

ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN TP HỒ CHÍ MINH
KHOA TOÁN-TIN HỌC

GIÁO TRÌNH

TOÁN GIẢI TÍCH A4

Tiến sĩ Nguyễn Thanh Vũ

Niên khóa 2009-2010

CHƯƠNG 1 PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

1. ĐỊNH NGHĨA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN1.1 Khái niệm

– Xét một phương trình mà ẩn là hàm số một biến y , chẳng hạn như

$$y'' - 3xy' + 5y'y = 0,$$

trong đó có chứa đạo hàm của y . Phương trình này được gọi là phương trình vi phân.

Cấp cao nhất của đạo hàm trong phương trình là cấp 2, nên phương trình này được gọi là phương trình vi phân cấp 2.

– Phương trình $y'' - 3xy' + 5y'y = 0$ được gọi là phương trình vi phân **tuyến tính** cấp 2.

– Phương trình $3y' + 7xy = \sin x$ được gọi là phương trình vi phân **tuyến tính** cấp 1.

– Phương trình $y'' - 3xy' + 5y'y = 0$ là phương trình vi phân nhưng **không tuyến tính**.

– Phương trình vi phân $y' = 2xy - 3y^2$ có dạng $y' = f(x, y)$ và được gọi là **phương trình đã giải ra đối với đạo hàm**.

– Coi phương trình vi phân $y' = 1$. Nghiệm trên $\mathbb{R}$ của phương trình vi phân này có dạng $y = x + C$ với C là hằng số tùy ý. Người ta gọi $y = x + C$, trong đó C là hằng số tùy ý, là **nghiệm tổng quát** (general solution) của phương trình vi phân $y' = 1$ trên $\mathbb{R}$.

Các hàm số $y = x + 1, y = x + 2$ được gọi là các **nghiệm đặc biệt** (particular solution) của phương trình vi phân $y' = 1$ trên $\mathbb{R}$.

– Đường biểu diễn của nghiệm $y = y(x)$ được gọi là **đường cong nghiệm** hay **đường cong tích phân** của phương trình vi phân.

– Xét phương trình vi phân $yy' = -x$. Lấy tích phân hai vế ta được $y^2 = -x^2 + C$. Hệ thức $y^2 = -x^2 + C$ được gọi là **nghiệm ẩn** (implicit solution) của phương trình vi phân. Khi nào nghiệm có dạng $y = f(x)$ thì nó được gọi là **nghiệm tường minh** (explicit solution).

1.2. Định nghĩa phương trình vi phân

– Một phương trình vi phân là phương trình hàm (một biến) có chứa đạo hàm của hàm cần tìm. Nếu bậc cao nhất của đạo hàm trong phương trình vi phân là n , thì phương trình này được gọi là phương trình vi phân cấp n .

– Xét phương trình vi phân cấp n

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

trong đó biểu thức $F(x, y, \dots, y^{(n)})$ thực sự chứa $y^{(n)}$.

Hàm số $y = y(x)$ được gọi là nghiệm của phương trình vi phân trên khoảng I (với $I \subset \mathbb{R}$) nếu hàm số $y = y(x)$ thỏa tính chất

$$\forall x \in I, F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0.$$

Chú thích:

Tính chất trên bao hàm hai tính chất sau

- Hàm số y khả vi tới cấp n trên I , tức các đạo hàm $y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)$ tồn tại với mọi $x \in I$.
- $\forall x \in I, (x, y(x), \dots, y^{(n)}(x))$ thuộc miền xác định của F .

1.2 Định nghĩa nghiệm

– Một hệ thức $G(x, y) = 0$ được gọi là nghiệm ẩn trên khoảng I của phương trình vi phân nếu tồn tại một hàm số y vừa thỏa hệ thức $G(x, y(x)) = 0$ vừa thỏa phương trình vi phân với mọi x thuộc I .

Ví dụ: Xét phương trình vi phân $yy' + x = 0$.

Lấy tích phân hai vế ta được $\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = C$ hay $y^2 + x^2 = K$ với K là hằng số.

Ta thấy hệ thức $y^2 + x^2 = 25$ là một **nghiệm ẩn của phương trình vi phân** $yy' + x = 0$ trên khoảng $I = (-5, +5)$. Thật vậy, tồn tại hàm số $y = \sqrt{25 - x^2}$ xác định trên $(-5, 5)$ và thỏa

$$\begin{cases} y^2 + x^2 = 25 \\ yy' + x = \sqrt{25 - x^2} \cdot \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}} + x = 0 \end{cases}, \forall x \in I$$

– Nếu biểu thức của nghiệm có chứa tham số và mọi nghiệm của phương trình đều có dạng này (các nghiệm khác nhau thì ứng với các giá trị khác nhau của tham số), thì nghiệm này được gọi là **nghiệm tổng quát của phương trình vi phân**.

$$\begin{cases} y^2 + x^2 = 25 \\ yy' + x = \sqrt{25-x^2} \frac{-x}{\sqrt{25-x^2}} + x = 0, \forall x \in I \end{cases}$$

2. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1

Trong đoạn này, một số phương pháp giải phương trình vi phân cấp 1 được trình bày. Mục đích của đoạn này chỉ là **giới thiệu** phương pháp, do đó có một số chỗ lý luận chưa đúng nhưng chúng tôi vẫn lướt qua. Chẳng hạn, việc chia hai vế của phương trình cho một đại lượng (đại lượng này có thể bằng 0) là không đúng về lý luận. Chúng tôi sẽ bổ sung các chỗ lý luận chưa đúng trong các đoạn sau.

2.1. Phương trình tách biến

Phương trình sau được gọi là phương trình tách biến : $h(y)y' = g(x)$

Dạng này có thể viết dưới các hình thức sau

$$h(y) \frac{dy}{dx} = g(x) ; \quad h(y) dy = g(x) dx ; \quad h(y) dy + f(x) dx = 0.$$

2.1.1. Phương pháp giải

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được $\int h(y) dy = \int g(x) dx$

$$H(y) = G(x) + C,$$

trong đó H là nguyên hàm của h và G là nguyên hàm của g.

Phương trình trên không còn chứa đạo hàm của y, nghiệm y của phương trình vi phân được xác định bởi phương trình này.

2.1.2. Thí dụ.

Hãy giải phương trình $y' = 5x^2$ trên $\mathbb{R}$

Lời giải : Lấy nguyên hàm hai vế ta được nghiệm tổng quát như sau $y = \frac{5}{3} x^3 + C$.

2.1.3. Thí dụ.

Hãy giải phương trình vi phân $y^2 y' = x - 5$ trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Lấy tích phân hai vế ta được $\int y^2 y' dx = \int (x - 5) dx$

$$\int y^2 dy = \int (x - 5) dx$$

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} - 5x + C$$

$$y = \left(\frac{3x^2}{2} - 15x + 3C \right)^{1/3}$$

Ta thấy $3C$ là hằng số tùy ý vì C là hằng số tùy ý, do đó ta viết hằng số K thay cho $3C$.
Nghiệm tổng quát của phương trình trên $\mathbb{R}$ là

$$y = \left(\frac{3x^2}{2} - 15x + K \right)^{1/3} \quad \text{với } K \text{ là hằng số tùy ý.}$$

2.1.4. Thí dụ

Hãy giải phương trình $xy' = y^2 + 1$ trên $(0, +\infty)$.

