

PHẦN
HƯỚNG DẪN, GIẢI ĐÁP BÀI TẬP

Tailieu.vn

HƯỚNG DẪN, GIẢI ĐÁP BÀI TẬP

Chương I

1. Cấu trúc vành của đa thức theo một biến.

1.1 Vành con các đa thức theo một biến của một vành.

1.1 – (1) Đặt $B = \{m + n\sqrt{2} \mid m, n \in \mathbb{Z}\} \subset R$. Một mặt $B \subset \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Mặt khác, B là vành con của R chứa $\mathbb{Z}$ và $\sqrt{2}$ nên $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \subset B$.

1.1 – (2) Đặt $B = \{m + n\sqrt[3]{2} \mid m, n \in \mathbb{Z}\} \in R$. Hiển nhiên $B \subset \mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$.

Vì $u = \sqrt[3]{2} \in B$ nên $u^2 = \sqrt[3]{4} \in \mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$ nhưng $u^2 \notin B$. Thật vậy, từ

$$u^2 = m + nu, \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

ta có

$$2 = u^3 = (m + nu)u = mn + (m + n^2)u$$

tương đương với hệ phương trình

$$\begin{cases} mn = 2 \\ m + n^2 = 0 \end{cases}$$

vô nghiệm trên $\mathbb{Z}$.

1.1 – (3) Với $u = \sqrt{2} - \sqrt[3]{2}$, người ta có đa thức

$$1 + 36u + 12u^2 + 6u^3 - 6u^4 + u^6 = 0$$

1.2. Nhúng một vành vào vành đa thức theo một biến siêu việt

1.2 – (1) Với $f, g, h \in A^{(N)}$, ta có

$$[f(g+h)](i) = \sum_{j+k=i} f(j)(g+h)(k) = \sum_{j+k=i} f(j)(g(k) + h(k))$$

$$= \sum_{j+k=i} f(j)g(k) + \sum_{j+k=i} f(j)h(k) = (fg)(i) + fh(i)$$

$$= (fg + fh)(i)$$

Do đó $F(g + h) = fg + fh$. Đẳng thức $(g + h)f = gf + hf$ được chứng minh tương tự.

1.3 Tính chất phổ dụng của vành đa thức $A[x]$.

1.3 – (1) Đồng cấu hao hàm $j : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}$ mở rộng được thành một đồng cấu vành $j : \mathbf{Z}[x] \rightarrow \mathbf{R}$ sao cho $j(x) = \sqrt{2}$. Vì

$$\text{Im } j = \mathbf{Z}[\sqrt{2}] = \{m + n\sqrt{2} \mid m, n \in \mathbf{Z}\},$$

(xem §1.1 Bài tập (1)) và

$$\text{Ker } j = \{(x^2 - 2)g \mid g \in \mathbf{Z}[x]\} = (x^2 - 2)\mathbf{Z}[x]$$

idêan của vành $\mathbf{Z}[x]$ gồm các bội của đa thức $x^2 - 2 \in \mathbf{Z}[x]$. Định lý cơ bản cho đẳng cấu

$$\mathbf{Z}[x] / (x^2 - 2) \cong \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$$

1.3 – (2) Đồng cấu bao hàm $j : K \rightarrow K[x]$ có $\text{Im } j = K$. Vì K là vành giao hoán, $ag = ga$ với mọi $a \in K$ và mọi $g \in K[x]$ nên theo tính chất phổ dụng, tồn tại đồng cấu vành duy nhất $E_g : K[x] \rightarrow K[x]$ sao cho

$$E_g(a) = a \text{ với mọi } a \in K \text{ và } E_g(x) = g$$

$$\text{Với mọi đa thức } f = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in K[x],$$

$$E_g(f) = \sum_{i=0}^n E_g(a_i) E_g(x)^i = \sum_{i=0}^n a_i g^i$$

nghĩa là $E_g(f) \in K[x]$ thu được bằng cách thay trong f biến x bởi g .

ii) Cho $a \in K$, theo trên có tự đồng cấu E_{a+x} của vành $K[x]$ và cũng có tự đồng cấu E_a của $K[x]$ sao cho

$$(E_{a+x} \circ E_a)(f) = (E_{a+x})(E_a(f)) = f.$$

Vậy E_{a+x} là một tự đẳng cấu của vành $K[x]$.

