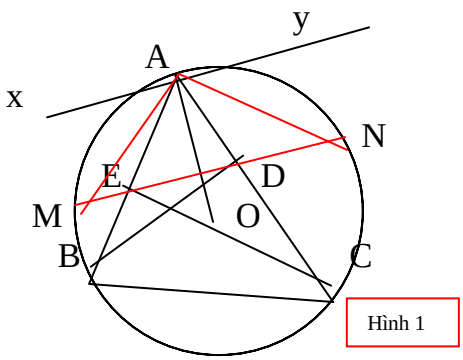
100 BÀI TẬP HÌNH HỌC VÀO LỚP 10

Bài 1: Cho ΔABC có các đường cao BD và CE.Đường thẳng DE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại hai điểm M và N.

1. Chứng minh:BEDC nội tiếp.
2. Chứng minh: góc $\widehat{DEA}=\widehat{ACB}$.
3. Chứng minh: DE // với tiếp tuyến tai A của đường tròn ngoại tiếp tam giác.
4. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.Chứng minh: OA là phân giác của góc MAN.
5. Chứng tỏ: $AM^2=AE.\widehat{AB}$.

Giợi ý:



Hình 1

1.C/m BEDC nội tiếp:
C/m góc $\widehat{BEC}=\widehat{BDE}$=1v. Hia điểm D và E cùng làm với hai đầu đoạn thẳng BC một góc vuông.

2.C/m góc $\widehat{DEA}=\widehat{ACB}$.
Do BECD nt⇒$\widehat{DMB}+\widehat{DCB}$=2v.
Mà $\widehat{DEB}+\widehat{AED}$=2v
⇒$\widehat{AED}=\widehat{ACB}$

3.Gọi tiếp tuyến tại A của (O) là đường thẳng xy (Hình 1)

Ta phải c/m xy//DE.

Do xy là tiếp tuyến,AB là dây cung n[illegible] $\frac{\widehat{\ }}{2}$ [illegible]

Mà sđ $\widehat{ACB}=\frac{1}{2}$ sđ AB. ⇒góc $\widehat{xAB}=\widehat{ACB}$ mà góc $\widehat{ACB}=\widehat{AED}$(cmt)

⇒$\widehat{xAB}=\widehat{AED}$ hay xy//DE.

4.C/m OA là phân giác của góc $\widehat{MAN}$.

Do xy//DE hay xy//MN mà OA⊥xy⇒OA⊥MN.⊥OA là đường trung trực của MN.(Đường kính vuông góc với một dây)⇒ΔAMN cân ở A ⇒AO là phân giác của góc MAN.

5.C/m :AM^2=AE.AB.

Do ΔAMN cân ở A ⇒AM=AN ⇒cung AM=cung AN.⇒góc $\widehat{MBA}=\widehat{AMN}$(Góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau);góc MAB chung

⇒ΔMAE ∽Δ BAM⇒$\frac{MA}{AB}=\frac{AE}{MA}$⇒ MA^2=AE.AB.

Bài 2:

Cho(O) đường kính AC.trên đoạn OC lấy điểm B và vẽ đường tròn tâm O', đường kính BC.Gọi M là trung điểm của đoạn AB.Từ M vẽ dây cung DE vuông góc với AB;DC cắt đường tròn tâm O' tại I.

1.Tứ giác ADBE là hình gì?

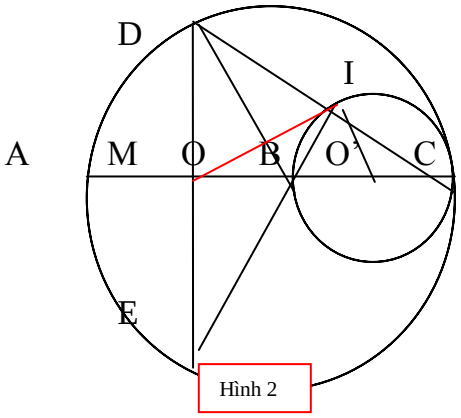
2.C/m DMBI nội tiếp.

3.C/m B;I;C thẳng hàng và MI=MD.

4.C/m MC.DB=MI.DC

5.C/m MI là tiếp tuyến của (O')

Gợi ý:



Hình 2

1.Do MA=MB và AB⊥DE tại M nên ta có DM=ME.
⇒ADBE là hình bình hành.
Mà BD=BE(AB là đường trung trực của DE) vậy ADBE ;là hình thoi.

2.C/m DMBI nội tiếp.
BC là đường kính,I∈(O') nên Góc BID=1v.Mà góc DMB=1v(gt)
⇒BID+DMB=2v⇒đpcm.

3.C/m B;I;E thẳng hàng.

Do AEBD là hình thoi ⇒BE//AD mà AD⊥DC ờn)⇒BE⊥DC; CM⊥DE(gt).Do góc BIC=1v ⇒BI⊥DC.Qua 1 điểm B có hai đường thẳng BI và BE cùng vuông góc với DC ⊥B;I;E thẳng hàng.

•C/m MI=MD: Do M là trung điểm DE; ΔEID vuông ở I⇒MI là đường trung tuyến của tam giác vuông DEI ⇒MI=MD.

4. C/m MC.DB=MI.DC.

hãy chứng minh ΔMCI∽ ΔDCB (góc C chung;BDI=IMB cùng chắn cung MI do DMBI nội tiếp)

5.C/m MI là tiếp tuyến của (O')

-Ta có ΔO'IC Cân ⇒góc O'IC=O'CI. MBID nội tiếp ⇒MIB=MDB (cùng chắn cung MB)
ΔBDE cân ở B ⇒góc MDB=MEB .Do MECI nội tiếp ⇒góc MEB=MCI (cùng chắn cung MI)
Từ đó suy ra góc O'IC=MIB ⇒MIB+BIO'=O'IC+BIO'=1v
Vậy MI ⊥O'I tại I nằm trên đường tròn (O') ⇒MI là tiếp tuyến của (O').

☎📖☎

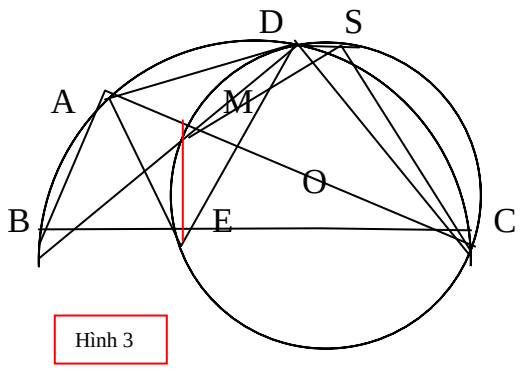
Bài 3:

Cho ΔABC có góc A=1v.Trên AC lấy điểm M sao cho AM<MC.Vẽ đường tròn tâm O đường kính CM;đường thẳng BM cắt (O) tại D;AD kéo dài cắt (O) tại S.

1. C/m BADC nội tiếp.
2. BC cắt (O) ở E.Cmr:MR là phân giác của góc AED.

3. C/m CA là phân giác của góc BCS.

Gợi ý:



Hình 3

1.C/m ABCD nội tiếp:
C/m A và D cùng làm với hai đầu đoạn thẳng BC một góc vuông..
2.C/m ME là phân giác của góc AED.
•Hãy c/m AMEB nội tiếp.
•Góc ABM=AEM(cùng chắn cung AM)
Góc ABM=ACD(Cùng chắn cung MD)
Góc ACD=DME(Cùng chắn cung MD)

⇒AEM=MED.

4.C/m CA là phân giác của góc BCS.

-Góc ACB=ADB (Cùng chắn cung AB)

-Góc ADB=DMS+DSM (góc ngoài tam giác MDS)

-Mà góc DSM=DCM(Cùng chắn cung MD)

DMS=DCS(Cùng chắn cung DS)

⇒Góc MDS+DSM=SDC+DCM=SCA.

