

Chương 4: Tích phân

GV. Phan Trung Hiếu

- §1. Nguyên hàm
- §2. Tích phân xác định
- §3. Các phương pháp tính tích phân

§1. Nguyên hàm

2

I. Nguyên hàm:

Định nghĩa 1.1. Cho hàm số f xác định trên khoảng D .

Hàm số F được gọi là **nguyên hàm** của f trên D

$$\Leftrightarrow F'(x) = f(x), \forall x \in D.$$

Ví dụ 1.1:

- x^2 là nguyên hàm của $2x$, vì $(x^2)' = 2x$.
- $x^2 + 3$ là nguyên hàm của $2x$, vì $(x^2 + 3)' = 2x$.
- $x^2 + C$ (C là một hằng số) là nguyên hàm của $2x$, vì $(x^2 + C)' = 2x$.

3

Định lý 1.2. Với C là một hằng số tùy ý, nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên D thì $F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên D . Ngược lại, mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên D đều có dạng $F(x) + C$.

4

II. Tích phân bất định:

Định nghĩa 2.1. **Tích phân bất định** của hàm số f trên D là biểu thức diễn tả tổng quát của tất cả các nguyên hàm của f trên D .

Tích phân bất định (**Họ nguyên hàm**) của f được ký hiệu là

$$\int f(x) dx,$$

trong đó

$\int$: dấu tích phân.

x : **biến** lấy tích phân.

$f(x)$: **hàm** lấy tích phân.

$f(x)dx$: **biểu thức** dưới dấu tích phân.

5

Như vậy, nguyên hàm và tích phân bất định là 2 thuật ngữ chỉ cùng một nội dung, ta có

$$\int f(x) dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

Ví dụ 1.2. $\int 2x dx = x^2 + C$ vì $(x^2)' = 2x$.

6

III. Tính chất:

- ① $\int k \cdot f(x) dx = k \int f(x) dx$ với k là hằng số khác 0.
- ② $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$.
- ③ $\int f'(x) dx = f(x) + C$.
- ④ $\left(\int f(x) dx \right)' = f(x)$.

7

IV. Bảng tích phân cơ bản:

Xem Bảng 4.

8

§2. Tích phân xác định

9

I. Công thức Newton-Leibniz:

Định lý 1.1 (Công thức Newton-Leibniz).
 Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a, b]$ thì **tích phân xác định** của f từ a đến b là

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

10

II. Tính chất:

- ① $\int_a^a f(x) dx = 0$
- ② $-\int_b^a f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$
- ③ $\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$ với k là hằng số
- ④ $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$
- ⑤ $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ với c nằm giữa a và b
- ⑥ $f(x) \geq 0$ trên $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0$.

11

§3. Các phương pháp tích tích phân

12

Dạng 1:

Tính tích phân bằng cách dùng các công thức tích phân cơ bản, công thức Newton-Leibniz.

Ví dụ 3.1. Tính

$$a) \int x^5 dx$$

$$b) \int (2x+1)^{20} dx$$

$$c) \int_2^3 \frac{dx}{x^2}$$

$$d) \int_{-1}^0 \frac{dx}{1-2x}$$

13

Dạng 2:

Tính tích phân bằng cách biến đổi hàm dưới dấu tích phân, đưa về tích phân cơ bản. Các phép biến đổi hay dùng là

❶ Tích $\rightarrow$ nhân phân phối $\rightarrow$ Tổng.

$$\text{❷ } \frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

$$\text{❸ } \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}; x^a \cdot x^b = x^{a+b}; \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}; \frac{1}{x^b} = x^{-b}.$$

14

❹ Các tính chất của tích phân bất định và xác định.

❺ Hằng đẳng thức.

❻ Biến đổi lượng giác.

❼ Nhân, chia lượng liên hiệp.