1.4 Bậc của đa thức.

$$1.4 - (1) f + \bar{0} \in \mathbf{Z}_6$$

$$1.4 - (2) fg = \bar{0} \in \mathbf{Z}_{12}$$

$$1.4 - (3) \text{ Từ } a_0 + a_1 x \in \mathbf{Z}_8[x] \text{ (} \bar{a}_1 \neq \bar{0} \text{) sao cho}$$

$$(a_0 + a_1 x)^2 = \bar{1}$$

Suy ra $a_0 = \bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}$ và $a_1 = \bar{4}$. Các đa thức bậc 1 của $\mathbf{Z}_8[x]$ cần tìm là

$$\bar{1} + \bar{4}x, \bar{3} + \bar{4}x, \bar{5} + \bar{4}x \text{ và } \bar{7} + \bar{4}x$$

$$1.4 - (4) I_A + ax \text{ khả nghịch trong vành } A[x].$$

2. Phép chia đa thức.

2 – (1) Hệ tử dẫn đầu của g phải là một trong các phân tử

$$\bar{1}, \bar{3}, \bar{7}, \bar{9} \in \mathbf{Z}_{10}$$

Thương và dư là các đa thức sau đây của $\mathbf{Z}_{10}[x]$

$$q = \bar{7}x^5 + \bar{5}x^4 + \bar{5}x^3 + \bar{3}x + \bar{4}$$

$$r = \bar{3}x + \bar{6}$$

2 – (2) $\mathbf{Z}_5[x]$

2 – (3) $n = 2, 3$ hay 6

2- (4) a) Một đa thức có hệ tử hằng $a_0 = 0$ có dạng xq với $q \in F[x]$.

b) Xét hợp thành của đồng cấu bao hàm và phép chiếu

$$F \xrightarrow{j} F[x] \xrightarrow{p} F[x] / (x)$$

2 – (5) a) Một đa thức có hệ số hằng chẵn có dạng

$$2f + xg \quad f, g \in X[x]$$

b) Giả sử $(2, x) = (h)$ với một đa thức $h \in \mathbf{Z}[x]$, suy ra $h = 2a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ và $h = \pm 1$ nên có mâu thuẫn

3. Hàm đa thức một biến. Nghiệm của đa thức.

3 – (1) Giả sử trường F có q phần tử là $a_1, \dots, a_q$. Với mỗi $i = 1, \dots, q$ xét đa thức

$$f_i = \prod_{1 \leq j \neq i \leq q} (x - a_j) \in F[x]$$

Ta có bậc $\deg f_i = q - 1$ và đặt

$$b_i = f_i(a_i) = \prod_{j \neq i} (a_i - a_j) \neq 0$$

thì có các đa thức

$$g_i = b_i^{-1} f_i \in F[x] \quad i = 1, \dots, q$$

sao cho

$$g_i(a_i) = 1 \text{ và } g_j(a_i) = 0 \text{ (} j \neq i \text{)}$$

Với mọi hàm $\varphi : F \rightarrow F$, đa thức

$$f = \sum_{i=1}^q \varphi(a_i) g_i \in F[x],$$

Với hàm đa thức tương ứng

$$\bar{f} = \sum_{i=1}^q \varphi(a_i)g_i : F \rightarrow F$$

sao cho với mỗi $i = 1, \dots, q$

$$\bar{f}(a_i) = \varphi(a_i)$$

Cho nên $\varphi = \bar{f}$

3 – (2) i) Vì với mỗi $i = 1, \dots, q$

$$\bar{h}(a_i) = a_i^q - a_i = 0_F,$$

bằng quy nạp suy ra

$$h = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n),$$

ii) $f - g = kh$ nếu và chỉ nếu $(\bar{f} - g) = 0$

3 – (3) mỗi phần tử của $\mathbf{Z}_6$ đều là nghiệm của $x^3 - x$.

