

MỤC LỤC

Nội dung	Trang
Chương bổ sung : Các trường số	2
Chương 1: Hàm số - Giới hạn -Liên tục.....	6
Chương 2: Đạo hàm - Vi phân -Tích tích phân hàm một biến số.....	16
Bài 1: Đạo hàm - Vi phân hàm một biến số	16
Bài 2: Phép tính tích phân hàm một biến số.....	27
Chương 3: Lý thuyết chuỗi.....	44
Chương 4: Đạo hàm, -Vi phân - Hàm nhiều biến	52
Chương 5: Ma trận - Định thức – Hệ phương trình tuyến tính.....	61
Bài 1: Ma trận.....	61
Bài 2: Định thức.....	66
Bài 3: Hệ phương trình tuyến tính.....	78
Chương 6: Phương trình vi phân cơ bản.....	92
Tài liệu tham khảo.....	103

❖ **Mục tiêu:** Sau khi học xong phần này, người học nhận dạng được kiến thức cơ bản về các trường số.

1. TẬP CÁC SỐ

- Tập số tự nhiên: $N = \{1; 2; \dots\}$
- Tập số nguyên: $Z = \{0; \pm 1; \pm 2; \dots\}$
- Tập số hữu tỷ: $Q = \left\{x \text{ sao cho } x = \frac{p}{q}; p, q \in Z, q \neq 0\right\}$

Một số hữu tỷ bao giờ cũng viết được dưới dạng một số thập phân hữu hạn hay số thập phân vô hạn tuần hoàn.

Ví dụ: $\frac{1}{4} = 0,25$; $\frac{3}{4} = 0,75$.

$\frac{7}{6} = 1,1666\dots$ ta có thể viết $\frac{7}{6} = 1,1(6)$

$\frac{15}{11} = 1,363636\dots$ hay $\frac{15}{11} = 1,(36)$

Ngược lại, cho một số thập phân hữu hạn hay vô hạn tuần hoàn thì nó sẽ biểu diễn một số hữu tỷ nào đó.

- Số thập phân hữu hạn $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ sẽ biểu thị số hữu tỷ $\frac{p}{q} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n}$
- Số thập phân vô hạn tuần hoàn $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n (b_1 b_2 \dots b_m)$ sẽ biểu thị số hữu tỷ

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{10^{m-n}}{10^m - 1} \left(\frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \dots + \frac{b_m}{10^m} \right)$$

+ Nhận xét: Một số thập phân hữu hạn cũng có thể được xem là số thập phân vô hạn tuần hoàn, chẳng hạn: $\frac{1}{4} = 0,25000\dots$ hay $\frac{1}{4} = 0,25(0)$

Như vậy có sự đồng nhất giữa tập số hữu tỷ và tập các số thập phân vô hạn tuần hoàn.

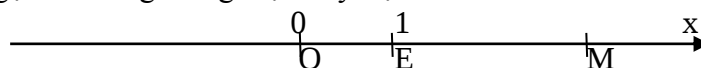
Một số biểu diễn được dưới dạng một số thập phân vô hạn không tuần hoàn được gọi là số vô tỷ. Tập các số vô tỷ kí hiệu là: I

Ví dụ:

$$\sqrt{2} = 1,414213562\dots; \text{ Tập số thực } R = Q \cup I$$

$$\pi = 3,141592653\dots$$

Đường thẳng thực (trục số): Trên đường thẳng Δ lấy điểm O làm gốc và chọn vector đơn vị $\overrightarrow{OE} = \vec{e}$. số x là số thực khi và chỉ khi tồn tại duy nhất một điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}$. Khi đó điểm M được gọi là điểm biểu diễn hình học của số thực x trên đường thẳng Δ và đường thẳng Δ được gọi là đường thẳng thực hay trục số.



Hình 1.1

2. SỐ PHỨC

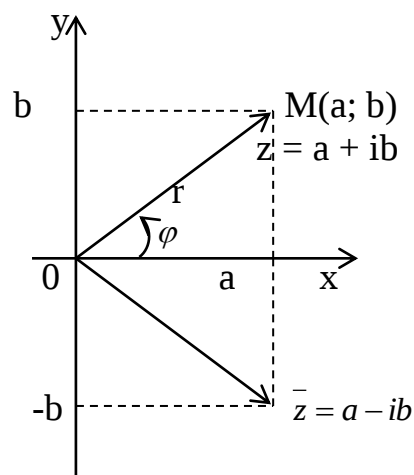
- Số phức là số có dạng: $z = a + ib$. Trong đó $a, b \in R$, i là đơn vị ảo với $i^2 = -1$.
- Ta ký hiệu: $a = \text{Re}z$ gọi là phần thực; $b = \text{Im}z$ gọi là phần ảo. C là tập hợp tất cả các số phức.

- Số phức $z = a + ib$ có thể biểu diễn hình học là một điểm $M(a; b)$ trên mp Oxy.
- Số phức $\bar{z} = a - ib$ được gọi là số phức liên hợp của số phức $z = a + ib$, hai số phức liên hợp đối xứng nhau qua Ox

2.1. Phép toán

Cho 2 số phức $z_1 = a_1 + ib_1$; $z_2 = a_2 + ib_2$,
khi đó ta có:

$$\begin{aligned} z_1 \pm z_2 &= (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \\ z_1 \cdot z_2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}; \quad (z_2 \neq 0) \\ z_1 = z_2 &\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \\ \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2 \end{cases} \end{aligned}$$



H 1.2

Chú ý: Ta thực hiện các phép toán theo quy tắc chung thuận tiện hơn.

$$\text{Ví dụ: } (1 - 3i) + (-2 + 7i) = -1 + 4i$$

$$(1 - i)(2 + i) = 2 + i - 2i - i^2 = 3 - i$$

$$\frac{1}{4 + i} = \frac{4 - i}{(4 + i)(4 - i)} = \frac{4 - i}{17}$$

2.2. Dạng lượng giác của số phức

Ta biểu diễn số phức $z = a + ib$ bởi vectơ $\overrightarrow{OM}$, gọi $r = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$ là môđun của số phức z , ký hiệu: $|z|$.

Góc $\varphi = (\text{Ox}, \overrightarrow{OM})$ được xác định sai khác nhau $2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ gọi là argumen,

Ký hiệu: $\operatorname{Arg} z$. Ta có $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$.

Từ ý nghĩa hình học, ta có $a = r \cos \varphi$; $b = r \sin \varphi \Rightarrow z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Ví dụ: Biểu diễn số phức $z = 1 + i$ dưới dạng lượng giác.

Giải

$$\text{Ta có: } r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \operatorname{tg} \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} \Rightarrow z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

Cho các số phức

$$z = r(\cos \phi + i \sin \phi); \quad z_1 = r_1(\cos \phi_1 + i \sin \phi_1); \quad z_2 = r_2(\cos \phi_2 + i \sin \phi_2).$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2 [\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2)] \\ \Rightarrow |z_1 \cdot z_2| &= |z_1| |z_2|; \quad \operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 + 2k\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} [\cos(\phi_1 - \phi_2) + i \sin(\phi_1 - \phi_2)] \\ \Rightarrow \left| \frac{z_1}{z_2} \right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|}; \quad \operatorname{Arg} \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2 + 2k\pi \end{aligned}$$

$$z^n = r^n [\cos n\phi + i \sin n\phi] \Rightarrow |z^n| = |z|^n; \quad \operatorname{Arg}(z^n) = n \operatorname{Arg} z + 2k\pi$$

$$\sqrt[n]{z} = u \Leftrightarrow u^n = z$$

Biểu diễn u dưới dạng $u = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$.