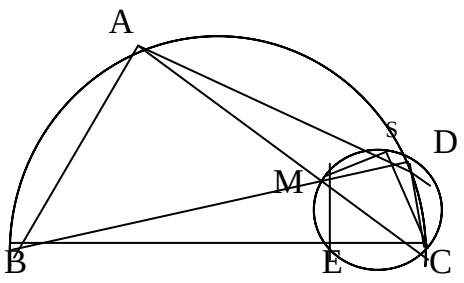
Vậy góc ADB=SCA⇒đpcm.

Bài 4:

Cho ΔABC có góc A=1v.Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho AM>MC.Dựng đường tròn tâm O đường kính MC;đường tròn này cắt BC tại E.Đường thẳng BM cắt (O) tại D và đường thẳng AD cắt (O) tại S.

1. C/m ADCB nội tiếp.
2. C/m ME là phân giác của góc AED.
3. C/m: Góc ASM=ACD.
4. Chứng tỏ ME là phân giác của góc AED.
5. C/m ba đường thẳng BA;EM;CD đồng quy.

Gợi ý:



Hình 4

1.C/m ADCB nội tiếp:
Hãy chứng minh:
Góc MDC=BDC=1v
Từ đó suy ra A vad D cùng làm với hai đầu đoạn thẳng BC một góc vuông…
2.C/m ME là phân giác của góc AED.
•Do ABCD nội tiếp nên

⇒ABD=ACD (Cùng chắn cung AD)

•Do MECD nội tiếp nên MCD=MED (Cùng chắn c

•Do MC là đường kính;E∈(O)⇒Góc MEC=1v⇒MEB=1v ⇒ABEM nội tiếp⇒Góc MEA=ABD. ⇒Góc MEA=MED⇒đpcm

3.C/m góc ASM=ACD.

Ta có ASM=SMD+SDM(Góc ngoài tam giác SMD)

Mà góc SMD=SCD(Cùng chắn cung SD) và Góc SDM=SCM(Cùng chắn cung SM)⇒SMD+SDM=SCD+SCM=MCD.

Vậy Góc ASM=ACD.

4.C/m ME là phân giác của góc AED (Chứng minh như câu 2 bài 2)

5.Chứng minh AB;ME;CD đồng quy.

Gọi giao điểm AB;CD là K.Ta chứng minh 3 điểm K;M;E thẳng hàng.

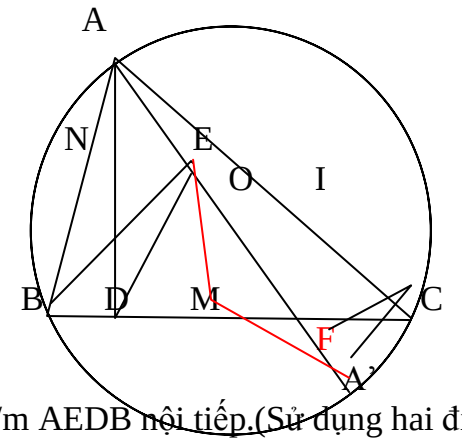
•Do CA⊥AB(gt);BD⊥DC(cmt) và AC cắt BD ở M⇒M là trực tâm của tam giác KBC⇒KM là đường cao thứ 3 nên KM⊥BC.Mà ME⊥BC(cmt) nên K;M;E thẳng hàng ⇒đpcm.

Bài 5:

Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn và AB<AC nội tiếp trong đường tròn tâm O.Kẻ đường cao AD và đường kính AA'.Gọi E:F theo thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ B và C xuống đường kính AA'.

1. C/m AEDB nội tiếp.
2. C/m DB.A'A=AD.A'C
3. C/m:DE⊥AC.
4. Gọi M là trung điểm BC.Chứng minh MD=ME=MF.

Gợi ý:



Hình 5

1/C/m AEDB nội tiếp.(Sử dụng hai điểm D;E cùng làm với hai đầu đoạn AB…)

2/C/m: DB.A'A=AD.A'C .Chứng minh được hai tam giác vuông DBA và A'CA đồng dạng.

3/ C/m DE⊥AC.

Do ABDE nội tiếp nên góc $\overset{\frown}{EDC}=\overset{\frown}{BAE}$(Cùng bù với góc $\overset{\frown}{BDE}$).Mà góc BAE=BCA'(cùng chắn cung $\overset{\frown}{BA'}$) suy ra góc CDE=DCA'. Suy ra $\overset{\frown}{DE}//\overset{\frown}{A'C}$. Mà góc ACA'=1v nên DE⊥AC.

4/C/m MD=ME=MF.

- Gọi N là trung điểm AB.Nên N là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABDE. Do M;N là trung điểm BC và AB ⇒MN//AC(Tính chất đường trung bình)

Do DE⊥AC ⇒MN⊥DE (Đường kính đi qua trung điểm một dây…)⇒MN là đường trung trực của DE ⇒ME=MD.

- Gọi I là trung điểm AC.⇒MI//AB(tính chất đường trung bình)

⇒$\overset{\frown}{A'BC}=\overset{\frown}{A'AC}$ (Cùng chắn cung A'C).

Do $\overset{\frown}{ADFC}$ nội tiếp ⇒Góc $\overset{\frown}{FAC}=\overset{\frown}{FDC}$(Cùng chắn cung FC) ⇒Góc $\overset{\frown}{A'BC}=\overset{\frown}{FDC}$ hay DF//BA' Mà ABA'=1v⇒MI⊥DF.Đường kính MI⊥dây cung DF⇒MI là đường trung trực của DF⇒MD=MF.

Vậy MD=ME=MF.

Bài 6:

Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn tâm O.Gọi M là một điểm bất kỳ trên cung nhỏ AC.Gọi E và F lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến BC và AC.P là trung điểm AB;Q là trung điểm FE.

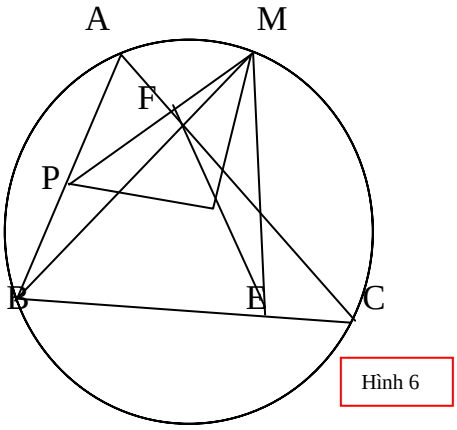
1/C/m MFEC nội tiếp.

2/C/m BM.EF=BA.EM

3/C/M ΔAMP∽ΔFMQ.

4/C/m góc $\widehat{PQM}=90^o$.

Giải:



Hình 6

1/C/m MFEC nội tiếp:
(Sử dụng hai điểm E;F cung làm với hai đầu đoạn thẳng CM…)

2/C/m BM.EF=BA.EM

•C/m:ΔEFM∽ΔABM:

Ta có góc $\widehat{ABM}=\widehat{ACM}$ (Vì cùng chắn cung AM)

Do MFEC nội tiếp nên góc $\widehat{ACM}=\widehat{FEM}$(Cùn
⇒Góc $\widehat{ABM}=\widehat{FEM}$.(1)

Ta lại có góc $\widehat{AMB}=\widehat{ACB}$(Cùng chắn cung AB).Do MFEC nội tiếp nên góc FME=FCM(Cùng chắn cung FE).⇒Góc AMB=FME.(2)

Từ (1)và(2) suy ra :ΔEFM∽ΔABM ⇒đpcm.

3/C/m ΔAMP∽ΔFMQ.