3 – (4) a) Đa thức f có thể viết

$$f = (x - \bar{2})(x - \bar{3}) = (x - \bar{6})(x - \bar{11})$$

Suy ra chỉ có các phần tử $\bar{2}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{11} \in \mathbf{Z}_{12}$ là nghiệm của f .

b) Tất cả các nghiệm của g trong $\mathbf{Z}_{12}$ là $\bar{0}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{8}, \bar{9}$ và $\bar{11}$

3 – (5) $a \in D$ là nghiệm nên

$$f = (x - a)g \text{ với } g \in D[x]$$

$b \in D$ là nghiệm nên

$$0_D = \bar{f}(b) = (b - a)\bar{g}(b)$$

Vì $b - a \neq 0$, suy ra $g = (x - b)q, q \in D[x]$

3 – (6) Dư của phép chia có dạng $c_1x + c_0$ với

$$c_1 = \frac{r - r'}{a - b} \text{ và } c_0 = \frac{ar' - br}{a - b}$$

3 – (7) $0_D \neq f \in D[x]$ với bậc $f = n$ có nhiều nhất n nghiệm trong D .

3 – (8) f chia hết cho $(x - 1)(x - 2) = x^2 - 3x + 2$ (Bài tập (5)).

Suy ra

$$f = (x - 1)(x - 2)[(x - 2)^{2n-2} - (x - 2)^{2n-3} + \dots - (x - 2) + 1 + (x - 1)^{n-1} + (x - 1)^{n-2} + \dots + (x - 1) + 1].$$

3 – (9) Từ $f(1) = 0$ và $f = (x - 1)g$, với $g \in \mathbf{Z}[x]$ sao cho $g(1) = 0$ suy ra $a = n$ và $b = -(n + 1)$.

Thương phải tìm là

$$q = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \dots + 3x^2 + 2x + 1.$$

3 – (10) Dư là $\cos n\theta + x \sin n\theta$.

3 – (11) Đẳng thức của phép chia viết

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = (x-c)(q_{n-1} x^{n-1} + \dots + q_1 x + q_0) + r_0$$

trong đó dư $r_0 = \tilde{f}(c) \in A$. Cân bằng các hệ tử ở hai vế cho suy

ra :

$$\begin{aligned} q_{n-1} &= a_n \\ q_{n-2} &= cq_{n-1} + a_{n-1} \\ &\dots = \dots \\ q_0 &= cq_1 + a_1 \\ r_0 &= cq_0 + a_0 \end{aligned}$$

Vậy các hệ tử $q_{n-1}, q_{n-2}, \dots, q_0$ của thương và dư r_0 thu được như sơ đồ Horner miêu tả.

Áp dụng :

	5	0	-2	1	7	-3
-2	5	-10	18	-35	77	-157

Thương là $q = 5x^4 - 10x^3 + 18x^2 - 35x + 77$ và dư là $r = -157$

4. Cấu trúc của vành đa thức theo nhiều biến.

4 – (2) Có thể viết

$$\begin{aligned} f &= y[(x+1)^n - 1] - x[(y+1)^n - 1] \\ &= xy \sum_{i=1}^{n-1} [(x+1)^i - (y+1)^i] \\ &= xy(x-y)g \end{aligned}$$

với

$$g = \sum_{i=1}^{n-1} \left[\sum_{j+k=i-1} (x+1)^j (y+1)^k \right]$$

4 – (3) Xem $f \in \mathbf{Z}[y, z][x]$, vì $f(-y-z) = 0$ nên

$$f = (x + y + z)g, \quad g \in \mathbf{Z}[x, y, z]$$

g là đẳng cấp bậc 2 có dạng

$$g = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + bxy + b'xz + b''yz$$

Thay và cân bằng hệ số thì định được

$$a = a' = a'' = 1 \text{ và } b = b' = b'' = -1.$$

$$4 - (4) \quad f_1 + f_2 + f_3 = 3x_1, \quad f_1 f_2 f_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1 x_2 x_3.$$

4 - (6) Vành $F^{F'}$ các hàm từ F' vào F và vành con $F[u_1, \dots, u_r]$ các hàm đa thức có cùng số phân tử

4 - (7) Các đa thức $f \in F[x_1, \dots, x_r]$ sao cho $\tilde{f} = 0$ tạo thành $\text{Ker } \varphi$

của đồng cấu vành $f \mapsto \tilde{f}$. Cần chứng minh $\text{Ker } \varphi = I$ với I là ideal của vành $F[x_1, \dots, x_r]$ sinh bởi r đa thức

$$h_i = x_i^q - x_i, \quad i = 1, \dots, r$$

4 - (8) $f = (x + y + z)g$ nếu chỉ và chỉ nếu g là đa thức đẳng cấp bậc 2, tức là có dạng

$$g = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 y^2 + \alpha_3 z^2 + \beta_1 xz + \beta_2 yz + \beta_3 xy, \quad \alpha_i, \beta_i \in A$$

Thay và cân bằng các hệ số, thu được các hệ thức cần tìm.