Ta có:

$$\begin{aligned} u^n = z &\Leftrightarrow \rho^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) = r (\cos \phi + i \sin \phi) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^n = r \\ n\theta = \phi + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \theta = \frac{\phi + k2\pi}{n}; k = \overline{0; n-1} \end{cases} \\ &\Rightarrow u = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\phi + k2\pi}{n} + i \sin \frac{\phi + k2\pi}{n} \right); \quad k = \overline{0; n-1} \end{aligned}$$

Ví dụ: Tính 1. $A = (1 + i)^{20}$.
 2. $u = \sqrt[4]{1 + i}$

Giải: 1. Ta có: $A = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \Rightarrow A = 2^{10} (\cos 5\pi + i \sin 5\pi) = -2^{10}$.

2.

$$\begin{aligned} z_2 &= \sqrt[4]{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{4} + k2\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + k2\pi}{4} \right) \\ &= \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{\pi + k8\pi}{16} + i \sin \frac{\pi + k8\pi}{16} \right); \quad k = \overline{0; 3} \end{aligned}$$

$\Rightarrow u = \sqrt[4]{1 + i}$ có 4 giá trị:

$$u_0 = \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{\pi}{16} + i \sin \frac{\pi}{16} \right)$$

$$u_1 = \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{9\pi}{16} + i \sin \frac{9\pi}{16} \right)$$

$$u_2 = \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{17\pi}{16} + i \sin \frac{17\pi}{16} \right)$$

$$u_3 = \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{25\pi}{16} + i \sin \frac{25\pi}{16} \right)$$

3. KHOẢNG - LÂN CẬN

3.1 Định nghĩa

Khoảng là tập hợp các số thực (các điểm) nằm giữa hai số thực (hay hai điểm) nào đó.

Phân loại khoảng:

Khoảng hữu hạn:

Khoảng đóng: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

Khoảng mở: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

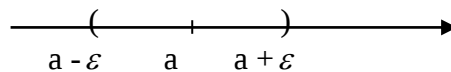
Khoảng nửa đóng, nửa mở: $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}; [a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

Khoảng vô hạn:

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}; (-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$

$$(b, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > b\}; [b, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq b\}$$

3.2 Định nghĩa: Giả sử a là một số thực, khoảng mở $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ (với $\varepsilon > 0$) được gọi là lân cận bán kính ε của a .



Hình 1.3

❖ **Câu hỏi củng cố**

4.1 Hãy dùng giản đồ Vence để biểu diễn các trường số mà bạn đã học?

4.2 Bài tập tự luận:

4.2.1. Thực hiện các phép toán sau:

- a) $(2+i)(3-i) + (3+2i)(4+i)$; b) $(3+5i)(2+i) - (1-2i)(5+3i)$;
 c) $\frac{(5+i)(7-6i)}{3+i}$; d) $\frac{(5+i)(3+5i)}{2i}$;
 e) $(2+i)^3 + (2-i)^3$; f) $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$;

4.2.2. Tính: $i^{77}, i^{98}, i^{-57}, i^n, n \in \mathbb{Z}$

4.2.3. Chứng minh các đẳng thức:

- a) $(1+i)^{8n} = 2^{4n}, n \in \mathbb{Z}$; b) $(1+i)^{4n} = (-1)^n 2^{2n}, n \in \mathbb{Z}$;

4.2.4. Tìm những số thực x,y thỏa mãn phương trình:

- a) $(2+i)x + (1+2i)y = 1-4i$; b) $(3+2i)x + (1+3i)y = 4-9i$

4.2.5. Tìm dạng lượng giác của những số phức sau:

- (a) 5; (b) -2; (c) -3i; (d) $1+i$; (e) $1-i$;
 (f) $\sqrt{3}-i$; (g) $1-(2+\sqrt{3})i$;

4.2.6. Tính các biểu thức:

- (a) $(1+i)^{1000}$; (b) $(1+i\sqrt{3})^{150}$;
 (c) $(\sqrt{3}+i)^{30}$; (d) $(1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2})^{24}$;
 (e) $(2-\sqrt{2}+i)^{12}$; (f) $(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i})^{12}$.

4.2.7. Hãy giải các phương trình sau:

- (a) $X^2 = i$; (b) $X^2 = 3-4i$; (c) $X^2 = -12i$;
 (d) $X^2 - 5X + 4 + 10i = 0$; (e) $X^2 + (2i-7)X + 13-i = 0$

4.2.8. Nếu $z \in \mathbb{C}$, hãy chứng minh:

- (a) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$ (b) z thuần ảo $\Leftrightarrow \bar{z} = -z$

4.2.9. Chứng minh các tính chất sau đây của số phức:

- (1) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$;
 (2) $(|z_1| - |z_2|) \leq |z_1 \pm z_2|$;
 (3) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ khi và chỉ khi các vectơ bán kính $\overrightarrow{Oz_1}, \overrightarrow{Oz_2}$ đồng hướng;
 (4) $|z_1 + z_2| = (|z_1| - |z_2|)$ khi và chỉ khi các vectơ bán kính $\overrightarrow{Oz_1}, \overrightarrow{Oz_2}$ ngược hướng.

4.2.10. Chứng minh rằng:

- (a) Nếu $|z_1| < 1$ thì $|z^2 - z + i| < 3$;
 (b) Nếu $|z_1| < 2$ thì $1 \leq |z^2 - 5| \leq 9$.

4.2.11. Viết dưới dạng lượng giác những phân tử của tập hợp sau:

- (a) $\sqrt[6]{i}$; (b) $\sqrt[8]{8\sqrt{2}(1-i)}$; (c) $\sqrt[3]{1}$; (d) $\sqrt[4]{-4}$.

4.2.12. Viết dưới dạng lượng giác những phân tử của tập hợp sau:

- (a) $\sqrt[4]{-72(1-i\sqrt{3})}$; (b) $\sqrt[3]{1+i}$;
 (c) $\sqrt[3]{2-2i}$; (d) $\sqrt[3]{\frac{8+24i}{3-i}}$.

Chương I

HÀM SỐ - GIỚI HẠN – LIÊN TỤC

❖ **Mục tiêu:** Sau khi học xong bài này, người học giải được các bài tập giới hạn dãy số và dãy hàm một biến số.

I. HÀM SỐ

1. Định nghĩa: Cho $X \subset \mathbb{R}$, một hàm số f xác định trên X là một quy tắc sao cho ứng với mỗi giá trị của biến x thuộc X có duy nhất một giá trị thực của biến y .

Kí hiệu $y = f(x)$

- x được gọi là biến độc lập, y được gọi là biến phụ thuộc.
- X được gọi là miền xác định của hàm số, kí hiệu là D_f .
- Tập $Y = \{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x), x \in D_f\}$ được gọi là miền giá trị của hàm số, kí hiệu R_f

Ví dụ : Khi nuôi một con bò, quan sát quá trình tăng trọng của bò ta có mối liên hệ giữa thời gian nuôi t (ngày) và trọng lượng m (kg) của con bò là một hàm số $m = m(t)$.