Ta có ΔEFM∽ΔABM (theo c/m trên)⇒ $\frac{AB}{FE}=\frac{AM}{MF}$ maØ AM=2AP;FE=2FQ (gt)

⇒ $\frac{2AP}{2FQ}=\frac{AM}{MF}\Rightarrow\frac{AP}{FQ}=\frac{AM}{FM}$ và góc $\widehat{PAM}=\widehat{MFQ}$ (suy ra từ ΔEFM∽ΔABM)

Vậy: ΔAMP∽ΔFMQ.

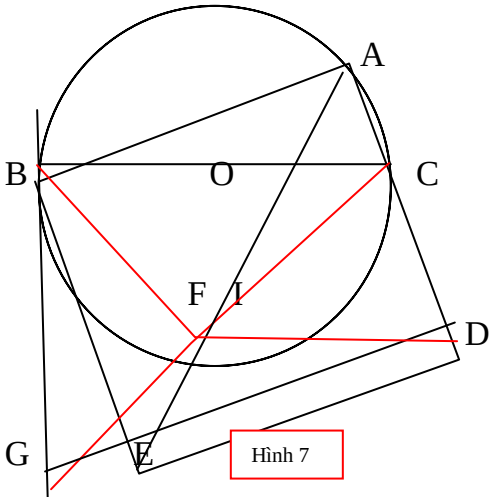
4/C/m góc:$\widehat{PQM}=90^o$.

Do góc $\widehat{AMP}=\widehat{FMQ}$ ⇒$\widehat{PMQ}=\widehat{AMF}$ ⇒ΔPQM∽ΔAFM ⇒góc $\widehat{MQP}=\widehat{AFM}$ Mà góc $\widehat{AFM}=1v$⇒$\widehat{MQP}=1v$(đpcm).

Bài 7:

Cho (O) đường kính BC,điểm A nằm trên cung BC.Trên tia AC lấy điểm D sao cho AB=AD.Dựng hình vuông ABED;AE cắt (O) tại điểm thứ hai F;Tiếp tuyến tại B cắt đường thẳng DE tại G.

1. C/m BGDC nội tiếp.Xác định tâm I của đường tròn này.
2. C/m ΔBFC vuông cân và F là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD.
3. C/m GEFB nội tiếp.
4. Chứng tỏ:C;F;G thẳng hàng và G cũng nằm trên đường tròn ngoại tiếp ΔBCD.Có nhận xét gì về I và F



Hình 7

1/C/m BGEC nội tiếp:
-Sử dụng tổng hai góc đối…
-I là trung điểm GC.
2/•C/mΔBFC vuông cân:
Góc $\overset{\frown}{BCF}=\overset{\frown}{FBA}$(Cùng chắn cung BF) mà góc $\overset{\frown}{FBA}=45^o$ (tính chất hình vuông)
⇒Góc $\overset{\frown}{BCF}=45^o$.
Góc $\overset{\frown}{BFC}=1v$(góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)⇒đpcm.
•C/m F là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBDC.ta C/m F cách đều các đỉnh B;C;D
Do ΔBFC vuông cân nên BC=FC.
Xét hai tam giác FEB và FED có:E F chung;
Góc $\overset{\frown}{BEF}=\overset{\frown}{FED}=45^o$;BE=ED(hai cạnh của hì
⇒BF=FD⇒BF=FC=FD.⇒đpcm.
3/C/m GE FB nội tiếp:

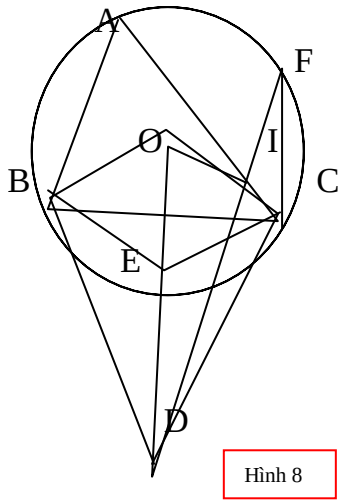
Do ΔBFC vuông cân ở F ⇒Cung BF=FC=90°. ⇒sđgóc $\overset{\frown}{GBF}=\frac{1}{2}$ Sđ cung BF=$\frac{1}{2}.90^o=45^o$.(Góc giữa tiếp tuyến BG và dây BF)

Mà góc FED=45^o(tính chất hình vuông)⇒Góc $\overset{\frown}{FED}=\overset{\frown}{GBF}=45^o$.ta lại có góc FED+FEG=2v⇒Góc GBF+FEG=2v ⇒GEFB nội tiếp.
4/ C/m• C;F;G thẳng hàng:Do GEFB nội tiếp ⇒Góc $\overset{\frown}{BFG}=\overset{\frown}{BEG}$ mà BEG=1v⇒BFG=1v.Do ΔBFG vuông cân ở F⇒Góc BFC=1v.⇒Góc BFG+CFB=2v⇒G;F;C thẳng hàng. C/m G cũng nằm trên… :Do GBC=GDC=1v⇒tâm đường tròn ngt tứ giác BGDC là F⇒G nằn trên đường tròn ngoại tiếp ΔBCD. •Dễ dàng c/m được I≡ F.

Bài 8:

Cho ΔABC có 3 góc nhọn nội tiếp trong (O).Tiếp tuyến tại B và C của đường tròn cắt nhau tại D.Từ D kẻ đường thẳng song song với AB,đường này cắt đường tròn ở E và F,cắt AC ở I(E nằm trên cung nhỏ BC).

1. C/m BDCO nội tiếp.
2. C/m: DC^2=DE.DF.
3. C/m:DOIC nội tiếp.
4. Chứng tỏ I là trung điểm FE.



Hình 8

1/C/m:BDCO nội tiếp(Dùng tổng hai góc đối)

2/C/m:DC^2=DE.DF.

Xét hai tam giác:DEC và DCF có góc D chung.

Sđgóc$\overset{\frown}{ECD}=\frac{1}{2}$ sđ cung EC(Góc giữa tiếp tuyến và một dây)

Sđ góc E $\overset{\frown}{FC}=\frac{1}{2}$ sđ cung EC(Góc nội tiếp)⇒góc ECD=DFC.

⇒ΔDCE ∽ΔDFC⇒đpcm.

3/C/m DOIC nội tiếp:

Ta có: sđgóc $\overset{\frown}{BAC}=\frac{1}{2}$ sđcung BC(Góc

Sđ góc $\overset{\frown}{BOC}$=sđcung BC(Góc ở tâm);OB=OC;DB=DC(tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau);OD chung⇒ΔBOD=ΔCOD⇒Góc BOD=COD

⇒2sđ góc$\overset{\frown}{DOC}$=sđ cung BC ⇒sđgóc $\overset{\frown}{DOC}=\frac{1}{2}$ sđcungBC (2)

Từ (1)và (2)⇒Góc $\overset{\frown}{DOC}$=$\overset{\frown}{BAC}$.

Do DF//AB⇒góc $\overset{\frown}{BAC}$=$\overset{\frown}{DIC}$(Đồng vị) ⇒Góc $\overset{\frown}{DOC}$=$\overset{\frown}{DIC}$⇒ Hai điểm O và I cùng làm với hai đầu đoạn thẳng Dc những góc bằng nhau…⇒đpcm

4/Chứng tỏ I là trung điểm EF:

Do DOIC nội tiếp ⇒ góc $\overset{\frown}{OID}$=$\overset{\frown}{OCD}$(cùng chắn cung OD)

Mà Góc $\overset{\frown}{OCD}$=1v(tính chất tiếp tuyến)⇒Góc $\overset{\frown}{OID}$=1v hay OI⊥ID ⇒OI⊥FE.Bán kính OI vuông góc với dây cung EF⇒I là trung điểmEF.