Lời giải.

Chuyển vế của x và $y^2 + 1$ để đưa về dạng phương trình tách biến

$$\frac{1}{y^2 + 1} y' = \frac{1}{x}.$$

Lấy tích phân hai vế

$$\int \frac{1}{y^2 + 1} dy = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\arctg y = \ln |x| + C, \quad \text{với } C \text{ là hằng số.}$$

Suy ra $y = \operatorname{tg}(\ln |x| + C)$

2.1.5. Thí dụHãy giải phương trình $y' = x^2 y^3$ trên $\mathbb{R}$.Lời giải.Chuyển về y^2 để đưa về dạng phương trình tách biến

$$\frac{y'}{y^2} = x^2.$$

Lấy tích phân hai vế

$$\int \frac{y'}{y^2} dx = \int x^2 dx$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^3}{3} + C, \text{ với } C \text{ là hằng số.}$$

$$y = -\frac{3}{x^3 + 3C}$$

$$y = -\frac{3}{x^3 + k} \quad \text{với } k \text{ là hằng số.} \quad (*)$$

Chú thích

Phương trình trên có dạng $y'(x) = a(x) b(y)$. Phương trình này có một nghiệm đặc biệt là hàm hằng $y \equiv y_0$, trong đó y_0 là số thỏa $b(y_0) = 0$. Khi chuyển phương trình $y'(x) = a(x) b(y)$ qua dạng tách

biến $\frac{1}{b(y)} y'(x) = a(x)$, nghiệm $y \equiv y_0$ thường bị mất.

Hàm $y \equiv 0$ là một nghiệm của phương trình $y' = x^2 y^3$, nhưng dạng (*) không chứa hàm này.

Bài tập: Từ bài tập 1 tới bài tập 25 (ở cuối chương 1).

2.2. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Sau đây là định lý về nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 thuần nhất.

2.2.1 Định lý

Cho phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 thuần nhất

$$y' + p(x)y = 0,$$

trong đó p là hàm liên tục trên khoảng $I \subset \mathbb{R}$.

Gọi P là một nguyên hàm của $p(x)$

Khi đó, nghiệm tổng quát của phương trình vi phân trên khoảng I là

$$y(x) = Ce^{-P(x)},$$

trong đó C là hằng số tùy ý.

Chứng minh

Giả sử P là một nguyên hàm của p .

Nhân hai vế phương trình vi phân cho $e^{P(x)}$, ta được

$$e^{P(x)} y'(x) + p(x) e^{P(x)} y(x) = 0$$

$$(e^{P(x)} y(x))' = 0$$

$$e^{P(x)} y(x) = C \text{ với } C \text{ là hằng số}$$

Vậy

$$y(x) = Ce^{-P(x)}$$

– Chú thích:

Phương trình $y' + p(x)y = 0$ có dạng $y'(x) = a(x) b(y)$ và có thể giải bằng phương pháp tách biến như ví dụ 2.1.5.

2.2.2 Định lý

Cho phương trình vi phân vi phân tuyến tính cấp 1

$$y' + p(x)y = q(x)$$

trong đó p, q là các hàm liên tục theo x trên khoảng I .

Gọi P là một nguyên hàm của $p(x)$

Nghiệm tổng quát của phương trình này trên khoảng I là

$$y(x) = e^{-P(x)} \int e^{P(x)} q(x) dx$$

Chú thích: Nghiệm có thể ghi dưới dạng sau

$$y(x) = e^{-P(x)} F(x) \text{ với } F(x) = \int e^{P(x)} q(x) dx$$

hay $y(x) = e^{-P(x)} (F_1(x) + C)$ với F_1 là một nguyên hàm của $(e^{P(x)} q(x))$.

Chứng minh

Giả sử P là một nguyên hàm của p .

Nhân hai vế phương trình vi phân cho $e^{P(x)}$, ta được

$$e^{P(x)} y'(x) + p(x) e^{P(x)} y(x) = e^{P(x)} q(x)$$

$$\text{hay } (e^{P(x)} y(x))' = e^{P(x)} q(x)$$

$$e^{P(x)} y(x) = \int e^{P(x)} q(x) dx$$

$$\text{Vậy } y(x) = e^{-P(x)} \int e^{P(x)} q(x) dx$$

Chú thích:

— Hàm số $\mu(x) = e^{P(x)}$ được gọi là thừa số tích phân.

— Định lý 2.2.1 là trường hợp đặc biệt định lý 2.2.2. Thay vì chứng minh trực tiếp định lý 2.2.1, ta có thể áp dụng định lý 2.2.2 để chứng minh định lý 2.2.1

$$y(x) = e^{-P(x)} \int e^{P(x)} q(x) dx = e^{-P(x)} \int 0 dx = e^{-P(x)} \cdot C$$

2.2.3. Thí dụ. Hãy tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân

$$y' - xy = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải.

Phương trình này có dạng tuyến tính $y' + p(x)y = q(x)$ với $p(x) = -x$ và $q(x) = x$.

$$\text{— Ta có } \int p(x) dx = -\int x dx = -\frac{x^2}{2} + C_1.$$

Chọn $P(x) = -\frac{x^2}{2}$ thì P là một nguyên hàm của p .

$$\text{— Ta có } e^{P(x)} = e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ và } e^{-P(x)} = e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\text{— Ta có } F(x) = \int e^{P(x)} q(x) dx = \int e^{-\frac{x^2}{2}} x dx = -e^{-\frac{x^2}{2}} + C$$

— Vậy nghiệm tổng quát trên $\mathbb{R}$ của phương trình vi phân là

$$y(x) = e^{-P(x)} F(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \left(-e^{-\frac{x^2}{2}} + C \right) = -1 + C e^{\frac{x^2}{2}}, \text{ với } C \text{ là hằng số.}$$

2.2.4. Thí dụ.

Hãy tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân

$$\frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x^2} - x \cos x = 0, \quad \forall x \in (0, +\infty).$$

Lời giải.

$$\text{Phương trình tương đương là } y' - \frac{2}{x} y = x^2 \cos x, \quad \forall x \in (0, +\infty).$$

Phương trình này có dạng tuyến tính $y' + p(x)y = q(x)$.

$$\text{— Ta có } \int p(x) dx = \int -\frac{2}{x} dx = -2 \ln |x| + C_1.$$

Chọn $P(x) = -2 \ln |x| = \ln(x^{-2})$ thì P là một nguyên hàm của p .

$$\text{— Khi đó } e^{P(x)} = e^{\ln(x^{-2})} = x^{-2} \text{ và } e^{-P(x)} = e^{2 \ln |x|} = x^2$$

$$\text{— Ta có } F(x) = \int e^{P(x)} q(x) dx = \int x^{-2} x^2 \cos x dx = \int \cos x dx = \sin x + C, \text{ với } C \text{ là hằng số.}$$

— Vậy nghiệm tổng quát trên $\mathbb{R}$ của phương trình vi phân là

$$y(x) = e^{-P(x)} F(x) = x^2 (\sin x + C) = x^2 \sin x + Cx^2.$$

2.2.5. Định lý Cho bài toán điều kiện đầu như sau

$$\begin{cases} y' + p(x)y = q(x), & \forall x \in \mathbb{R} \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

trong đó p và q là các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$, x_0 và y_0 là các hằng số cho trước tùy ý.
 Khi đó, bài toán có một nghiệm y duy nhất.

