f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$
- Tồn tại giới hạn của $y = f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$, nhưng giới hạn này khác $f(x_0)$.

Như vậy ta có thể phân loại các điểm gián đoạn như sau:

+ Điểm x_0 là điểm gián đoạn loại 1 khi $\exists f(x_0^-), f(x_0^+)$. Đặc biệt khi $f(x_0^-) = f(x_0^+)$ thì ta nói x_0 là điểm gián đoạn có thể bỏ được.

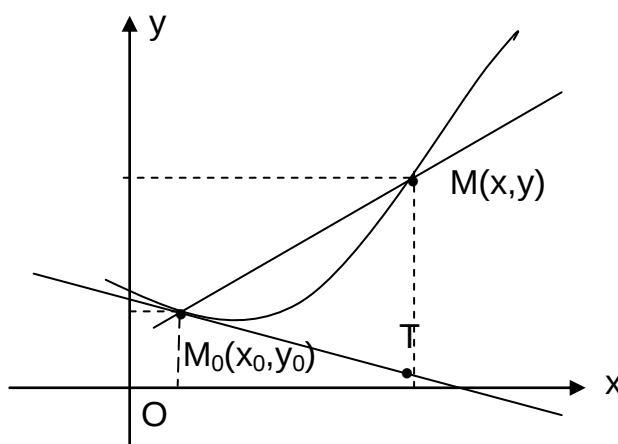
+ Các trường hợp khác gọi là điểm gián đoạn loại 2.

1.5. Đạo hàm

1.5.1. Khái niệm

1.5.1.1. Bài toán mở đầu

Xét đường cong $(C): y = f(x)$, một điểm $M_0(x_0, y_0)$ cố định trên (C) và một cát tuyến MM_0 . Nếu $M(x, y)$ chạy trên đường cong (C) đến điểm $M_0(x_0, y_0)$ mà cát tuyến MM_0 dần tới một vị trí tới hạn TM_0 , thì đường thẳng TM_0 gọi là tiếp tuyến của đường cong (C) tại điểm $M_0(x_0, y_0)$. Vậy khi nào thì $(C): y = f(x)$ có tiếp tuyến tại $M_0(x_0, y_0)$ và hệ số góc của tiếp tuyến đó được tính như thế nào?



Đặt

$$\begin{cases} \Delta x = x - x_0 \\ \Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \end{cases}$$

thì hệ số góc của cát tuyến MM_0 là $\tan \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Cho điểm $M_0(x_0, y_0)$ tiến dần đến M dọc theo đường cong (C) , khi đó $\Delta x \rightarrow 0$, nếu tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ dần tới một giới hạn xác định thì β cũng dần đến một góc xác định là α , nghĩa là cát tuyến MM_0 dần tới vị trí tới hạn TM_0 và tạo với Ox một góc α .

Từ đó, nếu tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ dần tới một giới hạn xác định khi $\Delta x \rightarrow 0$ thì đường cong $(C): y = f(x)$ có tiếp tuyến tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ và hệ số góc của tiếp tuyến là:

$$\tan \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \tan \beta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

1.5.1.2. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên miền D , $x_0 \in D$. Cho biến x số gia Δx thỏa $x_0 + \Delta x \in D$. Xét số gia hàm số: $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Ta gọi giới hạn $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = I$ (nếu tồn tại hữu hạn) là đạo hàm của $y = f(x)$ tại x_0 và ta cũng nói $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 .

$$\text{Ký hiệu: } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = I$$

$$\text{Nhận xét: nếu đặt } x = x_0 + \Delta x \text{ thì } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = I.$$

Ví dụ: Tính đạo hàm của hàm số $y = x^2$ bằng định nghĩa $y = x^2$:

Giải

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \cdot (2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0 \end{aligned}$$

1.5.1.3. Đạo hàm một phía

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên miền D , $x_0 \in D$.

Ta gọi giới hạn $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = I$ ($\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x} = I$) (nếu tồn tại hữu hạn) là đạo hàm phải (trái) của $y = f(x)$ tại x_0 .

Ký hiệu: + Đạo hàm phải $I = f'_+(x_0)$

+ Đạo hàm trái $I = f'_-(x_0)$

$$\text{*Định lý. } \exists f'(x_0) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists f'_+(x_0), \exists f'_-(x_0) \\ f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \end{cases}$$

1.5.2. Các quy tắc tính đạo hàm

$$(c)' = 0$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(cu)' = c(u)'$$

$$(u.v)' = u'.v + u.v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2} (v \neq 0)$$

1.5.3. Đạo hàm hàm hợp, hàm ngược:

1.5.3.1. Đạo hàm hàm hợp

Giả sử hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm $u'(x_0)$ tại x_0 và $u_0 = u(x_0)$. Tại $u_0 = u(x_0)$ hàm $y = y(u)$ có đạo hàm $y'(u_0)$ đối với biến u . Khi đó tại x_0 hàm số $y = y(u(x))$ có đạo hàm $y'_x(x_0)$ theo biến x và $y'_x(x_0) = y'_u(u_0).u'_x(x_0)$ hay $y'_x = y'_u.u'_x$.

1.5.3.2. Đạo hàm hàm ngược

Giả sử các điều kiện sau được thỏa:

a/ Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y'(x_0) \neq 0$ tại x_0

b/ Hàm số $y = f(x)$ là đơn ánh.

c/ Hàm ngược $x = g(y)$ liên tục tại $y_0 = f(x_0)$

Khi đó hàm số ngược của hàm số $y = f(x)$ sẽ có đạo hàm $x'_y(y_0)$ tại y_0 và

$$x'_y(y_0) = \frac{1}{y'_x(x_0)}.$$

Ta thường ký hiệu hàm ngược là $g(y)$ là $f^{-1}(x)$ và khi đó $(f^{-1})' = \frac{1}{f'}$.

