

Câu 1: (2 điểm)

a/ Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm
$$\begin{cases} 2x + y - 5z = m \\ x + my + (m-3)z = 1 \\ (m+3)x + 2y + (m-7)z = -2 \end{cases}$$

b/ Tính định thức của X , biết $A^{-1}X^{-1}B = 2C \cdot (A+B)$, với $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Câu 2: (2 điểm) Trong $P_2[x]$ cho tập hợp

$$E = \{v_1 = x^2 + 2x + 1, v_2 = -x^2 - 5x, v_3 = 2x^2 + x + 3, v_4 = -3x + m\},$$

và ánh xạ tuyến tính

$$f : P_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^2, \text{ với } f(ax^2 + bx + c) = (a + 2b + c, a - b + c).$$

a/ Tìm m để E là hệ sinh của $P_2[x]$.

b/ Tìm một cơ sở và số chiều của $\ker f$ (với $\ker f$ là nhân của ánh xạ tuyến tính f).

Câu 3: (2,5 điểm) Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & 0 \\ -6 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ và $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

a/ Tìm tất cả các giá trị riêng và vectơ riêng của ma trận A .

b/ Đưa dạng toàn phương $f(x_1, x_2, x_3) = X^T \cdot A \cdot X$ về dạng chính tắc bằng phép biến đổi trực giao.

Câu 4: (2 điểm) Cho A là tập hợp các số phức khác 0, và tập hợp

$$G = \left\{ u = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0 \right\}.$$

a/ Chứng minh G cùng với phép nhân ma trận là một nhóm. Nhóm này có phải là nhóm Abel không? Tại sao? (nhóm Abel là nhóm giao hoán).

b/ Cho $g : A \rightarrow G$ là một ánh xạ được xác định bởi $g(z) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, với mọi số phức khác không $z = a + bi \in A$. Chứng minh g là một đồng cấu từ nhóm $(A, \cdot)$ (nhóm các số phức khác không A với phép nhân các số phức) vào nhóm $(G, \cdot)$ (nhóm G với phép nhân ma trận).

Câu 5: (1,5 điểm) Hãy dùng thuật toán RSA để tìm khóa lập mã và khóa giải mã biết hai số nguyên tố p và q được chọn là $p = 31, q = 5$ và số e trong khóa lập mã được chọn là $e = 7$. Với khóa lập mã và khóa giải mã đó, hãy mã hóa bản rõ $M = 03$ và giải mã bản mã $C = 04$.

Ghi chú: Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.

Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)	Nội dung kiểm tra
[CĐR G2.3]: Thực hiện được các phép toán ma trận, tính được định thức, các phép biến đổi sơ cấp, tìm hạng ma trận, tìm được ma trận nghịch đảo, giải được hệ phương trình tuyến tính.	Câu 1
[CĐR G2.4]: Thực hiện được hầu hết các bài toán về không gian vectơ, không gian Euclide như: chứng minh không gian con; xác định một vectơ có là tổ hợp tuyến tính của một hệ vectơ; xét tính độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính của một hệ vectơ; tìm cơ sở, số chiều của một không gian vectơ; tìm tọa độ của một vectơ đối với một cơ sở, tìm ma trận đổi cơ sở; phương pháp Gram-Schmidt để xây dựng hệ vectơ trực giao từ một hệ vectơ độc lập tuyến tính,... [CĐR G2.5]: Thực hiện được hầu hết các bài toán về ánh xạ tuyến tính: tìm nhân, ảnh, ma trận, hạng của ánh xạ tuyến tính;	Câu 2
[CĐR G2.5]: Thực hiện được hầu hết các bài toán về dạng toàn phương: tìm trị riêng, vectơ riêng, chéo hóa ma trận; xét dấu dạng toàn phương.	Câu 3
[CĐR G1.6]: Trình bày được khái niệm phép toán hai ngôi, nhóm, vành, trường, đồng cấu, đẳng cấu. [CĐR G2.6]: Xây dựng phép toán hai ngôi; xét xem tập hợp với phép toán hai ngôi cho trước có là nhóm, vành, trường hay không; mã hóa, phát hiện lỗi, sửa sai,...	Câu 4
[CĐR G2.6]: Xây dựng phép toán hai ngôi; xét xem tập hợp với phép toán hai ngôi cho trước có là nhóm, vành, trường hay không; mã hóa, phát hiện lỗi, sửa sai,...	Câu 5

Ngày tháng 12 năm 2015

Thông qua bộ môn
(ký và ghi rõ họ tên)