Chứng minh

Giả sử P là một nguyên hàm của p .

Theo định lý 2.2.2, nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y' + p(x)y = q(x)$ là

$$y(x) = e^{-P(x)} (F_1(x) + C)$$

với F là một nguyên hàm của $(e^{P(x)} q(x))$

Dựa vào điều kiện đầu $y(x_0) = y_0$, ta xác định hằng số C như sau:

$$y(x_0) = e^{-P(x_0)} (F_1(x_0) + C) \Leftrightarrow C = y(x_0)e^{P(x_0)} - F_1(x_0).$$

Hằng số C được xác định duy nhất nên nghiệm y được xác định duy nhất. Vậy bài toán trên luôn luôn có một nghiệm duy nhất.

Bài tập: Từ bài tập 26 tới bài 45 (ở cuối chương 1)

2.3. Phương trình vi phân toàn phần

– Phương trình $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

hay $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$

được gọi là phương trình vi phân toàn phần nếu tồn tại hàm hai biến F thỏa

$$dF(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy.$$

- Khi đó phương trình vi phân trở thành

$$dF(x, y) = 0.$$

$$F(x, y) = C \text{ với } C \text{ là hằng số.}$$

– Trong lý thuyết của hàm hai biến, ta có công thức

$$dF(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)dy.$$

$$\text{và} \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)$$

Từ đó, ta có định lý sau

2.3.1 Định lý

Cho phương trình vi phân $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$.

Giả sử các đạo hàm riêng cấp 1 của M và N liên tục trên miền D của $\mathbb{R}^2$

$$\text{và} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Khi đó:

a) Tồn tại hàm hai biến F trên D thỏa

$$dF(x, y) = Mdx + Ndy.$$

b) Phương trình vi phân trên trở thành

$$F(x, y) = C \text{ với } C \text{ là hằng số.}$$

2.2.2 Phương pháp giải

Khi gặp phương trình $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$,

$$\text{có} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

ta sẽ tìm biểu thức của F dựa vào

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = M \\ \frac{\partial F}{\partial y} = N \end{cases}$$

Sau đó kết luận $F(x, y) = C$.

2.3.3 Thí dụ. Hãy tìm nghiệm tổng quát trên khoảng (a, b) của phương trình vi phân $y - 3x^2 + (x - 1)y' = 0$. Biết rằng khoảng (a, b) không chứa 1.

Lời giải

Ta có $(y - 3x^2)dx + (x - 1)dy = 0$ hay $M dx + N dy = 0$,
trong đó $M = y - 3x^2$ và $N = x - 1$.

Dễ thấy N và M có các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trên $\mathbf{R}^2$.

Đồng thời ta có $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ (vì cùng bằng 1).

Do đó tồn tại hàm F xác định trên $\mathbf{R}^2$ thỏa

$$dF(x, y) = (y - 3x^2)dx + (x - 1)dy$$

– Ta xác định F như sau

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = y - 3x^2 & (*) \\ \frac{\partial F}{\partial y} = x - 1 & (**) \end{cases}$$

$(**) \Rightarrow F(x, y) = (x - 1)y + g(x)$ và $F(x, 0) = g(x)$.

Kết hợp với $(*)$ ta có

$$g'(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, 0) = -3x^2 \Rightarrow g(x) = -x^3 + k, \text{ với } k \text{ là hằng số.}$$

Chọn $k = 0$, ta được $F(x, y) = (x - 1)y - x^3$.

– Vậy phương trình vi phân ban đầu tương đương với

$$(x - 1)y - x^3 = C.$$

Bài tập: Từ bài tập 46 tới bài tập 59 (ở cuối chương 1).

2.4. Phương trình vi phân đẳng cấp (thuần nhất).

Phương trình vi phân $y' = h\left(\frac{y}{x}\right)$, với h là hàm theo một biến $u = \frac{y}{x}$, được gọi là phương trình vi phân đẳng cấp.

Chú thích

– Hàm $f(x, y)$ được gọi là hàm thuần nhất bậc k nếu $f(tx, ty) = t^k f(x, y)$ với mọi số thực t .

Thí dụ : $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + 5y^2$ là hàm thuần nhất bậc 2.

– Nếu M và N là các hàm số thuần nhất có cùng bậc k thì phương trình sau là phương trình vi phân đẳng cấp :

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0.$$

2.4.1. Phương pháp giải. Phương pháp giải phương trình $y' = h\left(\frac{y}{x}\right)$ như sau:

Bước 1 (đổi biến)

Đặt $u = \frac{y}{x}$ thì $y = ux$ và $y' = u'x + u$.

Khi đó, phương trình vi phân trở thành

$$u'x + u = h(u)$$

$$xu' = h(u) - u$$

Bước 2 (tách biến)

$$\frac{u'}{h(u) - u} = \frac{1}{x}.$$

$$\int \frac{1}{h(u) - u} du = \int \frac{1}{x} dx.$$

Phương trình sẽ có dạng sau

$$H(u) = \ln|x| + C$$

$$H\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|x| + C.$$

2.4.2. Ví dụ. Hãy giải phương trình vi phân $y' = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}$ trên miền $(1, +\infty)$.

Lời giải

Phương trình vi phân tương đương là

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x}$$

Đặt $u = \frac{y}{x}$ thì $y = ux$ và $y' = u'x + u$.

Phương trình vi phân trở thành

$$u'x + u = u^2 + 2u$$

$$xu' = u^2 + u$$

$$\frac{u'}{u^2 + u} = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{1}{u^2 + u} du = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right) du = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln|u| - \ln|u+1| = \ln|x| + \ln|C|, \text{ với } C \text{ là hằng số tùy ý.}$$

$$\ln\left|\frac{u}{u+1}\right| = \ln|Cx|$$

$$\frac{u}{u+1} = \pm Cx$$

$$\frac{u}{u+1} = kx, \text{ với } k \text{ là hằng số tùy ý.}$$

$$\frac{\frac{y}{x}}{\frac{y}{x} + 1} = kx$$

$$\frac{y}{y+x} = kx$$

$$(1-kx)y = kx^2$$

$$y = \frac{kx^2}{1-kx} \quad (*)$$

Chú thích: Kết quả (*) chưa hoàn chỉnh

Bài tập: Từ bài tập 60 tới bài tập 70 (ở cuối chương 1).

2.5. Đạo hàm là hàm số theo biến $ax + by$

Xét phương trình vi phân có dạng

$$y' = h(ax + by),$$

trong đó a và b là hằng số khác 0.

2.5.1. Phương pháp giải

Đặt $u = ax + by$, ta có

$$u' = a + by' \text{ hay } y' = \frac{u'-a}{b}.$$

Phương trình $y' = h(ax + by)$ trở thành

$$\frac{u' - a}{b} = h(u)$$

$$u' = a + bh(u)$$

Đưa về phương trình vi phân dạng tách biến

$$\frac{u'}{a + bh(u)} = 1$$

$$\int \frac{1}{a + bh(u)} du = x + C$$

$$H(u) = x + C$$

$$H(ax+by) = x + C$$

2.5.2. Thí dụ. Hãy giải phương trình vi phân $y' = x - y + 1 + \frac{1}{y - x}$.

Lời giải.