15

Ví dụ 3.2. Tính

$$a) \int \left(7x^2 + \frac{x}{5} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx$$

$$b) \int_0^1 (x^2 + 1) \sqrt{x} dx$$

$$c) \int \frac{(1+e^x)^2}{e^{3x}} dx$$

$$d) \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos^2 \frac{x}{2} dx$$

$$e) \int \tan^2 x dx$$

$$f) \int_3^7 \frac{dx}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-3}}$$

$$g) \int \frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx$$

$$h) \int_1^3 \frac{dx}{x^2 + 3x + 2}$$

16

Dạng 3: Phương pháp đổi biến số loại 1

★ **Ý tưởng chính:** Đặt $t =$ biểu thức thích hợp sao cho biểu thức còn lại trong hàm số. Nếu chưa đặt được thì ta tìm cách biến đổi hàm số. $t' =$

17

❶ **Tích phân dạng:** $I = \int f[u(x)]u'(x)dx$

Bước 1 (đổi biến): Đặt $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x)dx$

Bước 2 (thay vào tích phân):

$$I = \int f(t) dt = F(t) + C = F[u(x)] + C$$

18

● **Tích phân dạng:** $I = \int_a^b f[u(x)]u'(x)dx$

Bước 1 (đổi biến): Đặt $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x)dx$

Bước 2 (đổi cận): $\frac{x}{t} \quad \frac{a}{u(a)} \quad \frac{b}{u(b)}$

Bước 3 (thay vào tích phân):

$$I = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t) dt$$

(cận mới, biến mới).

19

★ **Dấu hiệu đổi biến thường gặp:**

Có	Đặt
$(u(x))^n$	$t = u(x)$
căn	$t = \text{căn}$
$e^x + \alpha$	$t = e^x + \alpha, \alpha = \text{const}$
$\ln x$ và $\frac{1}{x}$	$t = \ln x$
$\frac{1}{x}$ và $\frac{1}{x^2}$	$t = \frac{1}{x}$

20

Dạng	Đặt
có $\tan x$ và $\frac{1}{\cos^2 x}$	$t = \tan x$
có $\cot x$ và $\frac{1}{\sin^2 x}$	$t = \cot x$
có $\arcsin x$ và $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$t = \arcsin x$
có $\arccos x$ và $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$t = \arccos x$

21

Dạng	Đặt
có $\arctan x$ và $\frac{1}{1+x^2}$	$t = \arctan x$
có $\text{arccot} x$ và $\frac{1}{1+x^2}$	$t = \text{arccot} x$
$\int f(\sin x) \cos x dx$	$t = \sin x$
$\int f(\cos x) \sin x dx$	$t = \cos x$

22

Dạng		Đặt
$\int f(\sin x, \cos x)dx$	Thay $\begin{cases} \sin x \rightarrow -\sin x \\ \cos x \rightarrow -\cos x \end{cases}$ f không đổi dấu	$t = \tan x$
	Thay $\sin x \rightarrow -\sin x$ f đổi dấu	$t = \cos x$
	Thay $\cos x \rightarrow -\cos x$ f đổi dấu	$t = \sin x$
	Tổng quát	$t = \tan \frac{x}{2}$

23

Ví dụ 3.3. Tính

a) $\int x(1-x)^{20} dx$

c) $\int \frac{e^x dx}{e^x + 1}$

e) $\int_{1/2}^1 \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$

g) $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

b) $\int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx$

d) $\int \frac{dx}{x(2 + \ln^2 x)}$

f) $\int_0^{\pi/4} \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx$

h) $\int_0^{\pi/2} e^{2+\sin x} \cos x dx$

24

$$i) \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$$

$$k) \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$$

$$l) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin x}$$

$$m) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cos 2x dx$$

$$n) \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 4x + 5}}$$

$$p) \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} dx$$

$$q) \int_0^2 (4x - 2) e^{x^2 - x} dx$$

25

Dạng 4: Phương pháp đổi biến số loại 2

Phương pháp (đổi biến):

Đặt $x = u(t) \Rightarrow dx = u'(t)dt$

★ **Dấu hiệu đặt thông thường:**

Có	Đặt
$\sqrt{a^2 - u^2(x)}$	$u(x) = a \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
$\sqrt{u^2(x) - a^2}$	$u(x) = \frac{a}{\sin t}, t \in \left(\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$
$\sqrt{u^2(x) + a^2}$	$u(x) = a \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

26

★ **Chú ý:** Khi tính tích phân hàm chứa căn, ta ưu tiên đặt $t =$ căn hoặc nhân liên hiệp trước. Nếu không được thì ta mới nghĩ đến đổi biến loại 2.