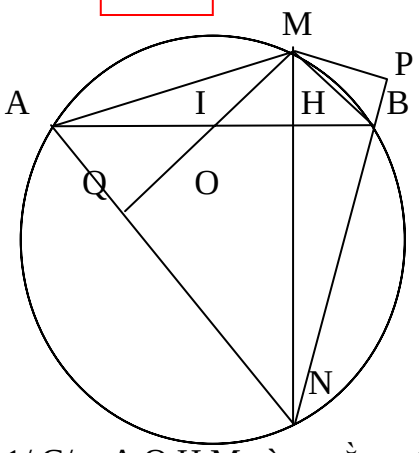
Bài 9:

Cho (O),dây cung AB.Từ điểm M bất kỳ trên cung AB(M≠A và M≠B),kẻ dây cung MN vuông góc với AB tại H.Gọi MQ là đường cao của tam giác MAN.

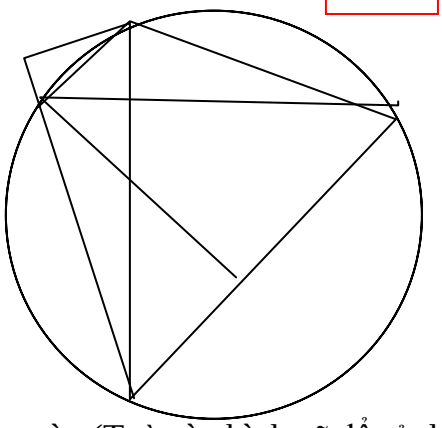
1. C/m 4 điểm A;M;H;Q cùng nằm trên một đường tròn.
2. C/m:NQ.NA=NH.NM
3. C/m Mn là phân giác của góc $\overset{\frown}{BMQ}$.
4. Hạ đoạn thẳng MP vuông góc với BN;xác định vị trí của M trên cung AB để MQ.AN+MP.BN có giác trị lớn nhất.

Giải:Có 2 hình vẽ,cách c/m tương tự.Sau đây chỉ C/m trên hình 9-a.

Hình 9a



Hình 9b



1/ C/m:A,Q,H,M cùng nằm trên một đường tròn.(Tuỳ vào hình vẽ để sử dụng một trong các phương pháp sau:-Cùng làm với hai đàu …một góc vuông.

-Tổng hai góc đối.

2/C/m: NQ.NA=NH.NM.

Xét hai Δvuông NQM và ΔNAH đồng dạng.

3/C/m MN là phân giác của góc $\overset{\frown}{BMQ}$. Có hai cách:

- Cách 1:Gọi giao điểm MQ và AB là I.C/m tam giác MIB cân ở M
- Cách 2: Góc $\overset{\frown}{QMN}=\overset{\frown}{NAH}$(Cùng phụ với góc $\overset{\frown}{ANH}$)

  Góc $\overset{\frown}{NAH}=\overset{\frown}{NMB}$(Cùng chắn cung NB)⇒đpcm

4/ xác định vị trí của M trên cung AB để MQ.AN+MP.BN có giác trị lớn nhất.

Ta có $2S_{\Delta MAN}=MQ.AN$

$2S_{\Delta MBN}=MP.BN.$

$2S_{\Delta MAN} + 2S_{\Delta MBN} = MQ.AN+MP.BN$

Ta lại có: $2S_{\Delta MAN} + 2S_{\Delta MBN} =2(S_{\Delta MAN} + S_{\Delta MBN})=2S_{AMBN}=2.\frac{AB\times MN}{2}=AB.MN$

Vậy: MQ.AN+MP.BN=AB.MN

Mà AB không đổi nên tích AB.MN lớn nhất ⇔MN lớn nhất⇔MN là đường kính

⇔M là điểm chính giữa cung AB.

Bài 10:

Cho (O;R) và (I;r) tiếp xúc ngoài tại A (R> r) .Dựng tiếp tuyến chung ngoài BC (B nằm trên đường tròn tâm O và C nằm trên đư ờng tròn tâm (I).Tiếp tuyến BC cắt tiếp tuyến tại A của hai đường tròn ở E.

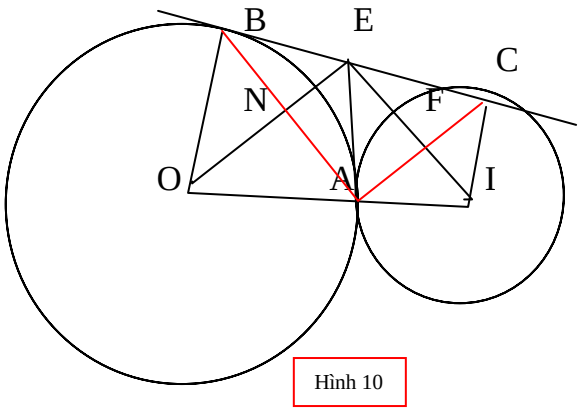
1/ Chứng minh tam giác ABC vuông ở A.

2/ O E cắt AB ở N ; IE cắt AC tại F .Chứng minh N;E;F;A cùng nằm trên một đường tròn .

3/ Chứng tỏ : $BC^2= 4 Rr$

4/ Tính diện tích tứ giác BCIO theo R;r

Giải:



Hình 10

1/C/m ΔABC vuông: Do BE và AE là hai tiếp tuyến cắt nhau nênAE=BE; Tương tự AE=EC⇒AE=EB=EC=$\frac{1}{2}$BC.⇒ΔABC vuông ở A.

2/C/m A;E;N;F cùng nằm trên…

-Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau thì EO là phân giác của tam giác cân AEB⇒EO là đường trung trực của AB hay OE⊥A

Tương tự góc EFA=2v⇒tổng hai góc đối……⇒4 điểm…

3/C/m $BC^2=4Rr$.

Ta có tứ giác FANE có 3 góc vuông(Cmt)⇒FANE là hình vuông⇒ΔOEI vuông ở E và EA⊥OI(Tính chất tiếp tuyến).Aùp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông có: AH^2=OA.AI(Bình phương đường cao bằng tích hai hình chiếu)

Mà AH=$\frac{BC}{2}$ và OA=R;AI=r⇒$\frac{BC^2}{4}$=Rr⇒BC^2=Rr

4/S_{BCIO}=? Ta có BCIO là hình thang vuông ⇒$S_{BCIO}=\frac{OB+IC}{2}\times BC$

⇒S=$\frac{(r+R)\sqrt{rR}}{2}$

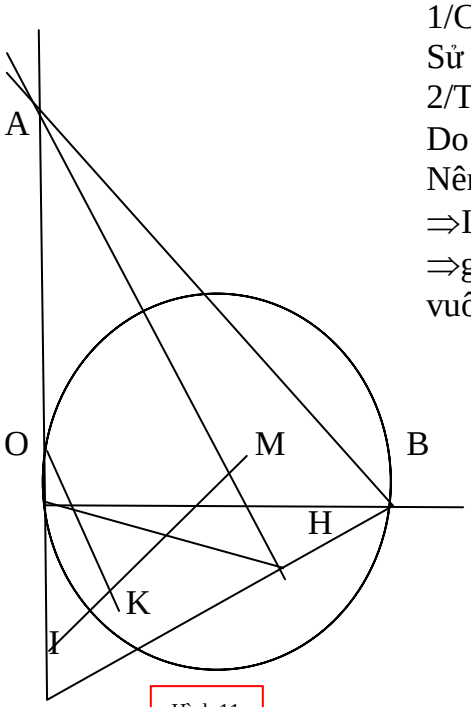
Bài 11:

Trên hai cạnh góc vuông xOy lấy hai điểm A và B sao cho OA=OB. Một đường thẳng qua A cắt OB tại M(M nằm trên đoạn OB).Từ B hạ đường vuông góc với AM tại H,cắt AO kéo dài tại I.