5. Đa thức đối xứng

$$5 - (1) \text{ a) } f = a(x^2 + y^2 + z^2) + b(xy + xz + yz)$$

$$\text{b) } f = a(x^3 + y^3 + z^3) + b(x^2 y + xy^2 + x^2 z + xz^2 + y^2 z + yz^2) + cxyz$$

$$5 - (2) \text{ i) Vì } f_n(y, y, z) = f_n(z, y, z) = f_n(x, z, z) = 0 \text{ nên}$$

$$f_n = (x - y)(x - z)(y - z)g_n, \quad g_n \in Z[x, y, z]$$

$$\text{ii) } g_2 = 1, \quad g_3 = x + y + z, \quad g_4 = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz$$

$$\text{iii) Vì } g_n \text{ là đa thức đối xứng đẳng cấp bậc } n + 1 - 3 = n - 2,$$

Thay và cân bằng các hệ số thì có tất cả hệ số của g đều bằng 1.

$$5 - (3) \text{ (i) Với số mũ } n \text{ lẻ, vì}$$

$$f_n(-y, y, z) = f_n(x, -z, z) = f_n(x, y, -x) = 0$$

nên

$$f = (x + y)(y + z)(z + x)g_n, \quad g_n[x, y, z]$$

$$\text{ii) } g_5 \text{ là đối xứng đẳng cấp bậc 2 nên có dạng}$$

$$g_5 = a(x^2 + y^2 + z^2) + b(xy + xz + yz)$$

Cân bằng hệ số tính được $a = b = 5$.

$$5 - (4)a) \quad \left(\frac{r}{2}\right) = \frac{1}{2}r(r-1)$$

$$b) \quad 2\left(\frac{r}{2}\right) + \left(\frac{r}{3}\right) = \frac{1}{6}r(r-1)(r+4)$$

$$5 - (5) a) \quad s_1s_2 - 3s_3$$

$$b) \quad s_1s_2 - s_3$$

$$c) \quad -s_1^3 + 4s_1s_3 - 8s_3$$

$$d) \quad s_1^2s_2^2 - 2s_1^3s_3 - 2s_2^3 + 4s_1s_2s_3 - s_3^2$$

$$e) \quad s_1^2s_2^3 - 4s_1^3s_3 - 4s_2^3 + 18s_1s_2s_3 - 27s_3^2$$

5 - (6) Đa thức không thay đổi khi chuyển vị trí hai biến bất kỳ.

$$f_1 = 3s_1^2 - 8s_2$$

$$f_2 = s_1^3 - 4s_1s_2 + 8s_3$$

$$f_3 = -s_1^4 + 4s_1^2s_2 - 8s_1s_3 + 16s_4$$

$$f_4 = s_1^2s_4 - s_3^2$$

$$5 - (7) a) \quad f = rs_1^2 - 8s_2$$

$$b) \quad f = (r-1)s_1^2 - 2rs_2$$

5 - (8) Trong vành $\mathbb{Z}_2[x_1, x_2, x_3]$,

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 = s_1^4$$

5 - (11) Hệ phương trình cho viết thành

$$\begin{cases} s_1^2 - 2s_2 &= 0, \\ s_1(4s_3 - s_1s_2) &= 0, \\ -s_2(3s_3 - s_1s_2) &= 2. \end{cases}$$

Từ đó suy ra $s_1^5 = 32$ và có

$$s_1 = 2\zeta, \quad s_2 = 2\zeta^2, \quad s_3 = \zeta^3$$

Trong đó ζ là một căn số bậc 5 của đơn vị. Như thế x_1, x_2, x_3 là các nghiệm số của phương trình

$$x^3 - 2\zeta x^2 + 2\zeta^2 x - \zeta^3 = 0$$

Phương trình này có 3 nghiệm là

$$\zeta, \quad -j\zeta, \quad j^2\zeta$$

với j là số phức

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vì căn số bậc 5 của đơn vị ζ có dạng

$$\zeta_k = \cos \frac{k2\pi}{5} + i \sin \frac{k2\pi}{5}, \quad k=0,1,2,3,4$$

hệ phương trình cho có tất cả 30 nghiệm, mỗi nghiệm là một hoán vị của $\zeta_k, -j\zeta_k, j^2\zeta_k$.