Ví dụ 3.4. Tính

$$a) \int x^2 \sqrt{4 - x^2} dx$$

$$b) \int_0^1 x \sqrt{2 - x^2} dx$$

27

Dạng 5: Tính tích phân hàm hữu tỉ

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx, P(x), Q(x) \text{ là các đa thức.}$$

Phương pháp:

① **Bậc tử $\geq$ bậc mẫu:** chia đa thức.

② **Bậc tử $<$ bậc mẫu:** Thử *đổi biến* đặt $t =$ một biểu thức ở mẫu. Nếu không được thì ta làm như sau

28

① Mẫu có $(ax + b)^n$: Đặt $t = ax + b$.

② Mẫu là tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$:

• Vô nghiệm và tích phân có dạng $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$, ta

biến đổi $ax^2 + bx + c = a^2 + u^2(x)$, rồi đặt

$$u(x) = a \tan t.$$

• Vô nghiệm và tích phân có dạng $\int \frac{(px + q)dx}{ax^2 + bx + c}$ ta tìm hệ số A, B sao cho

$$\frac{px + q}{ax^2 + bx + c} = \frac{A \cdot (\text{Mẫu}')}{ax^2 + bx + c} + \frac{B}{ax^2 + bx + c}$$

29

• Có nghiệm kép x_0 , ta phân tích

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

$$\Rightarrow \frac{P(x)}{ax^2 + bx + c} = \frac{P(x)}{a(x - x_0)^2}.$$

• Có 2 nghiệm phân biệt x_1 và x_2 , ta phân tích

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Tìm hệ số A, B sao cho

$$\frac{P(x)}{a(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}.$$

30

● Mẫu là đa thức bậc lớn hơn 2: Ta phân tích mẫu thành **tích** dạng **lũy thừa** của **nhị thức** hay **lũy thừa** của các **tam thức vô nghiệm** và tìm các hệ số như sau

$$\frac{P(x)}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{C}{x-x_3}$$

$$\frac{P(x)}{(x-x_1)(x-x_2)^2} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{C}{(x-x_2)^2}$$

$$\frac{P(x)}{(x-x_0)(ax^2+bx+c)} = \frac{A}{x-x_0} + \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}$$

trong đó $ax^2+bx+c=0$ vô nghiệm.

31

$$\frac{P(x)}{(x-x_0)^2(ax^2+bx+c)} = \frac{A}{x-x_0} + \frac{B}{(x-x_0)^2} + \frac{Cx+D}{ax^2+bx+c}$$

$$\frac{P(x)}{(x-x_0)(ax^2+bx+c)^2} = \frac{A}{x-x_0} + \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c} + \frac{Dx+E}{(ax^2+bx+c)^2}$$

trong đó $ax^2+bx+c=0$ vô nghiệm.

★ **Đặc điểm:**

-Mẫu là lũy thừa của nhị thức $(x-x_0)$: Từ là **hằng**.

-Mẫu là lũy thừa của tam thức ax^2+bx+c vô nghiệm: Từ là **nhị thức**.

★ **Cách tìm các hệ số:** Có bao nhiêu hệ số thì lần lượt cho x nhận bấy nhiêu giá trị thuộc TXĐ để lập hệ phương trình. Từ đó, ta giải tìm các hệ số.

32

Ví dụ 3.5. Tính

a) $\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x} dx$

b) $\int_0^1 \frac{4x+3}{2x+1} dx$

c) $\int \frac{xdx}{(2x+1)^3}$

d) $\int_3^4 \frac{(x+1)dx}{x^2-3x+2}$

e) $\int \frac{(x^2+1)}{x^3+3x^2-4x-12} dx$

f) $\int \frac{(x+2)^2}{x(x-1)^2} dx$

g) $\int \frac{2x^2+3x+11}{x^3+x^2+3x-5} dx$

33

Dạng 6: Phương pháp tích phân từng phần

★ **Dấu hiệu:** có sự xuất hiện của **lô** ($\ln$, $\log$); **đa** (đa thức, phân thức); **lượng** (lượng giác); **mũ** (e^{ax+b}) liên hệ với nhau bởi phép nhân.

★ **Phương pháp:**

B1: Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = g(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = \text{Nguyên hàm của } g(x) \end{cases}$

Đặt " $u \rightarrow dv$ " theo thứ tự ưu tiên là

"Nhất lô nhì đa tam lượng tứ mũ"

(*đứng trước thì đặt u , đứng sau thì đặt dv*).

34

B2: Dùng công thức tích phân từng phần

$$\int u dv = uv - \int v du$$

hoặc

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

35

Ví dụ 3.6 Tính

a) $\int x \cos x dx$

b) $\int_0^1 x^2 e^x dx$

c) $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$

d) $\int x^2 \arccos x dx$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \ln(2+\cos x) dx$

f) $\int e^x \sin x dx$

36

BẢNG 4. TÍCH PHÂN CƠ BẢN

(1)	$\int 0 dx = C$	
(2)	$\int dx = x + C$	Với $A \neq 0$:
(3)	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\int (Ax+B)^\alpha dx = \frac{1}{A} \cdot \frac{(Ax+B)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$
(4)	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C \quad (x \neq 0)$	$\int \frac{dx}{Ax+B} = \frac{1}{A} \ln Ax+B + C \quad (Ax+B \neq 0)$
(5)	$\int \frac{dx}{x^2} = \frac{-1}{x} + C$	$\int \frac{dx}{(Ax+B)^2} = \frac{1}{A} \cdot \left(\frac{-1}{Ax+B} \right) + C$
(6)	$\int \frac{dx}{x^n} = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + C$	$\int \frac{dx}{(Ax+B)^n} = \frac{1}{A} \cdot \frac{-1}{(n-1)(Ax+B)^{n-1}} + C$
(7)	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C \quad (x > 0)$	$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax+B}} = \frac{2}{A} \sqrt{Ax+B} + C \quad (Ax+B > 0)$
(8)	$\int \sqrt[n]{x^m} dx = \frac{n}{n+m} \sqrt[n]{x^{n+m}} + C$	$\int \sqrt[n]{(Ax+B)^m} dx = \frac{1}{A} \cdot \frac{n}{n+m} \sqrt[n]{(Ax+B)^{n+m}} + C$
(9)	$\int \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} dx = \frac{n}{n-m} \sqrt[n]{x^{n-m}} + C$	$\int \frac{1}{\sqrt[n]{(Ax+B)^m}} dx = \frac{1}{A} \cdot \frac{n}{n-m} \sqrt[n]{(Ax+B)^{n-m}} + C$
(10)	$\int \frac{dx}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{1}{ad-bc} \ln \left \frac{ax+b}{cx+d} \right + C$	
(11)	$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{(Ax+B)} dx = \frac{1}{A} e^{(Ax+B)} + C$
(12)	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^{(Ax+B)} dx = \frac{1}{A} \cdot \frac{a^{(Ax+B)}}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$
(13)	$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos(Ax+B) dx = \frac{1}{A} \sin(Ax+B) + C$
(14)	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin(Ax+B) dx = \frac{-1}{A} \cos(Ax+B) + C$
(15)	$\int \cot x dx = \ln \sin x + C$	$\int \cot(Ax+B) dx = \frac{1}{A} \ln \sin(Ax+B) + C$
(16)	$\int \tan x dx = -\ln \cos x + C$	$\int \tan(Ax+B) dx = \frac{-1}{A} \ln \cos(Ax+B) + C$
(17)	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2(Ax+B)} = \frac{1}{A} \tan(Ax+B) + C$
(18)	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2(Ax+B)} = \frac{-1}{A} \cot(Ax+B) + C$