1. C/m OMHI nội tiếp.

2. Tính góc OMI.
3. Từ O vẽ đường vuông góc với BI tại K.C/m OK=KH
4. Tìm tập hợp các điểm K khi M thay đổi trên OB.

Giải:



Hình 11

1/C/m OMHI nội tiếp:
Sử dụng tổng hai góc đối.
2/Tính góc $\widehat{OMI}$
Do OB⊥AI;AH⊥AB(gt) và OB∩AH=M
Nên M là trực tâm của tam giác ABI
⇒IM là đường cao thứ 3 ⇒IM⊥AB
⇒góc $\widehat{OIM}$=$\widehat{ABO}$(Góc có cạnh tương ứng vuông góc)

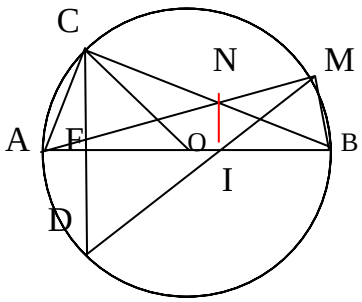
Mà Δ vuông OAB có OA=OB
⇒ΔOAB vuông cân ở O ⇒góc $\widehat{OBA}=45^o$⇒góc $\widehat{OMI}=45^o$
3/C/m OK=KH
Ta có $\widehat{OHK}$=$\widehat{HOB}$+$\widehat{HBO}$
(Góc ngoài ΔOHB)
Do AOHB nội tiếp(Vì góc AOB=AHB=1v) ⇒Góc HOB=HAB (Cùng chắn cung HB) và OBH=OAH(Cùng chắn Cùng chắn cung OH)⇒$\widehat{OHK}$=$\widehat{HAB}$+$\widehat{HAO}$
⇒ΔOKH vuông cân ở K⇒OH=KH
4/Tập hợp các điểm K…
Do OK⊥KB⇒ $\widehat{OKB}$=1v;OB không đổi khi M di động ⇒K nằm trên đường tròn đường kính OB.
Khi M≡Othì K≡O Khi M≡B thì K là điểm chính giữa cung AB.Vậy quỹ tích điểm K là $\frac{1}{4}$ đường tròn đường kính OB.

Bài 12:

Cho (O) đường kính AB và dây CD vuông góc với AB tại F.Trên cung BC lấy điểm M.Nối A với M cắt CD tại E.

1. C/m AM là phân giác của góc $\overset{\frown}{CMD}$.
2. C/m EFBM nội tiếp.
3. Chứng tỏ:AC2=AE.AM
4. Gọi giao điểm CB với AM là N;MD với AB là I.C/m NI//CD
5. Chứng minh N là tâm đường trèon nội tiếp ΔCIM

Giải:



1/C/m AM là phân giác của góc $\overset{\frown}{CMD}$
Do AB⊥CD ⇒AB là phân giác của tam giác cân COD.⇒ $\overset{\frown}{COA}=\overset{\frown}{AOD}$.
Các góc ở tâm $\overset{\frown}{AOC}$ và $\overset{\frown}{AOD}$ bằng nhau nên các cung bị chắn bằng nhau ⇒cung AC=AD⇒các góc nội tiếp chắn các cung này bằng nhau.Vậy $\overset{\frown}{CMA}=\overset{\frown}{AMD}$.
2/C/m EFBM nội tiếp.
Ta có $\overset{\frown}{AMB}$=1v(Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)
EFB=1v(Do AB⊥EF)
⇒$\overset{\frown}{AMB}+\overset{\frown}{EFB}$=2v⇒đpcm.
3/C/m AC^2=AE.AM
C/m hai ΔACE∽ΔAMC (A chung;góc $\overset{\frown}{ACD}=\overset{\frown}{AMD}$ cùng chắn cung AD và AMD=CMA cmt ⇒$\overset{\frown}{ACE}=\overset{\frown}{AMC}$)…
4/C/m NI//CD. Do cung AC=AD ⇒$\overset{\frown}{CBA}=\overset{\frown}{AMD}$(Góc nội tiếp chắn các cung bằng nhau) hay NMI=NBI⇒M và B cùng làm với hai đầu đoạn thẳng NI những góc bằng nhau⇒MNIB nội tiếp⇒NMB+NIM=2v. mà NMB=1v(cmt)⇒NIB=1v hay NI⊥AB.Mà CD⊥AB(gt) ⇒NI//CD.
5/Chứng tỏ N là tâm đường tròn nội tiếp ΔICM.
Ta phải C/m N là giao điểm 3 đường phân giác của ΔCIM.

- Theo c/m ta có MN là phân giác của $\overset{\frown}{CMI}$
- Do MNIB nội tiếp(cmt) ⇒$\overset{\frown}{NIM}=\overset{\frown}{NBM}$(cùng chắn cung MN)
  Góc $\overset{\frown}{MBC}=\overset{\frown}{MAC}$(cùng chắn cung CM)
  Ta lại có $\overset{\frown}{CAN}$=1v(góc nội tiếp$\overset{\frown}{ACB}$=1v);$\overset{\frown}{NIA}$=1v(vì $\overset{\frown}{NIB}$=1v)⇒ACNI nội tiếp⇒$\overset{\frown}{CAN}=\overset{\frown}{CIN}$(cùng chắn cung CN)⇒$\overset{\frown}{CIN}=\overset{\frown}{NIM}$⇒IN là phân giác $\overset{\frown}{CIM}$

Vậy N là tâm đường tròn……

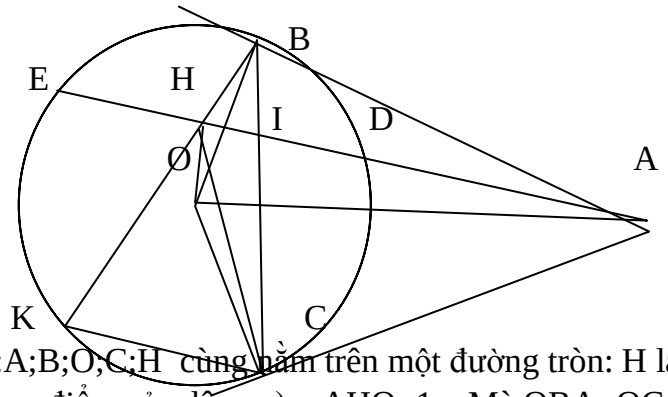
Bài 13:

Cho (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn.Vẽ các tiếp tuyến AB;AC và cát tuyến ADE.Gọi H là trung điểm DE.

1. C/m A;B;H;O;C cùng nằm trên 1 đường tròn.
2. C/m HA là phân giác của góc $\overset{\frown}{BHC}$.

3. Gọi I là giao điểm của BC và DE.C/m AB^2=AI.AH.
4. BH cắt (O) ở K.C/m AE//CK.

Hình 13



1/C/m:A;B;O;C;H cùng nằm trên một đường tròn: H là trung điểm EB⇒OH⊥ED(đường kính đi qua trung điểm của dây …)⇒AHO=1v. Mà OBA=OCA=1v (Tính chất tiếp tuyến) ⇒A;B;O;H;C cùng nằm trên đường tròn đường kính OA.

2/C/m HA là phân giác của góc BHC.

Do AB;AC là 2 tiếp tuyến cắt nhau ⇒$\widehat{BAO}=\widehat{OAC}$ và AB=AC

⇒cung AB=AC(hai dây băơng nhau của đường tròn đkOA) mà $\widehat{BHA}=\widehat{BOA}$(Cùng chắn cung AB) và $\widehat{COA}=\widehat{CHA}$(cùng chắn cung AC) mà cung AB=AC ⇒$\widehat{COA}=\widehat{BOH}$⇒ $\widehat{CHA}=\widehat{AHB}$⇒đpcm.