2. Định nghĩa: Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp các điểm $M(x, f(x))$ trong hệ toạ độ Descartes.

$$G = \{M(x, f(x)), x \in D\}$$

3. Các tính chất

3.1. Hàm số đơn điệu

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là tăng (hay tăng nghiêm ngặt) trên tập $E \subset D_f$, nếu với mọi $x_1, x_2 \in E$, $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) \leq f(x_2)$ (hay $f(x_1) < f(x_2)$).
- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là giảm (hay giảm nghiêm ngặt) trên tập $E \subset D_f$, nếu với mọi $x_1, x_2 \in E$, $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) \geq f(x_2)$ (hay $f(x_1) > f(x_2)$).
- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm số đơn điệu (hay đơn điệu nghiêm ngặt) trên $E \subset D_f$ nếu nó tăng hoặc giảm (hay tăng nghiêm ngặt hoặc giảm nghiêm ngặt) trên E .

Nếu ta sử dụng thuật ngữ trên mà không nhắc đến tập E thì coi như $E = D_f$.

Ví dụ: Hàm số $y = f(x) = x^2$ giảm nghiêm ngặt trên $(-\infty, 0]$ và tăng nghiêm ngặt trên $[0, +\infty)$.

Thật vậy, giả sử $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ và $x_1 < x_2$. Khi đó ta có

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) < 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Vậy hàm số $y = x^2$ tăng nghiêm ngặt trên $[0, +\infty)$.

Chứng minh tương tự ta có hàm số $y = x^2$ giảm nghiêm ngặt trên $(-\infty, 0]$.

3.2. Hàm số chẵn và hàm số lẻ

- Tập X được gọi là tập đối xứng qua gốc toạ độ O nếu với bất kỳ $x \in X$ thì $-x \in X$. Người ta thường gọi tắt là tập đối xứng.
- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập đối xứng X , khi đó ta có:
 - + Hàm số $y = f(x)$ là hàm số chẵn nếu với mọi x thuộc X thì $f(-x) = f(x)$.
 - + Hàm số $y = f(x)$ là hàm số lẻ nếu với mọi x thuộc X thì $f(-x) = -f(x)$.

Ví dụ:

1. Hàm số $f(x) = x^2$ là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$.
2. Hàm số $g(x) = x^3$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$.

Thật vậy, với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có:

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

$$g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

Chú ý: Đồ thị của hàm số chẵn đối xứng qua trục tung, đồ thị của hàm số lẻ đối xứng qua gốc toạ độ.

3.3. Hàm số bị chặn

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là bị chặn dưới trên tập $X \subset D_f$ nếu tồn tại số $a \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x) \geq a \forall x \in X$.

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là bị chặn trên trên tập $X \subset D_f$ nếu tồn tại số $b \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x) \leq b \quad \forall x \in X$.
- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là bị chặn trên tập $X \subset D_f$ nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại hai số $a, b \in \mathbb{R}$ sao cho $a \leq f(x) \leq b \quad \forall x \in X$.

Chú ý: Đồ thị của hàm số bị chặn sẽ nằm giữa hai đường thẳng $y = a$ và $y = b$.

Ví dụ: Hàm số $f(x) = \frac{4}{x}$ bị chặn trên tập $X = [1, +\infty)$.

Thật vậy, với mọi $x \in X$ ta luôn có: $f(x) = \frac{4}{x} > 0$ và $f(x) = \frac{4}{x} < 4$

Vậy hàm số $f(x) = \frac{4}{x}$ bị chặn trên tập $X = [1, +\infty)$.

3.4. Hàm số tuần hoàn

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm số tuần hoàn nếu tồn tại số $t \neq 0$ sao cho với mọi $x \in D_f$ ta luôn có $x \pm t \in D_f$ và $f(x + t) = f(x)$.

Số dương T nhỏ nhất (nếu có) trong các số t nói trên được gọi là chu kỳ của hàm số tuần hoàn.

Ví dụ:

- Các hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$.
- Các hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$.
- Các hàm số $y = \sin(ax + b)$ và $y = \cos(ax + b)$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi}{|a|}$.

Thật vậy, xét hàm số $f(x) = \sin(ax + b)$.

Giả tồn tại số $t \neq 0$ sao cho $f(x + t) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \sin[a(x + t) + b] = \sin(ax + b) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \sin[a(x + t) + b] - \sin(ax + b) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\left(ax + \frac{at}{2} + b\right)\sin\frac{at}{2} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{at}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{at}{2} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{2k\pi}{a}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Số T dương nhỏ nhất ứng với $k = 1$ (hoặc $k = -1$), do đó ta có $T = \frac{2\pi}{|a|}$ là chu kỳ của hàm

số $f(x) = \sin(ax + b)$.

Các hàm số còn lại chứng minh tương tự. (xem như bài tập)

3.5. Hàm số hợp và hàm số ngược

• Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ thỏa $R_f \subset D_g$, khi đó hàm số hợp của $f(x)$ và $g(x)$ là hàm số $h(x)$ được xác định $h(x) = g[f(x)]$ với mọi $x \in D_f$.

Kí hiệu $h = g \circ f$.

Ví dụ: Cho hai hàm số $f(x) = x^2$ và $g(x) = 2^x$. Hãy xác định hàm số $g \circ f$ và $f \circ g$.

Giải

$$g \circ f = g[f(x)] = g(x^2) = 2^{x^2}$$

$$f \circ g = f[g(x)] = f(2^x) = (2^x)^2 = 2^{2x}$$

• Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa: với mọi $x_1, x_2 \in D_f$ và $x_1 \neq x_2$ ta luôn có $f(x_1) \neq f(x_2)$. Khi đó hàm số ngược của hàm số f , kí hiệu f^{-1} được xác định bởi: $x = f^{-1}(y)$ với $y = f(x)$.

Ví dụ: Hàm số $y = x^3$ có hàm số ngược là $y = \sqrt[3]{x}$.

+ Chú ý:

Nếu g là hàm ngược của hàm f thì $D_g = R_f$ và $R_g = D_f$.

Đồ thị của hai hàm số ngược nhau đối xứng qua đường thẳng $y = x$.

Nhiều khi ta gặp hàm $y = f(x)$ có hàm ngược là hàm f phải nên nhiều trong miền xác định của nó

3.6. Hàm số sơ cấp

+ Các hàm số sơ cấp cơ bản là các hàm số :

- Hàm số lũy thừa: $y = x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).
- Hàm số mũ: $y = a^x$ ($0 < a \neq 1$)
- Hàm số logarithm: $y = \log_a x$ ($0 < a \neq 1$)
- Các hàm số lượng giác: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$
- Các hàm lượng giác ngược: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctan x$, $y = \text{arccot} x$

i. $y = \arcsin x$:

$y = \sin x$ là hàm tăng nghiêm ngặt trên $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ nên có hàm ngược: $x = \arcsin y$.

Hàm ngược của $y = \sin x$ ($-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) là $y = \arcsin x$, đồ thị của nó đối xứng với đồ thị

của hàm $y = \sin x$ ($-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) qua đường thẳng $y = x$.

ii. $y = \arccos x$: $y = \cos x$ là hàm giảm nghiêm ngặt trên $[0; \pi]$ nên nó có hàm ngược $x = \arccos y$. Hàm ngược của hàm $y = \cos x$ ($0 \leq x \leq \pi$) là $y = \arccos x$, đồ thị của nó đối xứng với đồ thị của hàm số $y = \cos x$ ($0 \leq x \leq \pi$) qua đường thẳng $y = x$.

iii. $y = \arctan x$: $y = \tan x$ là hàm tăng nghiêm ngặt trên $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ nên nó có hàm ngược: $x = \arctan y$.

Hàm ngược của hàm $y = \tan x$ ($-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) là $y = \arctan x$, đồ thị của nó đối xứng với đồ thị

của hàm $y = \tan x$ ($-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) qua đường thẳng $y = x$.

iv. $y = \text{arccot} x$:

$y = \cot x$ giảm nghiêm ngặt trên $(0, \pi)$ nên nó có hàm ngược $x = \text{arccot} y$. Hàm ngược của hàm $y = \cot x$ ($0 < x < \pi$) là $y = \text{arccot} x$, đồ thị của nó đối xứng với đồ thị của $y = \cot x$ ($0 < x < \pi$) qua đường thẳng $y = x$.

+ Hàm số sơ cấp là những hàm số được tạo thành bởi một số hữu hạn các phép toán đại số thông thường (cộng, trừ, nhân, chia với mẫu khác không) và phép lấy hàm hợp từ những hàm số sơ cấp cơ bản và các hằng số.

Ví dụ :

$$y = \cos 4x + \sin(x + \frac{\pi}{4}) + 3$$

$$y = 2^{-x} + x^4 + 2$$

$$y = \sqrt[5]{x^2} - \lg 3x + 1$$

II. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

1. Các định nghĩa

1.1. Định nghĩa: Cho hàm số f xác định trên tập $N = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, khi đó các giá trị của hàm f ứng với $n = 1, 2, 3, \dots$ lập thành một dãy số: $f(1), f(2), f(3), \dots, f(n)$.

Nếu ta đặt $x_n = f(n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) thì dãy số nói trên được viết thành: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. hay viết gọn $\{x_n\}$. Mỗi số $x_1, x_2, x_3, \dots$ được gọi là số hạng của dãy số $\{x_n\}$, x_n gọi là số hạng tổng quát.

Ví dụ:

a. $\{x_n\}$, với $x_n = a \forall n: a, a, a, \dots$

b. $\{x_n\}$, với $x_n = (-1)^n : -1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n$

1.2. Định nghĩa

Số a được gọi là giới hạn của dãy số $\{x_n\}$ nếu $\forall \varepsilon > 0$ cho trước (bé tùy ý), tồn tại số tự nhiên N sao cho: $\forall n > N$ thì $|x_n - a| < \varepsilon$.

Ký hiệu: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ hay $x_n \rightarrow a$ khi $n \rightarrow \infty$.

1.3. Định nghĩa

- Nếu dãy $\{x_n\}$ có giới hạn là một số hữu hạn a thì ta nói dãy số $\{x_n\}$ hội tụ hay hội tụ về a .
- Nếu dãy $\{x_n\}$ không hội tụ thì ta nói dãy số $\{x_n\}$ phân kì.

Ví dụ : Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$

Giải. Với mọi $\varepsilon > 0$, ta xét $|x_n - 1| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$

Vậy $\forall \varepsilon > 0$ (bé tùy ý), $\exists N = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right] : \forall n > N \Rightarrow \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$

Vậy : $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$

1.4. Định nghĩa

Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là dãy số dần tới ∞ khi $n \rightarrow \infty$ nếu $\forall M > 0$, lớn tùy ý, $\exists N$ sao cho $\forall n > N$ thì $|x_n| > M$

Ký hiệu: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ hay $x_n \rightarrow \infty$ khi $n \rightarrow \infty$.

Ví dụ: Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 5^n = \infty$

Giải: Xét $|x_n| = |5^n| = 5^n > M \Rightarrow n > \log_5^M$

$\forall M > 0$, lớn tùy ý: $\exists N = \left[\log_5^M \right] : n > N \Rightarrow |5^n| > M$

Vậy: $\lim_{n \rightarrow \infty} 5^n = \infty$

2. Các tính chất

1. Nếu dãy số $\{x_n\}$ có giới hạn thì giới hạn đó là duy nhất.
2. Nếu dãy số $\{x_n\}$ có $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ và $a > p$ (hay $a < q$) thì tồn tại số dương N sao cho $\forall n > N \Rightarrow x_n > p$ (hay $x_n < q$).
3. Nếu dãy $\{x_n\}$ có giới hạn thì nó bị chặn, tức là tồn tại số $M > 0$ sao cho $|x_n| \leq M, \forall n$.
4. Giả sử $\{x_n\}, \{y_n\}$ là những dãy số có giới hạn thì:
 - Nếu $x_n = y_n$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$
 - Nếu $x_n \geq y_n$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$
5. Cho ba dãy số $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ thoã $x_n \leq y_n \leq z_n \forall n$. Khi đó, nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$.
6. Giả sử $\{x_n\}, \{y_n\}$ là các dãy số hội tụ, khi đó ta có :
 Dãy số $\{x_n \pm y_n\}$ cũng hội tụ và $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$
 Dãy số $\{x_n \cdot y_n\}$ cũng hội tụ và $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$

Dãy số $\{k x_n\}$ cũng hội tụ và $\lim_{n \rightarrow \infty} k x_n = k \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Dãy số $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ cũng hội tụ và $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}, \left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0 \right)$

III. GIỚI HẠN HÀM CỦA HÀM SỐ

1. Các định nghĩa: Trong phần này ta luôn giả sử $f(x)$ là hàm số được xác định trong lân cận điểm x_0 , không nhất thiết phải xác định tại x_0 .

1.1 Định nghĩa: Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là L nếu với mọi dãy số $\{x_n\}$ trong lân cận của x_0 thỏa: $x_n \neq x_0 \forall n$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$.

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow x_0$.

1.2 Định nghĩa: Số L được gọi là giới hạn của hàm số $f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước (bé tùy ý) tồn tại số δ dương sao cho với mọi x thỏa $0 < |x - x_0| < \delta$ ta có $|f(x) - L| < \varepsilon$.

1.3 Định nghĩa: Số L được gọi là giới hạn phải (trái) của hàm số $f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước (bé tùy ý) tồn tại số δ dương sao cho với mọi x thỏa $x_0 < x < x_0 + \delta$ ($x_0 - \delta < x < x_0$) ta có $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$ ($\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$).

1.4. Định nghĩa: Số L được gọi là giới hạn của hàm số $f(x)$ khi $x \rightarrow \infty$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ (bé tùy ý) tồn tại số $M > 0$ (lớn tùy ý) sao cho với mọi x thỏa $|x| > M$ ta có $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow \infty$.

Ví dụ :

1. Chứng minh: $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$

2. Chứng minh: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$

3. Chứng minh: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

Giải:

1. Vì $x \rightarrow 0$ ta có thể chỉ rút: $|x| < \frac{\pi}{2} \Rightarrow |\sin x| < |x| < \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ bé tùy ý:

$$\exists \delta = \varepsilon > 0 : 0 < |x - 0| = |x| < \delta \Rightarrow |\sin x - 0| = |\sin x| \leq |x| < \varepsilon$$

Vậy $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$

2. Khi $x \rightarrow 3 \Rightarrow x - 3 \rightarrow 0$ ta có: $\left| \frac{x^2 - 9}{x - 3} - 6 \right| = |x + 3 - 6| = |x - 3| < \varepsilon$

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > \varepsilon : 0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^2 - 9}{x - 3} - 6 \right| < \varepsilon$$

Vậy: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$

3. Xét: $\left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \left| \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{|x|} < \varepsilon \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{\varepsilon}$, với mọi $\varepsilon > 0$ (bé tùy ý)

$$\exists M = \frac{1}{\varepsilon} > 0 : |x| > M \Rightarrow \left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon.$$

$$\text{Vậy } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

2. Các tính chất:

Dựa vào giới hạn của dãy số, định nghĩa giới hạn hàm số, ta suy ra các tính chất sau

1. Nếu $f(x)$ có giới hạn thì giới hạn đó là duy nhất.

2. Nếu hàm số $f(x)$ có giới hạn là L khi $x \rightarrow x_0$ và $L > a$ (hay $L < a$) thì trong một lân cận nào đó của x_0 (không kể x_0) ta có $f(x) > a$ (hay $f(x) < a$).

3. Nếu $f(x) \leq g(x)$ trong một lân cận nào đó của điểm x_0 và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ thì

$$b \leq a$$

4. Nếu $f(x) = C$ (C là hằng số) thì $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = C$

5. Nếu $f(x)$ là một hàm số sơ cấp xác định tại điểm x_0 và ở trong lân cận x_0 thì $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

6. Giả sử $f(x)$, $g(x)$ và $h(x)$ là những hàm số được xác định trong một lân cận nào đó của điểm x_0 , không nhất thiết xác định tại x_0 . Khi đó, nếu các hàm số $f(x)$, $g(x)$ và $h(x)$ thỏa mãn điều kiện: $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ và

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L \text{ thì } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

7. Giả sử hàm số $f(x)$ xác định tại mọi x dương lớn tùy ý, khi đó nếu hàm $f(x)$ là hàm số đơn điệu tăng và bị chặn trên thì $f(x)$ có giới hạn khi $x \rightarrow +\infty$

8. Giả sử hàm số $f(x)$ xác định tại mọi x âm lớn tùy ý về giá trị tuyệt đối, khi đó nếu hàm $f(x)$ là hàm số đơn điệu giảm và bị chặn dưới thì $f(x)$ có giới hạn khi $x \rightarrow -\infty$.

9. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0}^* f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$

10. Nếu các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có giới hạn khi $x \rightarrow x_0$ thì các hàm $[f(x) \pm g(x)]$, $f(x)$,

$g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ cũng có giới hạn và ta có:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}, \left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0 \right)$$

11. Xét hàm hợp $f(u)$ và $u = u(x)$, khi đó ta có:

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = u_0$, $f(u)$ xác định trong một lân cận của u_0 và $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = L$ thì

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[u(x)] = L.$$

Ví dụ: Tính: $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{2^x (x^2 + 3x - 5)}$

Giải

Đặt $f(u) = \sqrt{u}$; $u(x) = 2^x (x^2 + 3x - 5)$, ta có

$$\lim_{x \rightarrow 2} u(x) = \lim_{x \rightarrow 2} 2^x (x^2 + 3x - 5) = 2\sqrt{5}$$

$$\lim_{u \rightarrow 20} f(u) = \lim_{u \rightarrow 20} \sqrt{u} = 2\sqrt{5}$$

$$\text{Vậy } \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{2^x (x^2 + 3x - 5)} = 2\sqrt{5}$$

3. Các giới hạn cơ bản

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

$$\text{Đặc biệt } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \text{ hay } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Chú ý: Khi tính giới hạn của hàm số chúng ta thường gặp các dạng vô định như :

$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 1^\infty$. sau đây là một vài ví dụ minh họa.

Ví dụ:

$$1. \text{ Tính: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x}$$

$$2. \text{ Tính: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 - 3x + 2}$$

$$3. \text{ Tính: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$$

Giải:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x+x^2} - 1)(\sqrt{1+x+x^2} + 1)}{x(\sqrt{1+x+x^2} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x(\sqrt{1+x+x^2} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-6)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-6)}{(x-2)} = 5$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cdot \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

IV. VÔ CÙNG BÉ VÀ VÔ CÙNG LỚN

1. Các định nghĩa

1.1 Định nghĩa: Hàm $f(x)$ được gọi là vô cùng bé (hay vô cùng lớn) khi $x \rightarrow x_0$ nếu

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ (hay $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$). (Ở đây x_0 có thể hữu hạn hoặc vô hạn).

Ví dụ:

1) Khi $x \rightarrow 0$ thì $\sin x$ là VCB vì $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$.

2) Khi $x \rightarrow \infty$ thì $\frac{1}{x}$ là VCB vì $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$.

3) Khi $x \rightarrow 0$ thì $\frac{1}{x}$ là VCL vì $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{1}{x} \right| = +\infty$.

Nhận xét

- Nếu hàm $f(x)$ là một VCB khi $x \rightarrow x_0$ và khác 0 thì $\frac{1}{f(x)}$ là một VCL khi $x \rightarrow x_0$

- Nếu $f(x)$ là một VCL khi $x \rightarrow x_0$ thì $\frac{1}{f(x)}$ là một VCB khi $x \rightarrow x_0$.
- Một hằng số có trị tuyệt đối bé đến đâu thì cũng không được coi là hàm VCB, một hằng số dù có trị tuyệt đối lớn đến đâu thì nó cũng chỉ là một số lớn chứ không phải là VCL.

1.2 Định nghĩa: Giả sử $f(x)$, $g(x)$ là hai VCB khi $x \rightarrow x_0$. Ta bảo chúng là các VCB(VCL)

so sánh được nếu tồn tại giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = c$, khi đó:

- Nếu $c \neq 0, c \neq \infty$ thì ta nói rằng $f(x)$ và $g(x)$ là những VCB(VCL) cùng cấp.
- Nếu $c = 0$ thì ta nói rằng $f(x)$ một VCB cấp cao hơn (VCL cấp thấp hơn) so với $g(x)$.
- Nếu tồn tại $r > 0$ sao cho $f(x)$ cùng cấp với $[g(x)]^r$ thì ta nói rằng $f(x)$ là VCB (VCL) cấp r đối với $g(x)$.

Ví dụ:

Khi $x \rightarrow 0$ thì $1 - \cos x$ và x^2 là hai VCB cùng cấp với nhau.

$$\forall \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

- Quy tắc ngắt bỏ VCB cấp cao: Giả sử $f(x)$, $g(x)$ là hai VCB khi $x \rightarrow x_0$, đồng thời $f(x)$, $g(x)$ đều là tổng của nhiều VCB thì giới hạn của tỉ số $\frac{f(x)}{g(x)}$ bằng giới hạn của tỉ số giữa hai VCB có cấp thấp nhất ở tử số và ở mẫu số.

$$\text{Ví dụ: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin^2 x + \tan^3 x}{3x + 4x^3 + 5x^7} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$$

1.3 Định nghĩa: Giả sử $f(x)$, $g(x)$ là hai VCB khi $x \rightarrow x_0$. Ta bảo chúng là các VCB tương đương khi $x \rightarrow x_0$. nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Kí hiệu: $f(x) \sim g(x)$.

Ví dụ: Khi $x \rightarrow 0$ thì $\sin x \sim x$; $e^x - 1 \sim x$; $\ln(1 + x) \sim x$.

Chú ý: Nếu trong quá trình nào đó: $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x)$ còn $\beta_1(x) \sim \beta_2(x)$ thì trong quá trình ấy:

$$\lim \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim \frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}.$$

$$\text{Ví dụ: } 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{3x} = \frac{5}{3}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{e^{3x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

1. 2. Các tính chất

- Tổng của hai VCB là một VCB (khi $x \rightarrow x_0$).
- Tích của một VCB với một đại lượng bị chặn là một VCB (khi $x \rightarrow x_0$).
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ (hữu hạn) khi và chỉ khi $f(x) - L = \alpha(x)$ là VCB khi $x \rightarrow x_0$.

V. HÀM SỐ LIÊN TỤC

1. Các định nghĩa

1.1 Định nghĩa: Cho hàm số $f(x)$ xác định tại x_0 và ở trong lân cận x_0 , khi đó hàm $f(x)$ được gọi là liên tục tại x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

1.2 Định nghĩa: Cho hàm số $f(x)$ xác định tại x_0 và ở trong lân cận x_0 , khi đó hàm $f(x)$ được gọi là liên tục tại x_0 nếu $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$.

Với $\Delta x = x - x_0$ gọi là số gia của đối số x .

$\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, gọi là số gia của hàm $f(x)$ ứng với Δx tại x_0 .

1.3 Định nghĩa: Hàm $f(x)$ được gọi là liên tục trái (phải) tại điểm x_0 nếu:

- Hàm $f(x)$ xác định tại điểm x_0 và ở trong lân cận trái (phải) điểm x_0 .

- $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ ($\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$).

1.4 Định nghĩa

- Hàm $f(x)$ được gọi là liên tục trong khoảng $(a; b)$ nếu $f(x)$ liên tục tại mọi x thuộc khoảng $(a; b)$.

- Hàm $f(x)$ được gọi là liên tục trên $[a; b]$ nếu $f(x)$ liên tục trong khoảng $(a; b)$ và liên tục phải tại $x = a$ và liên tục trái tại $x = b$.

1.5 Định nghĩa: Hàm số $f(x)$ được gọi là gián đoạn tại x_0 nếu nó không liên tục tại x_0 và x_0 được gọi là điểm gián đoạn của hàm $f(x)$.

Người ta đã chia các điểm gián đoạn của $f(x)$ làm hai loại:

+ Nếu x_0 là điểm gián đoạn của hàm số và giới hạn trái, phải của hàm số $f(x)$ khi x dần tới x_0 đều là hữu hạn thì x_0 gọi là điểm gián đoạn loại một của hàm số $f(x)$, còn $\omega = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ được gọi là bước nhảy của $f(x)$ tại x_0 .

Đặc biệt: Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ được gọi là điểm gián đoạn bỏ được.

+ Các điểm gián đoạn không phải là điểm gián đoạn loại một thì gọi là điểm gián đoạn loại hai.

Ví dụ : Xét sự liên tục trái, phải của hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x + 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ tại điểm $x = 1$.

Giải * $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = 1 = f(1) \Rightarrow f(x)$ liên tục phải tại $x = 1$.

* $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 3x + 1 = 4 \neq f(1) \Rightarrow f(x)$ không liên tục trái tại $x = 1$.

Chú ý: điều kiện cần và đủ để cho hàm $f(x)$ liên tục tại x_0 là hàm $f(x)$ phải liên tục trái và liên tục phải tại x_0 .

2. Tính liên tục của hàm số sơ cấp

- Mọi hàm số sơ cấp $f(x)$ nếu xác định x_0 và trong lân cận tại x_0 thì $f(x)$ liên tục tại x_0 .

- Mọi hàm sơ cấp $f(x)$ liên tục tại mọi điểm trong miền xác định của nó.

Ví dụ: 1) $f(x) = x^n$ ($x \in \mathbb{N}$) liên tục tại $\forall x$.

2) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ liên tục tại $\forall x \neq 1$.

3) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ liên tục tại mọi $|x| \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -1 \vee x \geq 1$.

3. Các phép tính về hàm liên tục tại cùng một điểm

1) Nếu $f_1(x), f_2(x)$ là những hàm số liên tục tại điểm x_0 thì tổng, hiệu ($f_1(x) \pm f_2(x)$);

tích ($f_1(x) \cdot f_2(x)$); thương $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ ($f_2(x) \neq 0$) cũng là những hàm số liên tục tại điểm x_0 .

2) Nếu $u = u(x)$ là hàm số liên tục tại $x = x_0$, còn hàm $f(u)$ liên tục tại $u = u_0$ thì hàm $f[u(x)]$ cũng là liên tục tại x_0 .

+ Ý nghĩa hình học của khái niệm liên tục:

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ thì đồ thị của nó là một đường cong liên không bị ngắt quãng nối hai điểm $A(a, f(a)); B(b, f(b))$.

+ Những tính chất quan trọng của hàm $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$:

- i. Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ thì nó bị chặn trên $[a, b]$.
 ii. Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ thì nó giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất.

❖ **Câu hỏi củng cố:**

1. Hãy nêu định nghĩa hàm số liên tục tại một điểm, trong khoảng, trên đoạn?
 Hãy cho biết tính chất quan trọng của hàm số liên tục trên một đoạn?
 2. Bài tập tự luận: Tính các giới hạn sau:

2.1 Tính: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$

2.2 Tính: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x + 1}}$

2.3 Tính: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}).$

2.4 Tính: $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{2x}}$

2.5 Tính: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{x}.$

2.6 Tính: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 - 3x + 2}.$

2.7 Tính: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}.$

3. Tính các giới hạn sau

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$ (m, n nguyên dương)

2. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{ax} - x}{x - a}$

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt[3]{x+1} - 1}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[5]{1+x}}{x}$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}}$

7. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax + b} - \sqrt{x^2 + cx + d})$

8. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x})$

9. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2^x + 3}{2^x - 3}$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^{10} + x^5 + 1)}$

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x \sin x)}{\operatorname{tg}^3 x}$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \operatorname{tg} 5x}{(x - x^3)^2}$

13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\ln^2(1 - 2x)}$

14. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(e^{x-1} - 1)}{\ln x}$

15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x - 3x^2 + 2x^3)}{\ln(1 + 3x - 4x^2 + x^3)}$

16. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cot gx - \cot ga}{x - a}$

17. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\pi - 4x}$

18. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi - 2x}$

19. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{x + 2}$

20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{tg}^3 x - \sin^3 x}$

Chương II

ĐẠO HÀM – VI PHÂN - TÍCH PHÂN HÀM MỘT BIẾN SỐ

Bài 1: ĐẠO HÀM – VI PHÂN HÀM MỘT BIẾN SỐ

- ❖ **Mục tiêu:** Sau khi học xong bài này, người học có thể
- Tính đạo hàm, vi phân hàm một biến
 - Tính được tích phân tích hàm một biến.

I. Các định nghĩa

1.1 Định nghĩa: Giả sử $y = f(x)$ là hàm số xác định tại điểm x_0 và trong lân cận của điểm x_0 . Nếu giới hạn $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ tồn tại hữu hạn thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0 . Kí hiệu: $f'(x_0)$.

Chú ý:

- Ta có thể kí hiệu đạo hàm của hàm số dưới các dạng sau:

$$y' ; \frac{dy}{dx} ; \frac{df(x)}{dx} ; f'(x).$$

- Giá trị đạo hàm của hàm số tại điểm x_0 được biểu diễn như sau:

$$f'(x_0) ; y' \Big|_{x=x_0} ; \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0} ; \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=x_0}.$$

1.2 Định nghĩa: Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định tại x_0 và tại $\forall x > x_0$ (hay $\forall x < x_0$). Nếu giới hạn $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'_+(x_0)$ (hay $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'_-(x_0)$) tồn tại hữu hạn thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm phải (hay đạo hàm trái) của hàm $f(x)$ tại điểm x_0 .

1.3 Định nghĩa

- Hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng (a, b) nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm thuộc khoảng đó.

- Hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[a, b]$ nếu nó có đạo hàm trên khoảng (a, b) và có đạo hàm phải tại a , có đạo hàm trái tại b .

Ví dụ: Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số $y = f(x) = ax + b$.

Giải:

$$\text{Ta có } f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[a(x + \Delta x) + b] - (ax + b)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a\Delta x}{\Delta x} = a.$$

Đặt biệt: Nếu $f(x) = C$ thì $f'(x) = 0$.

II. Các định lý

2.1 Định lý: Điều kiện cần và đủ để hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x là hàm số $f(x)$ có đạo hàm trái và đạo hàm phải bằng nhau.

2.2 Định lý: Giả sử hàm số $f(x)$ xác định tại x_0 và trong lân cận của nó. Khi đó nếu hàm $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại x_0 .

Chú ý: Nếu hàm số $f(x)$ liên tục tại x thì chưa thể suy ra nó có đạo hàm tại x .

Ví dụ 2: Hàm số $f(x) = |x|$ liên tục tại $x = 0$ nhưng không có đạo hàm tại đây.

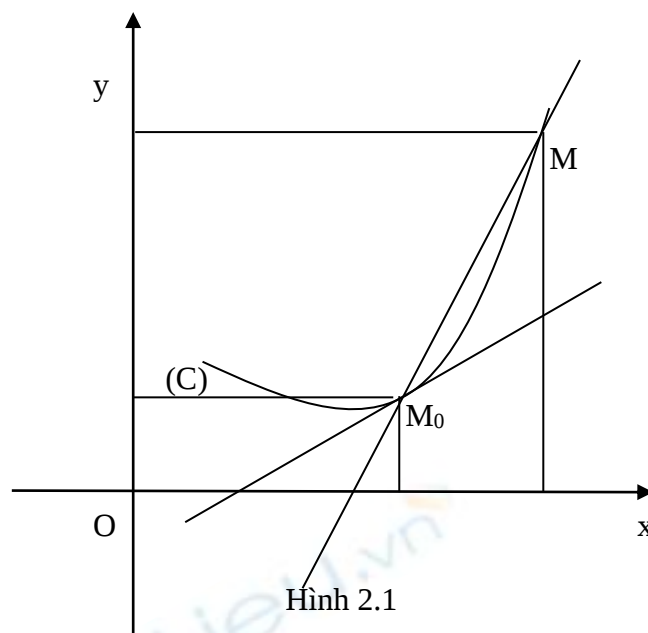
III. Ý nghĩa của đạo hàm

3.1. Ý nghĩa hình học.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) , trên (C) lấy hai điểm $M_0(x_0, y_0)$, $M(x, y)$. Vị trí giới hạn nếu có của các tuyến M_0M khi $M \rightarrow M_0$ dọc theo đồ thị (C) được gọi là tiếp tuyến của (C) tại điểm M_0 .

Với $\Delta x = x - x_0$; $\Delta y = y - y_0$ ta có tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ là hệ số góc của các tuyến M_0M .

Khi $M \rightarrow M_0$ thì $\Delta x \rightarrow 0$ và giới hạn nếu có của $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ là hệ số góc của tiếp tuyến. Theo định nghĩa của đạo hàm thì $f'(x_0)$ hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm $M_0(x_0, y_0)$.



Hình 2.1

3. 2. Ý nghĩa vật lý

Xét một chất điểm M chuyển động trên trục Ox sao cho tại thời điểm t thì $S(t)$ là khoảng cách đại số $\overline{OM}$. Sau khoảng thời gian Δt tức là tại thời điểm $t + \Delta t$ chất điểm ở vị trí M' với khoảng cách đại số $\overline{OM'} = S(t + \Delta t)$, khi đó quãng đường đi của chất điểm trong khoảng thời gian Δt là $S(t + \Delta t) - S(t)$. Do đó vận tốc trung bình của chất điểm trong khoảng thời gian Δt là tỉ số $\frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}$.

Bây giờ giá trị $S'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}$ là vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm t .

4. Quy tắc tính đạo hàm

4.1 Định lý: Giả sử $f(x)$, $g(x)$ là các hàm số có đạo hàm tại x , khi đó các hàm tổng, hiệu, tích, thương của chúng cũng có đạo hàm tại x và:

$$\begin{aligned} [f(x) \pm g(x)]' &= f'(x) \pm g'(x) \\ [f(x) \cdot g(x)]' &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\ \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \quad (g(x) \neq 0) \end{aligned}$$

4.2 Định lý: Nếu hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm tại x_0 , hàm $f(u)$ xác định trong khoảng chứa điểm $u_0 = u(x_0)$ và hàm $f(u)$ có đạo hàm tại điểm u_0 thì hàm hợp $h(x) = f[u(x)]$ có đạo hàm tại điểm x_0 và $h'(x_0) = h'(u_0) \cdot u'(x_0)$.

4.3 Định lý: Giả sử hàm $y = f(x)$ có hàm ngược là $f^{-1}(x)$. Nếu hàm $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 và $f'(x_0) \neq 0$ thì $f^{-1}(x)$ có đạo hàm tại $y_0 = f(x_0)$ và $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

BẢNG ĐẠO HÀM CỦA CÁC HÀM SỐ SƠ CẤP

$f(x)$	$f'(x)$
$x^\alpha; u^n$	$\alpha x^{\alpha-1}; n.u'u^{n-1}$
$a^x; a^u$ $e^x; e^n$	$a^x \ln a; u'a^u \ln a$ $e^x \ln e = e^x; u'e^u \ln e = u'e^u$
$\log_a x; \ln x; \log_a u$	$\frac{1}{x \ln a}, 1 \neq a > 0, \frac{1}{x}, x > 0; \frac{u'}{u \log u} (1 \neq u > 0);$
$\sin x, \sin u$	$\cos x, u' \cos u$
$\cos x, \cos u$	$-\sin x, -u' \sin u$
$\tan x, \tan u$	$\frac{1}{\cos^2 x}; \frac{u'}{\cos^2 u}$
$\cot x, \cot u$	$-\frac{1}{\sin^2 x}; -\frac{u'}{\sin^2 u}$
$\arcsin x, \arcsin u$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\arccos x, \arccos u$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\arctan x, \arctan u$	$\frac{1}{1+x^2}; \frac{u'}{1+u^2}$
$\operatorname{arccot} x, \operatorname{arccot} u$	$-\frac{1}{1+x^2}; -\frac{u'}{1+u^2}$

5. Đạo hàm cấp cao

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y' = f'(x)$ trong khoảng (a, b) , ta gọi $f'(x)$ là đạo hàm cấp 1 của hàm $f(x)$. Bản thân $f'(x)$ cũng là hàm số nên nó có thể có đạo hàm, nếu hàm $f'(x)$ có đạo hàm tại x thuộc khoảng (a, b) thì ta gọi đạo hàm của hàm $f'(x)$ là đạo hàm cấp 2 của hàm $f(x)$ và kí hiệu $y'' = f''(x) = \frac{d^2(y)}{dx^2} = \frac{d^2 f}{dx^2}$.

Tổng quát: Đạo hàm cấp n của hàm $f(x)$ là đạo hàm của đạo hàm cấp $(n-1)$ của nó.

$$\text{Kí hiệu: } y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n(y)}{dx^n} = \frac{d^n f}{dx^n}.$$

❖ Câu hỏi củng cố

1. Hãy trình bày định nghĩa đạo hàm, các định lý, ý nghĩa hình học của đạo hàm bằng sơ đồ trực quan?

2. Bài tập tự luận:

2.1. Dùng định nghĩa của đạo hàm, tìm đạo hàm của hàm số f định bởi: $f(x) = -\cot x - x$

2.2. Tìm đạo hàm của hàm số $y = x^{x^2}$ ($x > 0$).

2.3. Chứng minh rằng phương trình $16x^4 - 64x + 31 = 0$ không thể có hai nghiệm phân biệt nằm trong khoảng $(0, 1)$.

2.4. Chứng minh rằng trên cung AB của parabol $y = 2x - x^2$, với $A(1, 1)$, $B(3, -3)$, tồn tại một điểm M sao cho tiếp tuyến tại M của parabol song song với dây cung AB. Xác định điểm M

II. VI PHÂN

1. Định nghĩa vi phân

+ Cho hàm số $f(x)$ xác định tại x_0 và trong lân cận của nó. Cho x một số gần Δx tùy ý, nếu tại x_0 số gần của hàm số $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ viết được dưới dạng:

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)$$

trong đó A là đại lượng không phụ thuộc vào Δx và $\alpha(\Delta x)$ là vô cùng bé bậc cao hơn Δx (nghĩa là $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$ khi $\Delta x \rightarrow 0$) thì ta nói hàm số $f(x)$ khả vi tại điểm x_0 và đại lượng $A\Delta x$ được gọi là vi phân của hàm số tại điểm x_0 . Kí hiệu: $dy = A\Delta x$.

Nhận xét: Từ định nghĩa ta suy ra $\Delta y = dy + \alpha(\Delta x)$ hay $\Delta y - dy = \alpha(\Delta x)$. Vậy nếu $f(x)$ khả vi thì số gần của hàm số sai khác vi phân một lượng vô cùng bé không đáng kể. Do đó ta có: $\Delta y \approx dy$ khi $\Delta x \rightarrow 0$.

+ Vi phân cấp hai của hàm $f(x)$ là vi phân của vi phân cấp một, kí hiệu: $d^2f(x)$. Vi phân cấp n của hàm $f(x)$ là vi phân của vi phân cấp $n - 1$ của hàm $f(x)$, kí hiệu: $d^n f(x)$.

Ta có:

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x).dx^n$$

2. Mối quan hệ giữa đạo hàm và vi phân

+ Điều kiện cần và đủ để hàm số $y = f(x)$ khả vi tại điểm x_0 là $f(x)$ có đạo hàm hữu hạn tại điểm x_0 .

Chú ý: Vi phân của hàm $f(x)$ thường được viết dưới dạng $df = f'(x_0) \Delta x$

3. Quy tắc tính vi phân

+ Giả sử $f(x)$, $g(x)$ là các hàm số khả vi, khi đó ta có:

$$d(f \pm g) = df \pm dg$$

$$d(fg) = gdf + fdg$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2} \quad (g \neq 0)$$

+ Giả sử $y = f(u)$ và $u = u(x)$ là những hàm số khả vi, khi đó ta có

$$df[u(x)] = f'[u(x)] = f'(u).u'(x).dx = f'(u).du$$

4. Công thức tính xấp xỉ

Theo nhận xét sau định nghĩa 2.4: Nếu $f(x)$ khả vi tại điểm x_0 và $f'(x_0) \neq 0$ thì $\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x$ hay

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

Ví dụ: Tính gần đúng $\sqrt[3]{28}$

Giải:

$$\text{Ta có } \sqrt[3]{28} = \sqrt[3]{27\left(1 + \frac{1}{27}\right)} = 3\sqrt[3]{1 + \frac{1}{27}}$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \sqrt[3]{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \text{ Chọn } x_0 = 1 \text{ và } \Delta x = \frac{1}{27}.$$

Khi đó áp dụng công thức tính gần đúng ta có: $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$

$$\Leftrightarrow f\left(1 + \frac{1}{27}\right) \approx f(1) + f'(1) \cdot \frac{1}{27} \Leftrightarrow \sqrt[3]{1 + \frac{1}{27}} \approx 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{27}$$

$$\text{Vậy } \sqrt[3]{28} \approx 3 \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{27} \right) = 3 + \frac{1}{27} \approx 3,04$$

5. Các định lý cơ bản của phép tính vi phân

+ Hàm số $f(x)$ đạt cực đại (hay cực tiểu) tại điểm $x_0 \in (a, b) \subset D_f$ nếu tồn tại một lân cận của điểm x_0 sao cho với mọi x thuộc lân cận đó ta có:

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ (hay } f(x) \geq f(x_0) \text{)}$$

Điểm x_0 gọi là điểm cực đại (hay cực tiểu) của hàm số, điểm cực đại hay cực tiểu gọi chung là điểm cực trị. Giá trị hàm số tại điểm cực đại (hay cực tiểu) gọi là giá trị cực đại (hay cực tiểu) và gọi chung là giá trị cực trị.

5.1. Định lý: (Fermat)

Nếu hàm số $f(x)$ xác định trong khoảng (a, b) , đạt cực đại hay cực tiểu tại điểm $x_0 \in (a, b)$ và tồn tại $f'(x_0)$ thì $f'(x_0) = 0$.

5.2. Định lý: (Rolle)

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và khả vi trên khoảng (a, b) và $f(a) = f(b)$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

5.3 Định lý: (Lagrange)

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và khả vi trong khoảng (a, b) thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

5.4 Định lý: (Cauchy)

Nếu các hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$, khả vi trên khoảng (a, b) và $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

5.5 Định lý: (Taylor)

Nếu hàm số $f(x)$ khả vi đến cấp $(n+1)$ trong lân cận Δ của điểm x_0 thì $\forall x \in \Delta, x \neq x_0$ tồn tại số c nằm trong khoảng giữa x và x_0 sao cho

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

Trong đó sai số $R_n(x)$ gọi là phần dư Lagrange xác định bởi :

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \text{ (với } c \text{ nằm giữa } x \text{ và } x_0 \text{)}.$$

Khi đó công thức trên được viết lại $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x)$.

Công thức này gọi là công thức Taylor.

Đa thức $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ gọi là đa thức Taylor.

Khi $x_0 = 0$ thì công thức Taylor có dạng $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_n(x)$

(Bây giờ phần dư là: $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$), gọi là công thức Maclaurin.

5.6. Một số công thức khai triển Maclaurin

1. $f(x) = a^x$.