Đặt $u = y - x$, ta có

$$u' = y' - 1 \text{ hay } y' = u' + 1$$

Phương trình vi phân trên trở thành

$$u' + 1 = u + 1 + \frac{1}{u}$$

$$\text{hay } u' = u + \frac{1}{u}$$

$$\frac{u}{u^2 + 1} u' = 1 \quad \text{hay} \quad \frac{u}{u^2 + 1} du = dx$$

$$\int \frac{u}{u^2 + 1} du = \int dx \quad \text{hay} \quad \frac{1}{2} \int \frac{2u}{u^2 + 1} du = \int dx$$

$$\frac{1}{2} \ln|u^2 + 1| = x + k, \quad \text{với } k \text{ là hằng số tùy ý.}$$

$$\ln(u^2 + 1) = 2x + 2k$$

$$u^2 + 1 = e^{2x+2k} = e^{2k} e^{2x}.$$

$$u^2 + 1 = Ce^{2x} \quad \text{với } C \text{ là hằng số dương tùy ý.}$$

$$(y-x)^2 + 1 = Ce^{2x}$$

Bài tập: Từ bài tập 71 tới bài tập 75 (ở cuối chương 1).

2.6. Phương trình vi phân Bernoulli

Xét phương trình có dạng

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n,$$

trong đó P, Q là các hàm số liên tục trên khoảng (a, b) và n là số thực.

Phương trình này được gọi là phương trình vi phân Bernoulli.

2.6.1. Phương pháp giải

• Trường hợp $n = 0$ hay $n = 1$: Phương trình trên có dạng là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1. Phương pháp giải đã trình bày trong đoạn 2.3.

• Trường hợp $n \neq 0$ và $n \neq 1$:

Xét $y' + P(x)y = Q(x)y^n$

$$y^{-n}y' + P(x)y^{1-n} = Q(x)$$

Đặt $u = y^{1-n}$ thì $u' = (1-n)y^{-n}y'$. Khi đó, phương trình trên trở thành

$$\frac{1}{1-n} u' + P(x)u = (1-n)Q(x)$$

$$u' + (1-n)P(x)u = (1-n)Q(x)$$

Ta đã đưa về dạng phương trình vi phân tuyến tính cấp 1, phương pháp giải của phương trình này đã được trình bày trong đoạn 2.3.

2.6.2. Thí dụ. Hãy giải phương trình vi phân $y' - 5y = -\frac{5}{2}xy^3$ trên R.

Lời giải

Chia 2 vế cho y^3 , ta được

$$y^{-3}y' - 5y^{-2} = -\frac{5}{2}x.$$

Đặt $u = y^{-2}$ thì $u' = -2y^{-3}y'$. Phương trình trên trở thành

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}u' - 5u &= -\frac{5}{2}x \\ u' + 10u &= 5x \end{aligned}$$

Phương trình này có dạng phương trình vi phân tuyến tính cấp 1, ta tìm được

$$\begin{aligned} u &= \frac{x}{2} - \frac{1}{20} + Ce^{-10x} \\ \frac{1}{y^2} &= \frac{x}{2} - \frac{1}{20} + Ce^{-10x} \quad (*). \end{aligned}$$

Chú thích: $y=0$ là một nghiệm của phương trình vi phân nhưng (*) không chứa nghiệm này.

Bài tập: Từ bài tập 76 tới bài tập 80 (ở cuối chương 1).

2.7. Một dạng phương trình đưa về dạng đẳng cấp

Xét phương trình vi phân dạng $y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$

2.7.1. Phương pháp giải

α) Trường hợp $a_1b_2 = a_2b_1$.

Lúc đó tồn tại hằng số k thỏa $a_1 = ka_2$ và $b_1 = kb_2$.

Do đó $y' = \frac{k(a_2x + b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} = h(a_2x + b_2y)$

Ta thấy y' là hàm số theo biến $u = a_2x + b_2y$, phương pháp giải phương trình dạng này đã trình bày trong đoạn 2.5.

β) Trường hợp $a_1b_2 \neq a_2b_1$

• Nếu $c_1 = c_2 = 0$, phương trình vi phân trên trở thành

$$y' = \frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y} \Leftrightarrow y' = \frac{a_1 + b_1 \frac{y}{x}}{a_2 + b_2 \frac{y}{x}}.$$

Phương trình này có dạng phương trình đẳng cấp, phương pháp giải như trong đoạn 2.4.

• Nếu $c_1 \neq 0$ hay $c_2 \neq 0$, gọi (h, k) là nghiệm số của hệ phương trình bậc nhất

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

Như thế, (h, k) thỏa $\begin{cases} a_1h + b_1k + c_1 = 0 \\ a_2h + b_2k + c_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -a_1h - b_1k \\ c_2 = -a_2h - b_2k \end{cases}$.

Khi đó $\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} = \frac{a_1x + b_1y - a_1h - b_1k}{a_2x + b_2y - a_2h - b_2k} = \frac{a_1(x-h) + b_1(y-k)}{a_2(x-h) + b_2(y-k)}.$

Đặt $X = x - h$ và $Y = y - k$ ta được $y' = \frac{a_1(x-h) + b_1(y-k)}{a_2(x-h) + b_2(y-k)} \Leftrightarrow \frac{dY}{dX} = \frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}$

Phương trình có dạng phương trình đẳng cấp, phương pháp giải đã được trình bày trong đoạn 2.4.

2.7.2. Thí dụ Hãy giải phương trình vi phân $(x + y + 2)y' = 3x - y - 6$ trên R.

Lời giải.

Giả sử $x+y+2 \neq 0$.

Hệ phương trình $\begin{cases} 3x - y - 6 = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases}$ có nghiệm là $\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$

Đặt $X = x - 1$ và $Y = y + 3$ thì $\frac{dY}{dX} = \frac{dy}{dx}$. Khi đó, phương trình trở thành

$$y' = \frac{3(x-1) - (y+3)}{(x-1) + (y+3)} \Leftrightarrow \frac{dY}{dX} = \frac{3X - Y}{X + Y}$$

Theo phương pháp giải phương trình vi phân dạng đẳng cấp, ta đặt u là hàm số thỏa $Y = uX$.

Từ $Y = uX$, ta suy ra $\frac{dY}{dX} = \frac{du}{dX} X + u$.

Chuyển Y qua u , phương trình vi phân trở thành

$$X \frac{du}{dX} + u = \frac{3-u}{1+u}$$

$$X \frac{du}{dX} = \frac{3-u}{1+u} - u$$

$$X \frac{du}{dX} = \frac{-u^2 - 2u + 3}{u+1} \quad (\text{phương trình có dạng tách biến}).$$

$$\frac{u+1}{u^2 + 2u - 3} du = -\frac{1}{X} dX$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{2(u+1)}{u^2 + 2u - 3} du = -\int \frac{1}{X} dX$$

$$\frac{1}{2} \ln |u^2 + 2u - 3| = -\ln |X| + C_1, \text{ với } C_1 \text{ là hằng số.}$$

$$\ln |u^2 + 2u - 3| = -2\ln |X| + \ln C_2 \quad (\text{với } C_2 = e^{2C_1})$$

$$\ln |u^2 + 2u - 3| = \ln |C_2 X^{-2}|$$

$$u^2 + 2u - 3 = \pm C_2 X^{-2}$$

$$\left(\frac{y+3}{x-1}\right)^2 + 2\frac{y+3}{x-1} - 3 = C \frac{1}{(x-1)^2} \quad (\text{với } C \text{ là hằng số})$$

$$(y+3)^2 + 2(x-1)(y+3) - 3(x-1)^2 = C$$

Bài tập: Bài tập 81 và bài tập 82 (ở cuối chương 1).