3/Xét hai tam giác ABH và AIB (có A chung và CBA=BHA hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) ⇒ΔABH∽ΔAIB⇒đpcm.

4/C/m AE//CK.

Do góc $\widehat{BHA}=\widehat{BCA}$(cùng chắn cung AB) và sđ $\widehat{BKC}=\frac{1}{2}$ Sđ cungBC(góc nội tiếp)

Sđ $\widehat{BCA}=\frac{1}{2}$ sđ cung BC(góc giữa tt và 1 dây)

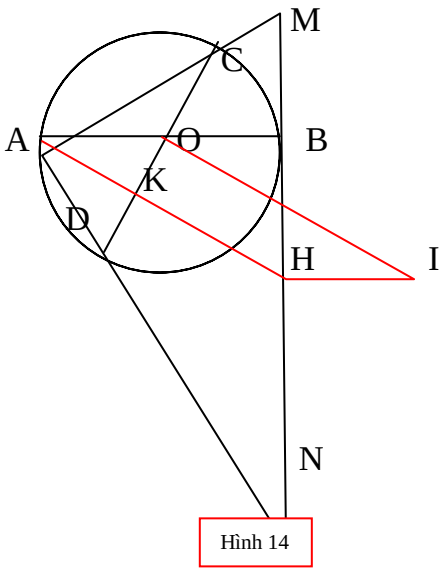
⇒$\widehat{BHA}=\widehat{BKC}$⇒CK//AB

Bài 14:

Cho (O) đường kính AB=2R;xy là tiếp tuyến với (O) tại B. CD là 1 đường kính bất kỳ.Gọi giao điểm của AC;AD với xy theo thứ tự là M;N.

1. Cmr:MCDN nội tiếp.
2. Chứng tỏ:AC.AM=AD.AN
3. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác MCDN và H là trung điểm MN.Cmr:AOIH là hình bình hành.
4. Khi đường kính CD quay xung quanh điểm O thì I di động trên đường nào?

1/ C/m MCDN nội tiếp:
ΔAOC cân ở O⇒$\widehat{OCA}=\widehat{CAO}$; góc CAO=ANB(cùng phụ với góc AMB)⇒góc ACD=ANM.
Mà góc ACD+DCM=2v
⇒DCM+DNM=2v⇒ DCMB nội tiếp.



Hình 14

MN⇒IH⊥MN là IO⊥CD.Do AB⊥MN;IH⊥MN⇒AO//IH. Vậy cách dựng I:Từ O dựng đường vuông góc với CD.Từ trung điểm H của MN dựng đường vuông góc với MN.Hai đường này cách nhau ở I.

•Do H là trung điểm MN⇒Ahlà trung tuyến của Δvuông AMN⇒ANM=NAH.Mà $\overset{\frown}{ANM}=\overset{\frown}{BAM}=\overset{\frown}{ACD}$(cmt)⇒$\overset{\frown}{DAH}=\overset{\frown}{ACD}$.

Gọi K là giao điểm AH và DO do $\overset{\frown}{ADC}+\overset{\frown}{ACD}$=1v⇒$\overset{\frown}{DAK}+\overset{\frown}{ADK}$=1v hay ΔAKD vuông ở K⇒AH⊥CD mà OI⊥CD⇒OI//AH vậy AHIO là hình bình hành.

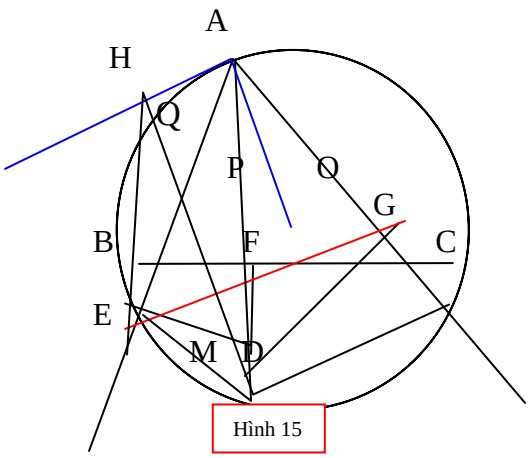
4/Quỹ tích điểm I:

Do AOIH là hình bình hành ⇒IH=AO=R không đổi⇒CD quay xung quanh O thì I nằm trên đường thẳng // với xy và cách xy một khoảng bằng R

Bài 15:

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O.Gọi D là 1 điểm trên cung nhỏ BC.Kẻ DE;DF;DG lần lượt vuông góc với các cạnh AB;BC;AC.Gọi H là hình chiếu của D lên tiếp tuyến Ax của (O).

1. C/m AHED nội tiếp
2. Gọi giao điểm của AH với HB và với (O) là P và Q;ED cắt (O) tại M.C/m HA.DP=PA.DE
3. C/m:QM=AB
4. C/m DE.DG=DF.DH
5. C/m:E;F;G thẳng hàng.(đường thẳng Sim sơn)



Hình 15

1/C/m AHED nội tiếp(Sử dụng hai điểm H;E cùng làm hành với hai đầu đoạn thẳng AD…)

2/C/m HA.DP=PA.DE

Xét hai tam giác vuông đồng dạng: HAP và EPD (Có HPA=EPD đđ)

3/C/m QM=AB:

Do $\Delta HPA \backsim \Delta EDP \Rightarrow \overset{\frown}{HAB} = \overset{\frown}{HDM}$

Mà sđ$\overset{\frown}{HAB} = \frac{1}{2}$ sđ cung AB;

SđHDM$= \frac{1}{2}$ sđ cung QM$\Rightarrow$ cung AM=QM$\Rightarrow$AB=QM

4/C/m: DE.DG=DF.DH .

Xét hai tam giác DEH và DFG có:

Do EHAD nội tiếp $\Rightarrow \overset{\frown}{HAE} = \overset{\frown}{HDE}$(cùng

Và $\overset{\frown}{EHD} = \overset{\frown}{EAD}$(cùng chắn cung ED)(2)

Vì $\hat{F} = \hat{G} = 90^o \Rightarrow$DFGC nội tiếp$\Rightarrow \overset{\frown}{FDG} = \overset{\frown}{FCG}$(cùng chắn cung FG)(3)

$\overset{\frown}{FGD} = \overset{\frown}{FCD}$(cùng chắn cung FD)(4)

Nhưng $\overset{\frown}{FCG} = \overset{\frown}{BCA} = \overset{\frown}{HAB}$(5).Từ (1)(3)(5)$\Rightarrow \overset{\frown}{EDH} = \overset{\frown}{FDG}$(6).

Từ (2);(4) và $\overset{\frown}{BCD} = \overset{\frown}{BAD}$(cùng chắn cungBD)$\Rightarrow \overset{\frown}{EHD} = \overset{\frown}{FGD}$(7)

Từ (6)và (7)$\Rightarrow \Delta EDH \backsim \Delta FDG \Rightarrow \frac{ED}{DF} = \frac{DH}{DG} \Rightarrow$đpcm.