1.5.3. Các công thức đạo hàm cơ bản

$$(c)' = 0$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\log_a^x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{arccot} an x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Ví dụ:

a. $((x^3 + 4)^5)' = 5.(x^3 + 4)^4.3x^2$

b. $(\sin^4(\ln x))' = 4\sin^3(\ln x) \cdot \frac{1}{x}$

1.5.3. Định lý (Tính có đạo hàm của hàm của hàm số sơ cấp)

Hàm số sơ cấp có đạo hàm trên miền xác định của nó.

1.5.4. Định lý

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại $x = x_0$ thì $f(x)$ liên tục tại $x = x_0$.

1.6. Vi phân

1.6.1. Khái niệm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên miền D , $x_0 \in D$. Cho biến x số gia Δx thỏa $x_0 + \Delta x \in D$. Xét số gia hàm số:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Nếu Δf biểu diễn được dưới dạng:

$$\Delta f = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(x)$$

trong đó $\alpha(x)$ là vô cùng bé bậc cao hơn Δx khi $\Delta x \rightarrow 0$ thì $y = f(x)$ được gọi là khả vi tại $x = x_0$ và biểu thức $f'(x) \cdot \Delta x$ gọi là vi phân của $y = f(x)$ tại $x = x_0$. Ký hiệu: $df = f'(x)dx$ với $dx = \Delta x$ hay $\frac{df}{dx} = f'(x)$.

1.6.2. Định lý

Hàm số sơ cấp khả vi trên miền xác định của nó. Nghĩa là nó có đạo hàm trên miền xác định của nó.

1.6.3. Các quy tắc tính vi phân.

$$d(u \pm v) = du \pm dv$$

$$dC = 0$$

$$d(Cv) = Cdv$$

$$d(uv) = vdu + u dv$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}$$

Ví dụ: Tính vi phân của các hàm số:

a. $y = \sin x$

b. $y = \sqrt{x}$

$$dy = d(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})' dx = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx.$$

Nếu $y = f(x)$ khả vi tại $x = x_0$ thì $\Delta f = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(x)$. Vì vậy khi Δx khá bé ta có công thức xấp xỉ như sau: $f(x_0 + \Delta x) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x + f(x_0)$.

Ví dụ: Tính gần đúng biểu thức $A = \sqrt[4]{15,8}$

Xét hàm số $y = \sqrt[4]{x}$.

Ta có $y' = \frac{1}{4}x^{\frac{-3}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$

Chọn $x_0 = 16 \Rightarrow \Delta x = x - x_0 = 15,8 - 16 = -0,2$.

Áp dụng công thức $f(x_0 + \Delta x) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x + f(x_0)$

$$A = \sqrt[4]{16-0,2} \approx \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{16^3}} (-0,2) + \sqrt[4]{16} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot (-0,2) + 2 = \frac{319}{160}.$$

1.7.1. Đạo hàm cấp cao

♦ **Định nghĩa.** Gọi đạo hàm của $y = f(x)$ là $f'(x)$ thì $f'(x)$ là một hàm số theo biến x . Nếu $f'(x)$ cũng có đạo hàm thì đạo hàm đó gọi là đạo hàm cấp hai của $y = f(x)$. Ký hiệu $f''(x) = (f'(x))'$.

Tương tự ta cũng định nghĩa được đạo hàm cấp ba của $y = f(x)$ và $f'''(x) = (f''(x))'$.

Đạo hàm của đạo hàm cấp $(n-1)$ của $y = f(x)$ được gọi là đạo hàm cấp n của $f(x)$.

Ký hiệu: $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$.

♦ **Ví dụ:** Tính đạo hàm cấp n của các hàm số:

a. $y = \sin x$ b. $y = \frac{1}{x}$.

Giải

a. $y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$$y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''' = \cos\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

...

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

b.

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = (-1)x^{-2}$$

$$y'' = (-1)(-2)x^{-3} = 1.2.x^{-3}$$

$$y''' = (-1)(-2)(-3).x^{-4}$$

...

$$y^{(n)} = (-1)^n 1.2.3...n.x^{-(n+1)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

♦ Công thức Lepnit:

$$\text{Nếu } u, v \text{ là các hàm khả vi } n \text{ lần thì: } (u.v)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)} . v^{(n-k)}.$$

Ví dụ: Cho hàm số $y = x^2 . e^x$. Tính $y^{(20)}(0)$.

Giải

$$\text{Đặt } u = x^2 \Rightarrow u' = 2x \Rightarrow u'' = 2 \Rightarrow u''' = 0.$$

$$v = e^x \Rightarrow v' = e^x \Rightarrow v^{(20)} = e^x.$$

$$y^{(20)}(0) = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k u^{(k)}(0) . v^{(20-k)}(0) = C_{20}^{18} . 2.1 = 380.$$

1.7.2. Vi phân cấp cao

♦ **Định nghĩa.** Ta cũng lý luận tương tự như trên và nếu $df = f'(x)dx$ là vi phân cấp một của $y = f(x)$ thì $d^2f = f''(x)d^2x$ là vi phân cấp hai của $y = f(x)$. Hơn nữa, ký hiệu $d^n f = f^{(n)}(x)d^n x$ là vi phân cấp n của $f(x)$.

$$\text{Ví dụ: a. } d^n \sin x = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) d^n x$$

$$\text{b. } d^n \frac{1}{x} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} d^n x.$$

1.8. Các định lý cơ bản về hàm khả vi