2.8. Phương trình có thể đưa về dạng vi phân toàn phần.

Phương pháp này luộm thuộm, chỉ nên áp dụng khi các phương pháp khác thất bại.

– Xét phương trình $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ hay phương trình $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$,

trong đó $\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) \neq \frac{\partial N}{\partial x}(x, y)$.

Phương trình trên chưa là phương trình vi phân toàn phần. Ta sẽ biến đổi và đưa về dạng phương trình vi phân toàn phần như trong đoạn 2.3.

Ta sẽ dùng ký hiệu M_y thay cho $\frac{\partial M}{\partial y}$, và dùng ký hiệu N_x thay cho $\frac{\partial N}{\partial x}$.

2.8.1. Phương pháp giải.

Xét phương trình vi phân $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ với $M_y \neq N_x$.

Nhân hai vế của phương trình cho một hàm $\mu(x, y)$ (luôn khác 0 trên miền đang xét), ta được

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0 \quad (*)$$

Hàm μ được chọn sao cho (*) có dạng phương trình vi phân toàn phần.

Hàm μ trong phương pháp này được gọi là thừa số tích phân.

Sau đây là định lý liên quan tới việc chọn thừa số tích phân μ .

2.8.2. Định lý

Xét phương trình vi phân $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ và $M_y \neq N_x$. Khi đó:

a) Nếu $\left(\frac{M_y - N_x}{N}\right)$ liên tục và chỉ phụ thuộc x (không phụ thuộc y), khi đó một thừa số tích phân

$$\text{của phương trình trên là } \mu(x) = \exp\left(\int \frac{M_y - N_x}{N} dx\right)$$

(hằng số xuất hiện khi tính nguyên hàm được chọn tùy ý và thường được chọn bằng 0).

b) Nếu $\left(\frac{N_x - M_y}{M}\right)$ liên tục và chỉ phụ thuộc y (không phụ thuộc x), khi đó một thừa số tích phân

$$\text{của phương trình trên là } \mu(y) = \exp\left(\int \frac{N_x - M_y}{M} dy\right)$$

(hằng số xuất hiện khi tính nguyên hàm được chọn tùy ý và thường được chọn bằng 0).

Chứng minh

Ta thấy $\mu Mdx + \mu Ndy$ là vi phân toàn phần nếu 2 tính chất sau đúng:

i) Các đạo hàm riêng phần cấp 1 của μM , μN liên tục

$$\text{ii) } \frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$$

Tính chất (i) thường thường đúng. Sau đây ta tìm cách chọn μ dựa vào tính chất (ii).

Hệ thức (ii) tương đương với

$$\mu_y M + \mu M_y = \mu_x N + \mu N_x$$

$$\mu_y M - \mu_x N = \mu(N_x - M_y)$$

(**)

Việc xác định μ dựa vào (*) thường khó khăn, do đó người ta chỉ xét hai trường hợp đặc biệt như sau:

• Trường hợp $\mu_y = 0$ (tức hàm μ chỉ phụ thuộc 1 biến x).

Phương trình (**) trở thành phương trình vi phân với hàm cần tìm là μ

$$0 - \mu_x N = \mu(N_x - M_y) \Leftrightarrow \mu_x = \mu \frac{M_y - N_x}{N}$$

Phương trình trên có dạng phương trình vi phân tuyến tính cấp 1, theo kết quả trong đoạn 2.3 thì một nghiệm của phương trình này là $\mu(x) = \exp\left(\int \frac{M_y - N_x}{N} dx\right)$.

Giả sử $\frac{M_y - N_x}{N}$ chỉ phụ thuộc biến x (không phụ thuộc biến y). Khi đó ta chọn

$$\mu(x) = \exp\left(\int \frac{M_y - N_x}{N} dx\right), \text{ dễ thấy } \mu \text{ thỏa phương trình (**).}$$

Tính chất (a) của định lý đã được chứng minh.

• Trường hợp $\mu_x = 0$ (tức hàm μ chỉ phụ thuộc 1 biến y). Từ (*) ta có $\mu_y M = \mu(N_x - M_y)$

Phương trình (**) trở thành phương trình vi phân với hàm cần tìm là μ

$$\mu_y M - 0 = \mu(N_x - M_y) \Leftrightarrow \mu_y = \mu \frac{N_x - M_y}{M}$$

Phương trình trên có dạng phương trình vi phân tuyến tính cấp 1, theo kết quả trong đoạn 2.2 thì một nghiệm của phương trình này là $\mu(y) = \exp\left(\int \frac{N_x - M_y}{M} dy\right)$.

Giả sử $\frac{N_x - M_y}{M}$ chỉ phụ thuộc biến y (không phụ thuộc biến x). Khi đó ta chọn

$$\mu(y) = \exp\left(\int \frac{N_x - M_y}{M} dy\right), \text{ dễ thấy } \mu \text{ thỏa phương trình (**).}$$

Tính chất (b) của định lý đã được chứng minh.

2.8.3. Thí dụ Hãy giải phương trình vi phân $y(1 + xy) - xy' = 0$ trên miền $(0, +\infty)$.

Lời giải

– Phương trình vi phân có dạng $M + Ny' = 0 \Leftrightarrow Mdx + Ndy = 0$, với $M = y(1 + xy)$ và $N = -x$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} M_y = \frac{\partial}{\partial y}(y + xy^2) = 1 + 2xy \\ N_x = \frac{\partial}{\partial x}(-x) = -1 \end{cases}$$

Do $M_y \neq N_x$ nên ta sẽ tìm thừa số tích phân μ .

Ta có $M_y - N_x = (1 + 2xy) - (-1) = 2(1 + xy)$. Chia biểu thức này lần lượt cho M và N, ta thấy việc chia cho M cho ra kết quả đặc biệt.

$$\text{Ta có } \frac{M_y - N_x}{M} = \frac{2(1 + xy)}{y(1 + xy)} = \frac{2}{y} \Rightarrow \frac{N_x - M_y}{M} = \frac{-2}{y} \quad (\text{chỉ chứa biến } y, \text{ không chứa } x).$$

$$\text{Chọn thừa số tích phân } \mu(y) = \exp\left(\int \frac{-2}{y} dy\right) = e^{-2\ln|y|+k} = \frac{1}{y^2} \quad (k \text{ được chọn bằng } 0).$$

– Nhân hai vế của phương trình ban đầu cho $\frac{1}{y^2}$ ta được phương trình dạng vi phân toàn phần

$$\frac{1 + xy}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy = 0$$

Dựa vào

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{1 + xy}{y} \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = -\frac{x}{y^2} \end{cases},$$

$$\text{ta tìm được } F(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2}.$$

Phương trình vi phân trở thành

$$dF(x, y) = 0 \Leftrightarrow F(x, y) = C_1 \Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = C_1$$

2.8.4. Thí dụ Hãy giải phương trình vi phân $(2x^2 + y)dx + (x^2y - x)dy = 0$ trên miền $(0, +\infty)$.

Lời giải

– Phương trình vi phân có dạng $Mdx + Ndy = 0$ với $M = 2x^2 + y$ và $N = x^2y - x$.

$$\text{Ta có } M_y = \frac{\partial}{\partial y}(2x^2 + y) = 1 \quad \text{và} \quad N_x = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y - x) = 2xy - 1.$$

Do $M_y \neq N_x$ nên ta sẽ tìm thừa số tích phân μ .

Ta có $M_y - N_x = 1 - (2xy - 1) = 2(1 - xy)$. Chia biểu thức này lần lượt cho M và N, ta thấy việc chia cho N cho ra kết quả đặc biệt.

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{2(1 - xy)}{x(xy - 1)} = \frac{-2}{x}$$

$$\text{Chọn } \mu(x) = \exp\left(\int \frac{-2}{x} dx\right) = \exp(-2\ln|x|) = x^{-2}.$$

(hằng số xuất hiện khi tính nguyên hàm đã được chọn bằng 0).

– Nhân hai vế của phương trình vi phân ban đầu cho $\frac{1}{x^2}$ ta được phương trình dạng vi phân toàn

$$\text{phần như sau:} \quad \left(2 + \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(y - \frac{1}{x}\right)dy = 0.$$

$$\text{Dựa vào } \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 2 + \frac{y}{x^2} \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = y - \frac{1}{x} \end{cases},$$

ta tìm được $F(x, y) = 2x - \frac{y}{x} + \frac{y^2}{2}$

Phương trình vi phân trở thành

$$dF(x, y) = 0 \Leftrightarrow F(x, y) = C$$

$$\Leftrightarrow 2x - \frac{y}{x} + \frac{y^2}{2} = C \quad \text{với } C \text{ là hằng số.}$$

Bài tập: Bài tập 83 và bài tập 84 (ở cuối chương 1).

3. PHƯƠNG TRÌNH ĐÃ GIẢI RA ĐỐI VỚI ĐẠO HÀM

3.1 Giới thiệu bài toán điều kiện đầu.

Cho (x_0, y_0) thuộc một miền D trong $\mathbb{R}^2$. Hàm f là hàm hai biến xác định trên miền D . Bài toán (P) được quan tâm trong đoạn này là tìm nghiệm của phương trình vi phân

$$y' = f(x, y) \quad (3.1.a)$$

và nghiệm này thỏa điều kiện đầu

$$y(x_0) = y_0 \quad (3.1.b)$$

– Nghiệm y là hàm thực theo biến x và xác định trên một khoảng I nào đó trong $\mathbb{R}$.

– Ý nghĩa hình học của điều kiện đầu $y(x_0) = y_0$ là đường cong tích phân qua điểm (x_0, y_0) .

Chú thích: – Miền D trong chương này được hiểu là tập mở liên thông trong $\mathbb{R}^2$.

– Phương trình (3.1a) được gọi là **phương trình đã giải ra đối với đạo hàm**.

– Bài toán đòi hỏi đường biểu diễn của nghiệm qua một điểm cho trước như trong bài toán (P) được gọi là bài toán Cauchy.

3.2. Định lý về sự tồn tại duy nhất nghiệm

3.2.1 Định lý

Xét bài toán

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (P)$$

Giả sử

i) D là hình chữ nhật $[x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$, với a và b là các số dương.

ii) Hàm hai biến f liên tục trên D .

iii) Đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial y}$ tồn tại và liên tục trên D .

Khi đó, bài toán trên có nghiệm duy nhất $y = y(x)$ trên đoạn $x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$,

trong đó $\delta = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$ với M là một chặn trên của f trên D .

3.2.2 Chú thích

Do D là tập đóng và bị chặn trong $\mathbb{R}^2$, đồng thời f liên tục trên D nên chặn trên M tồn tại (hữu hạn).

Bài tập: Bài tập 85 (ở cuối chương 1).

Bài tập: Bài tập 86 tới 104

Bài tập: Từ bài tập 105 tới bài tập 118 chỉ dành cho sinh viên giỏi.

3.3 Ý nghĩa hình học của bài toán (P) trong 3.1

Tại mỗi điểm trong miền D , tồn tại một đoạn thẳng nhận điểm đó là trung điểm và có hệ số góc là $f(x, y)$. Tập hợp tất cả các đoạn thẳng này được gọi là **trường hướng** đối với đường cong tích phân. Nếu đường cong tích phân qua điểm (x, y) thì đạo hàm tại đó bằng $f(x, y)$, tức đường cong tích phân tiếp xúc với đoạn thẳng của trường hướng.

Đường cong tích phân ứng với bài toán (P) là đường cong qua điểm (x_0, y_0) và tiếp xúc đoạn thẳng của trường hướng tại mỗi điểm mà đường cong này đi qua.

3.4 Phương pháp đồ thị

Xét bài toán (P) trên miền D như trong đoạn 3.1:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Phương pháp đồ thị được dùng để vẽ đường cong tích phân mà không cần giải ra nghiệm $y = y(x)$.

Phương pháp này gồm các bước sau:

a) Vẽ các điểm (x, y) phân bố đều trong miền D với mật độ càng cao càng tốt, tập hợp các điểm này được gọi là tập V. Tại mỗi điểm (x, y) của tập V, ta vẽ một đoạn thẳng ngắn có hệ số góc là $f(x, y)$, đoạn thẳng này đặc trưng cho trường hướng tại điểm (x, y) . Các đoạn thẳng này cho ta hình ảnh một trường hướng.

b) Từ (x_0, y_0) , vẽ đường cong liên tục sao cho tính chất sau được thỏa:

Tại các điểm thuộc tập V mà đường cong đi qua, đường cong tiếp xúc với đoạn thẳng đặc trưng cho trường hướng tại điểm đó.

Bài tập:

Xét bài toán (P) $\begin{cases} y' = x - y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

- Hãy dùng phương pháp đồ thị để vẽ đường cong tích phân của bài toán trên.
- Hãy giải bài toán này dựa theo định lý về phương trình vi phân cấp 1 tuyến tính.

BÀI TẬP CHƯƠNG 1Hãy tìm nghiệm của phương trình vi phân bằng phương pháp tách biến

1) $\frac{dy}{dx} = 2xy$

Đáp số: $y = ke^{x^2}$

2) $\frac{dy}{dx} = 3x^2 e^{-y}, y(0) = 2$

Đáp số: $y = \ln(x^3 + e^2)$

Chú thích: Miền xác định của nghiệm trên là $\left(-e^{\frac{2}{3}}; +\infty\right)$

3) $\frac{dy}{dx} = 2x(y^2 + 1)$

Đáp số: $y = \operatorname{tg}(x^2 + C)$

Chú thích: Hàm số ở đáp số không xác định khi $x^2 + C = k \frac{\pi}{2}$

4) $(1+x)dy - ydx = 0$

Đáp số: $y = C(1+x)$

5) $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$

Đáp số: $x^2 + y^2 = C^2$

6) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}; y(4) = -3$

Đáp số: $y = -\sqrt{25 - x^2}; -5 < x < 5$

7) $\frac{dy}{dx} = y^2 - 4$

Đáp số: $y = 2 \frac{1 - ce^{4x}}{1 + ce^{4x}}$

8) $(e^{2y} - y) \cos x \frac{dy}{dx} = e^y \sin 2x, y(0) = 0$

Đáp số: $e^y + ye^{-y} + e^{-y} = 4 - 2\cos x$

9) $\frac{dx}{dt} = te^t$

Đáp số: $x = -\ln\left(c - \frac{t^2}{2}\right)$

10) $\frac{dy}{dt} + 4y = y(e^{-t} + 4)$

Đáp số: $y = ce^{-(e^{-t})}$

11) $\frac{dx}{dr} = r^2(1+x^2)$

Đáp số: $x = \operatorname{tg}\left(\frac{r^3}{3} + C\right)$

12) $\frac{ds}{dt} + 2s = st^2; s(0) = 1$

Đáp số: $s = e^{\left(\frac{t^3}{3}\right) - 2t}$

13) $x^2 \frac{dy}{dx} + y^2 = 0; y(1) = 3$

Đáp số: $y = \frac{3x}{4x-3}$

14) $yy' = e^x$

Đáp số: $y = \pm \sqrt{2e^x + C}$

15) $e^x(x'+1) = 1; x(0) = 1$

Đáp số: $x = \ln\left(1 - \frac{1-e}{e^t}\right)$

16) $\frac{dy}{dx} = \sin 5x$

Đáp số: $y = -\frac{1}{5} \cos 5x + C$

17) $dx + e^{3x} dy = 0$

Đáp số: $y = \frac{1}{3} e^{-3x} + C$

18) $\frac{dy}{dx} = e^{3x+2y}$

Đáp số: $-3e^{-2y} = 2e^{3x} + C$

19) $(e^y + 1)^2 e^{-y} dx + (e^x + 1)^3 e^{-x} dy = 0$

Đáp số: $(e^x + 1)^{-2} + 2(e^y + 1)^{-1} = C$

$$20) \frac{dy}{dx} = \frac{xy + 3x - y - 3}{xy - 2x + 4y - 8}$$

$$\text{Đáp số: } (y + 3)^5 e^x = c(x + 4)^5 e^y$$

$$21) \frac{dy}{dx} = x\sqrt{1 - y^2}$$

$$\text{Đáp số: } y = \sin\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)$$

$$22) \frac{dx}{dt} = 4(x^2 + 1); x\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\text{Đáp số: } x = \operatorname{tg}\left(4t - \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$23) x^2 \frac{dy}{dx} = y - xy; y(-1) = -1$$

$$\text{Đáp số: } xy = e^{-\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

$$24) \frac{dy}{dx} = \frac{2 + \sin x}{3(y - 1)^2}; y(0) = 2$$

$$\text{Đáp số: } y = 1 + (2x - \cos x + 2)^{\frac{1}{3}}$$

$$25) y' = \frac{x^3 y - y}{y^4 - y^2 + 1}; y(0) = 1$$

$$\text{Đáp số: } y^4 - 2y^2 + 4 \ln|y| = x^4 - 4x - 1$$

Hãy đưa về dạng phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 và tìm nghiệm.

$$26) y' + 3y = 3$$

$$\text{Đáp số: } y = Ce^{-3x}$$

$$27) \frac{dy}{dx} = -2xy; y(1) = 1$$

$$\text{Đáp số: } y = e^{1-x^2}$$

$$28) y' = y + x^2; y(0) = 1$$

$$\text{Đáp số: } y = 3e^x - (x^2 + 2x + 2)$$

$$\text{chú thích } \int x^2 e^{-x} dx = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x}$$

$$29) \frac{dx}{dt} = x - 1; x(0) = 1$$

$$\text{Đáp số: } x = 1$$

$$30) \frac{dy}{dx} - 7y = x$$

$$\text{Đáp số: } y = -Ce^{7x} - \frac{x}{7} - \frac{1}{49}$$

$$31) \frac{dy}{dx} - y = x^2 + 2$$

$$\text{Đáp số: } y = Ce^x - x^2 - 2x - 4$$

$$32) \frac{dy}{dx} - 3y = 6$$

$$\text{Đáp số: } y = -2 + Ce^{3x}$$

$$33) x \frac{dy}{dx} - 4y = x^4 e^x$$

$$\text{Đáp số: } y = x^5 e^x - x^4 e^x + cx^4$$

$$34) (x^2 - 9) \frac{dy}{dx} + xy = 0$$

$$\text{Đáp số: } y = \frac{C}{\sqrt{x^2 - 9}}$$

$$35) \frac{dy}{dx} + y = x; y(0) = 4$$

$$\text{Đáp số: } y = x - 1 + 5e^{-x}$$

$$36) \frac{dy}{dx} + y = f(x) \text{ với } f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases} \text{ và } y(0) = 0$$

$$\text{Đáp số: } y = \begin{cases} 1 - e^{-x}; & 0 \leq x \leq 1 \\ (e - 1)e^{-x}; & x > 1 \end{cases}$$

$$37) \frac{dy}{dx} + y = e^{3x}$$

$$\text{Đáp số: } y = \frac{1}{4}e^{3x} + ce^{-x}$$

$$38) x^2 y' + xy = 1$$

$$\text{Đáp số: } y = x^{-1} \ln x + cx^{-1}; x > 0$$

$$39) x \frac{dy}{dx} - y = x^2 \sin x$$

$$\text{Đáp số: } y = cx - x \cos x; x > 0$$

40) $x^2y' + x(x+2)y = e^x$ Đáp số: $y = \frac{1}{2x^2}e^x + \frac{C}{x^2}e^{-x}, x > 0$

41) $ydx - 4(x+y^6)dy = 0$ Đáp số: $x = 2y^2 + cy^2, y > 0$

42) $\cos x \frac{dy}{dx} + (\sin x)y = 1$ Đáp số: $y = \sin x + c \cos x; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

43) $xy' + y = e^x; y(1) = 2$ Đáp số: $y = \frac{e^x}{x} + \frac{2-e}{x}; x > 0$

44) $(x+1)\frac{dy}{dx} + y = \ln x; y(1) = 10$ Đáp số: $(x+1)y = x \ln x - x + 21; x > 0$

45) $L \frac{di}{dt} + Ri = E, \quad i(0) = i_0$ với L, R, E, i_0 là các hằng số

Đáp số: $i = \frac{E}{R} + \left(i_0 - \frac{E}{R}\right)e^{-\frac{Rt}{L}}$

Hãy tìm nghiệm của mỗi phương trình vi phân sau nếu có dạng vi phân toàn phần.

46) $2xydx + (x^2 - 1)dy = 0$ Đáp số $x^2y - y = 0$

47) $[e^{2y} - y \cos(xy)]dx + [2xe^{2y} - x \cos(xy) + 2y]dy = 0$

Đáp số $xe^{2y} - \sin(xy) + y^2 + c = 0$

48) $\frac{dy}{dx} = \frac{xy^2 - \cos x \sin x}{y(1-x^2)}, y(0) = 2$ Đáp số $y^2 - (1-x^2) - \cos^2 x = 3$

49) $(2x + 2y^2) + (4xy + 3y^2)\frac{dy}{dx} = 0$ Đáp số $x^2 + 2xy^2 + y^3 = C$

50) $(2xy + 1) + (x^2 + 4y)y' = 0$ Đáp số $x^2y + x + 2y^2 = C$

51) $(2x + 1 + 2y^2) + (4xy + 3y^2)y' = 0, y(0) = -1$ Đáp số $2xy^2 + y^3 + x^2 + x = -1$

52) $2xy - (4y^2 + xy)y' = 0$ Không có dạng vi phân toàn phần

53) $(e^x + x) + y\frac{dy}{dx} = 0$ Đáp số: $e^x + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$

54) $(x^2 + 4y)y' = 2xy + 1$ Đáp số: Không có dạng vi phân toàn phần

55) $z\frac{dy}{dx} = -t$ Đáp số: $t^2 + z^2 = C$

56) $(x^3 - 3y^2x)\frac{dy}{dx} = y^3 - 3x^2y - y\frac{dy}{dx}$ Đáp số: $x^3y - xy^3 + \frac{y^2}{2} = C$

57) $x \cos(xy)dy + [y \cos(xy) - 2x]dx; y(1) = 2$ Đáp số: $\sin(xy) - x^2 = \sin 2 - 1$

58) $(\sin t + t^2e^y - 3)\frac{dy}{dx} + (y \cos t + 2te^y) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Đáp số: $y \sin t + t^2e^y - 3y = \frac{\pi^2}{4}$

59) $(3t^2x - x^3) - (t^3 + 3x^2t)\frac{dy}{dx} = 0$ Đáp số: không có dạng vi phân toàn phần.

Hãy tìm nghiệm của mỗi phương trình sau nếu nó có dạng phương trình vi phân đẳng cấp.

60) $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y}$ Đáp số: $x^2 - 2xy - y^2 = C$

$$61) x^2 \frac{dy}{dx} = y^2 - xy + x^2; y(1) = 2$$

$$\text{Đáp số: } y = x \left(1 - \frac{1}{\ln|x|-1} \right)$$

$$\text{Hướng dẫn: } (v-1)^{-2} dv = x^{-1} dx \text{ với } v = \frac{y}{x}$$

$$62) y^2 = (xy - x^2) \frac{dy}{dx}$$

$$\text{Đáp số: } \frac{y}{x} - \ln|y| = C$$

$$\text{Hướng dẫn } x \frac{du}{dx} = \frac{u}{u-1} \text{ với } u = \frac{y}{x}$$

$$63) S \frac{dS}{dt} = \frac{t^2 + S^2}{t}; S(2) = 1$$

$$\text{Đáp số: } S(t) = t \left[\ln\left(\frac{t}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Hướng dẫn: } u du = \frac{1}{t} dt \text{ với } u = \frac{S}{t}$$

$$64) x \frac{dy}{dx} = 2y \frac{dy}{dx} + x - 3$$

$$\text{Đáp số: Không có dạng đẳng cấp}$$

$$65) \frac{dy}{dx} = \frac{\cos(xy) - 1}{xy}$$

$$\text{Đáp số: Không có dạng đẳng cấp}$$

$$66) t \frac{dx}{dt} = t + 2x$$

$$\text{Đáp số: } x = ct^2 - t$$

$$67) (x^2 + y^2) dy + 2xy dx = 0$$

$$\text{Đáp số: } y^3 + 3yx^2 = C$$

$$68) \frac{dy}{dx} = \frac{y - 6x}{2x - y}; y(0) = 1$$

$$\text{Đáp số: } (y - 3x)^{\frac{1}{5}} (y + 2x)^{\frac{4}{5}} = 1$$

$$69) x^2 \frac{dy}{dx} - (4x^2 + xy + y^2) = 0; y(1) = -1$$

$$\text{Đáp số: } y = 2x \operatorname{tg} \left[2 \ln|x| + \operatorname{arctg} \left(\frac{-1}{2} \right) \right]$$

$$70) \frac{dN}{dt} = \frac{t - N}{t + N}; N(0) = 2$$

$$\text{Đáp số: } N^2 + 2Nt - t^2 = 4$$

Hãy tìm nghiệm của mỗi phương trình sau nếu có dạng $y' = h(ax + by)$ với a và b là các hằng số.

$$71) \frac{dy}{dx} = (-2x + y)^2 - 7; y(0) = 0$$

$$\text{Đáp số: } y = 2x + \frac{3(1 - e^{6x})}{1 + e^{6x}}$$

$$72) dy - (x + y + 1)^2 dx = 0$$

$$\text{Đáp số: } y = -x - 1 + \operatorname{tg}(x + C)$$

$$73) dy = (2 + \sqrt{y - 2x + 3}) dx$$

$$\text{Đáp số: } 4(y - 2x + 3) = (x + C)^2$$

$$74) \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}^2(x + y)$$

$$\text{Đáp số: } 2y - 2x + \sin 2(x + y) = C$$

$$75) \frac{dy}{dx} = (2x^2 + y)^3 + 1$$

$$\text{Đáp số: Không có dạng } y' = h(ax + by)$$

Hãy tìm nghiệm của mỗi phương trình vi phân sau nếu nó có dạng phương trình vi phân Bernoulli

$$76) x \frac{dy}{dx} + y = x^2 y^2$$

$$\text{Đáp số: } y = \frac{1}{-x^2 + cx}$$

Hướng dẫn: $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = xy^2$ có dạng Bernoulli với $n = 2$

$$77) x \frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{y^2}$$

$$\text{Đáp số: } y^3 = 1 + cx^{-3}$$

$$78) \frac{dy}{dx} = y(xy^3 - 1)$$

$$\text{Đáp số: } y^{-3} = x + \frac{1}{3} + ce^{3x}$$

$$79) t^2 \frac{dy}{dt} + y^2 = ty$$

$$\text{Đáp số: } e^{\frac{1}{y}} = ct$$

$$80) x^2 \frac{dy}{dx} - 2xy = 3y^4; y(1) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Đáp số: } y^{-3} = -\frac{9}{5}x^{-1} + \frac{49}{5}x^{-6}$$

Hãy tìm nghiệm của mỗi phương trình vi phân sau nếu nó có dạng $y' = \frac{a_1x+b_1x+c_1}{a_2x+b_2x+c_2}$ với $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ là các hằng số.

$$81) \frac{dy}{dx} = \frac{4x-3y+13}{x-y+3}; y(0) = 1$$

Hướng dẫn: Đặt $x = t - 4; y = u - 1$

$$\frac{du}{dt} = \frac{4t-3u}{t-u}; u(4) = 2$$

$$\frac{x+4}{y-2x-7} = \ln|c(y-2x-7)| \text{ với } C = \frac{1}{6}e^{-\frac{2}{3}}$$

$$82) \frac{dy}{dx} = \frac{(4x-3)y+1}{2x-3y+2} \quad \text{Đáp số: Không có dạng như đề bài yêu cầu.}$$

Hãy dùng thừa số tích phân để đưa về dạng vi phân toàn phần và tìm nghiệm của các phương trình vi phân sau:

$$83) (x^2 - y^2) + 2xyy' = 0$$

Hướng dẫn:

Phương trình có dạng $M dx + N dy = 0$

$$\text{Ta có: } \frac{M_y - N_x}{N} = \frac{-2y - 2y}{2xy} = -\frac{2}{x}$$

Chọn thừa số phân tích

$$\mu(x) = \exp\left(\int \frac{-2}{x} dx\right) = \exp(-2\ln|x| + C) = \frac{1}{x^2} \text{ (chọn C thích hợp)}$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{x^2} [(x^2 - y^2) dx + 2xy dy] = 0$$

$$\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) dx + \frac{2y}{x} dy = 0$$