5/C/m: E;F;G thẳng hàng:

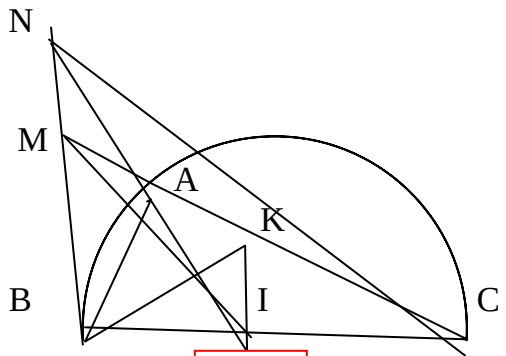
Ta có $\overset{\frown}{BFE} = \overset{\frown}{BDE}$(cmt)và $\overset{\frown}{GFC} = \overset{\frown}{CDG}$(cmt)

Do ABCD nội tiếp$\Rightarrow \overset{\frown}{BAC} + \overset{\frown}{BMC} = 2v$;do GDEA nội tiếp$\Rightarrow \overset{\frown}{EDG} + \overset{\frown}{EAG} = 2v. \Rightarrow \overset{\frown}{EDG} = \overset{\frown}{BDC}$ mà $\overset{\frown}{EDG} = \overset{\frown}{EDB} + \overset{\frown}{BDG}$ và $\overset{\frown}{BCD} = \overset{\frown}{BDG} + \overset{\frown}{CDG} \Rightarrow \overset{\frown}{EDB} = \overset{\frown}{CDG} \Rightarrow \overset{\frown}{GFC} = \overset{\frown}{BEF} \Rightarrow$E;F;G thẳng hàng.

Bài 16:

Cho tam giác ABC có $\widehat{A}$=1v;AB<AC.Gọi I là trung điểm BC;qua I kẻ IK⊥BC(K nằm trên BC).Trên tia đối của tia AC lấy điểm M sao cho MA=AK.

1. Chứng minh:ABIK nội tiếp được trong đường tròn tâm O.
2. C/m góc $\overset{\frown}{BMC}=2\overset{\frown}{ACB}$
3. Chứng tỏ $BC^2=2AC.KC$
4. AI kéo dài cắt đường thẳng BM tại N.Chứng minh AC=BN
5. C/m: NMIC nội tiếp.



Hình 16

1/C/m ABIK nội tiếp (tự C/m)

2/C/m $\overset{\frown}{BMC}=2\overset{\frown}{ACB}$ do AB⊥MK và MA=AK(gt)⇒ΔBMK cân ở B⇒$\overset{\frown}{BMA}=\overset{\frown}{AKB}$ Mà $\overset{\frown}{AKB}=\overset{\frown}{KBC}+\overset{\frown}{KCB}$ (Góc ngoài tam giac KBC). Do I là trung điểm BC và KI⊥BC(gt) ⇒ΔKBC cân ở K

⇒$\overset{\frown}{KBC}=\overset{\frown}{KCB}$ Vậy $\overset{\frown}{BMC}=2\overset{\frown}{ACB}$

3/C/m $BC^2=2AC.KC$

Xét 2 Δ vuông ACB và ICK có $\widehat{C}$ chung⇒ΔACB∽ΔICK

$\Rightarrow \frac{AC}{IC}=\frac{CB}{CK}\Rightarrow IC=\frac{BC}{2}\Rightarrow \frac{AC}{\frac{BC}{2}}=\frac{BC}{CK}\Rightarrow$đpcm

4/C/m AC=BN

Do $\overset{\frown}{AIB}=\overset{\frown}{IAC}+\overset{\frown}{ICA}$(góc ngoài ΔIAC) và ΔIAC Cân ở I⇒$\overset{\frown}{IAC}=\overset{\frown}{ICA}$ ⇒$\overset{\frown}{AIB}=2\overset{\frown}{IAC}$(1). Ta lại có $\overset{\frown}{BKM}=\overset{\frown}{BMK}$ và $\overset{\frown}{BKM}=\overset{\frown}{AIB}$(cùng chắn cung AB-tứ giác AKIB nội tiếp) ⇒$\overset{\frown}{AIB}=\overset{\frown}{BMK}$(2) mà $\overset{\frown}{BMK}=\overset{\frown}{MNA}+\overset{\frown}{MAN}$(góc ngoài tam giác MNA) Do ΔMNA cân ở M(gt)⇒$\overset{\frown}{MAN}=\overset{\frown}{MNA}$⇒$\overset{\frown}{BMK}=2\overset{\frown}{MNA}$(3)

Từ (1);(2);(3)⇒$\overset{\frown}{IAC}=\overset{\frown}{MNA}$ và $\overset{\frown}{MAN}=\overset{\frown}{IAC}$(đ đ)⇒…

5/C/m NMIC nội tiếp:

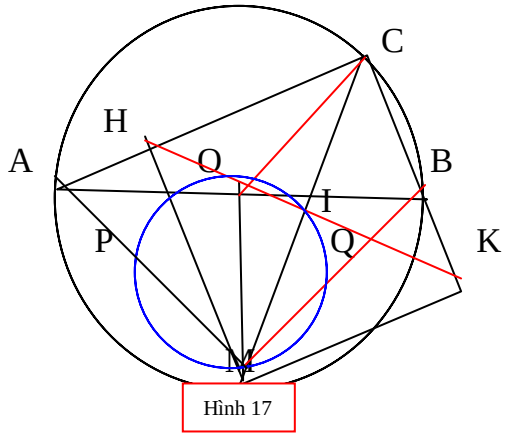
do $\overset{\frown}{MNA}=\overset{\frown}{ACI}$ hay $\overset{\frown}{MNI}=\overset{\frown}{MCI}$⇒ hai điểm N;C cùng làm thành với hai đầu…)

Bài 17:

Cho (O) đường kính AB cố định,điểm C di động trên nửa đường tròn.Tia phân giác của $\overset{\frown}{ACB}$ cắt (O) tai M.Gọi H;K là hình chiếu của M lên AC và AB.

1. C/m:MOBK nội tiếp.

2. Tứ giác CKMH là hình vuông.
3. C/m H;O;K thẳng hàng.
4. Gọi giao điểm HKvà CM là I.Khi C di động trên nửa đường tròn thì I chạy trên đường nào?

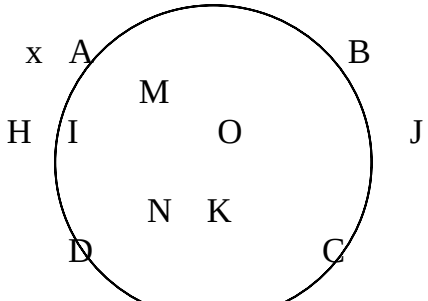


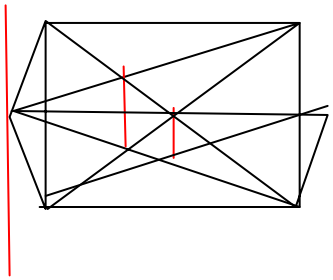
Hình 17

1/C/m:BOMK nội tiếp:
Ta có $\overset{\frown}{BCA}$=1v(góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)
CM là tia phân giác của góc $\overset{\frown}{BCA}\Rightarrow\overset{\frown}{ACM}=\overset{\frown}{MCB}=45^o$.
$\Rightarrow$cung$AM=MB=90^o$.
$\Rightarrow$dây AM=MB có O là trung điểm AB $\Rightarrow$OM$\perp$AB hay góc$\overset{\frown}{BOM}=\overset{\frown}{BKM}$=1v
$\Rightarrow$BOMK nội tiếp.

2/C/m CHMK là hình vuông:
Do Δ vuông HCM có 1 góc bằng 45° nên ΔCH[illegible]ng tự CK=MK
Do C=H=K=1v $\Rightarrow$CHMK là hình chữ nhật có [illegible]à hình vuông.
3/C/m H,O,K thẳng hàng:
Gọi I là giao điểm HK và MC;do MHCK là hình vuông$\Rightarrow$HK$\perp$MC tại trung điểm I của MC.Do I là trung điểm MC$\Rightarrow$OI$\perp$MC(đường kính đi qua trung điểm một dây…)
Vậy HI$\perp$MC;OI$\perp$MC và KI$\perp$MC$\Rightarrow$H;O;I thẳng hàng.
4/Do góc $\overset{\frown}{OIM}$=1v;OM cố định$\Rightarrow$I nằm trên đường tròn đường kính OM.
-Giới hạn:Khi C$\equiv$B thì I$\equiv$Q;Khi C$\equiv$A thì I$\equiv$P.Vậy khi C di động trên nửa đường tròn (O) thì I chạy trên cung tròn PHQ của đường tròn đường kính OM.

Bài 18:
Cho hình chữ nhật ABCD có chiều dài AB=2a,chiều rộng BC=a.Kẻ tia phân giác của góc ACD,từ A hạ AH vuông góc với đường phân giác nói trên.
1/Chứng minhAHDC nt trong đường tròn tâm O mà ta phải định rõ tâm và bán kính theo a.
2/HB cắt AD tại I và cắt AC tại M;HC cắt DB tại N.Chứng tỏ HB=HC. Và AB.AC=BH.BI
3/Chứng tỏ MN song song với tiếp tuyến tại H của (O)
4/Từ D kẻ đường thẳng song song với BH;đường này cắt HC ở K và cắt (O) ở J.Chứng minh HOKD nt.





•Xét hai ΔHCAΔABI có A=H=1v và ABH=ACH(cùng chắn cung AH)

$\Rightarrow \Delta HCA \backsim \Delta ABI \Rightarrow \frac{HC}{AB} = \frac{AC}{BI}$ mà HB=HC⇒đpcm

3/Gọi tiếp tuyến tại H của (O) là Hx.

•DoAH=HD;AO=HO=DO⇒ΔAHO=ΔHOD⇒$\widehat{AOH}=\widehat{HOD}$ màΔAOD cân ở O⇒OH⊥AD và OH⊥Hx(tính chất tiếp tuyến) nên AD//Hx(1)

•Do cung AH=HD ⇒$\widehat{ABH}=\widehat{ACH}=\widehat{HBD}$⇒$\widehat{HBD}=\widehat{ACH}$ hay $\widehat{MBN}=\widehat{MCN}$ hay 2 điểm B;C cùng làm với hai đầu đoạn MN những góc bằng nhau ⇒MNCB nội tiếp⇒NMC=NBC(cùng chắn cung NC) mà $\widehat{DBC}=\widehat{DAC}$ (cùng chắn cung DC) ⇒NMC=DAC⇒MN//DA(2).Từ (1)và (2)⇒MN//Hx.

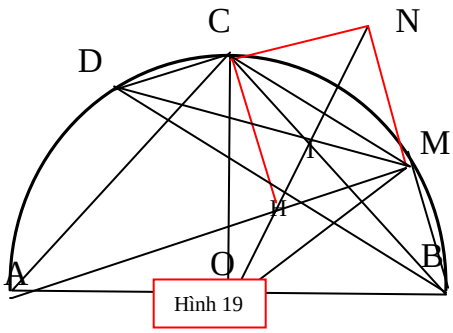
4/C/m HOKD nội tiếp:

Do DJ//BH⇒$\widehat{HBD}=\widehat{BDJ}$ (so le)⇒cung BJ=HD=AH=$\frac{AD}{2}$ mà cung AD=BC⇒cung BJ=JC⇒H;O;J thẳng hàng tức HJ là đường kính ⇒HDJ= 1v .Góc HJD=ACH(cùng chắn 2 $\overset{\frown}{\text{cung}}$ bằng nhau)⇒OJK=QCK⇒CJ cùng làm với hai đầu đoạn OK những góc bằng nhau⇒OKCJ nội tiếp ⇒KOC=KJC (cùng chắn cung KC);KJC=DAC(cùng chắn cung DC)⇒KOC=DAC⇒OK//AD mà AD⊥HJ⇒OK⊥HO⇒HDKC nội tiếp.

Bài 19:

Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB,bán kính OC⊥AB.Gọi M là 1 điểm trên cung BC.Kẻ đường cao CH của tam giác ACM.

1. Chứng minh AOHC nội tiếp.
2. Chứng tỏ ΔCHM vuông cân và OH là phân giác của góc $\overset{\frown}{COM}$.
3. Gọi giao điểm của OH với BC là I.MI cắt (O) tại D.Cmr:CDBM là hình thang cân.
4. BM cắt OH tại N.Chứng minh ΔBNI và ΔAMC đồng dạng,từ đó suy ra: BN.MC=IN.MA.



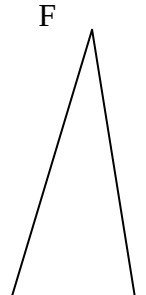
Hình 19

1/C/m AOHC nội tiếp:
(học sinh tự chứng minh)
2/•C/mΔCHM vuông cân:
Do OC⊥AB trại trung điểm O⇒Cung AC=CB=90°.
Ta lại có:
Sđ $\overset{\frown}{CMA}=\frac{1}{2}$ sđcung AC=45°.⇒ΔCHM vuông cân ở H
•C/m OH là phân giác của góc COM:Do ΔCHM vuông cân ở H⇒CH=HM; CO=OB(bán kính);OH chung⇒ΔCHO=ΔHOM⇒COH=HOM⇒đpcm.
3/C/m:CDBM là thang cân:
Do ΔOCM cân ở O có OH là phân giác⇒OH là đường trung trực của CM mà I∈OH⇒ΔICM cân ở I⇒ICM=IMC mà ICM=$\overset{\frown}{MDB}$(cùng chắn cung $\overset{\frown}{BM}$)
⇒$\overset{\frown}{IMC}$=$\overset{\frown}{IDB}$ hay CM//DB.Do ΔIDB cân ở I⇒$\overset{\frown}{IDB}$=$\overset{\frown}{IBD}$ và $\overset{\frown}{MBC}$=$\overset{\frown}{MDC}$(cùng chắn cungCM) nên CDB=MBD⇒CDBM là thang cân.
4/•C/m BNI và ΔAMC đồng dạng:
Do OH là đường trung trực của CM và N∈OH ⇒CN=NM.
Do $\overset{\frown}{AMB}$=1v⇒$\overset{\frown}{HMB}$=1v hay NM⊥AM mà CH⊥AM⇒CH//NM,có góc $\overset{\frown}{CMH}$=45°⇒$\overset{\frown}{NHM}$=45°⇒ΔMNH vuông cân ở M vậy CHMN là hình vuông ⇒INB=CMA=45°.
•Do $\overset{\frown}{CMBD}$ là thang cân⇒CD=BM⇒ cungCD=BM mà cung AC=CB⇒cungAD=CM…
và $\overset{\frown}{CAM}$=$\overset{\frown}{CBM}$(cùng chắn cung CM)
⇒ΔINB=ΔCMA⇒ đpcm

Bài 20:

Cho Δ đều ABC nội tiếp trong (O;R).Trên cnạh AB và AC lấy hai điểm M;N sao cho BM=AN.

1. Chứng tỏ ΔOMN cân.
2. C/m :OMAN nội tiếp.
3. BO kéo dài cắt AC tại D và cắt (O) ở E.C/m $BC^2+DC^2=3R^2$.
4. Đường thẳng CE và AB cắt nhau ở F.Tiếp tuyến tại A của (O) cắt FC tại I;AO kéo dài cắt BC tại J.C/m BI đi qua trung điểm của AJ.



1/C/m OMN cân:
Do ΔABC là tam giác đều nội tiếp trong (O)⇒AO và BO là phân giác của ΔABC
⇒OAN=OBM=30°; OA=OB=R và BM=AN(gt)⇒ΔOMB=ΔONA
⇒OM=ON ⇒OMN cân ở O.
2/C/m OMAN nội tiếp: