

# CHƯƠNG 1 : TẬP HỢP - LỰC LƯỢNG CỦA CÁC TẬP HỢP

## I. TẬP HỢP

1. Khái niệm về tập hợp
2. Quan hệ giữa các tập hợp
3. Các phép toán về tập hợp

## II. ÁNH XẠ

1. Định nghĩa
2. Tính chất
3. Toàn ánh - đơn ánh - song ánh
4. Ánh xạ ngược
5. Ánh xạ tích

## III. LỰC LƯỢNG CỦA CÁC TẬP HỢP

1. Tập hợp tương đương
2. Tập hợp đếm được
3. Tập hợp các lực lượng continuum

## I. TẬP HỢP

### 1. Khái niệm về tập hợp

[TOP](#)

Tập hợp là một khái niệm cơ bản của toán học hiện đại. Người ta thường mô tả tập hợp.

Ví dụ:

- Tập hợp các điểm trên đường thẳng thực.
- Tập hợp các nghiệm của phương trình  $x^2 + 5 = 0$ .

Các vật nằm trong một tập hợp được gọi là các phần tử của tập hợp.

Ta ký hiệu  $x \in A$  để chỉ  $x$  là phần tử của tập hợp  $A$  và  $x \notin A$  để chỉ  $x$  không là phần tử của tập hợp  $A$ .

Có hai cách để cho một tập hợp:

+ Cách 1: Liệt kê tất cả các phần tử của tập hợp

Ví dụ:  $A = \{a, b, c, d\}$ . Tập hợp  $A$  có 4 phần tử là  $a, b, c, d$ . Ta có  $a \in A$ ,  $1 \notin A$ .

+ Cách 2: Chỉ ra điều kiện phân biệt các phần tử của tập hợp với các vật không thuộc tập hợp đó.

Tập rỗng, ký hiệu  $\emptyset$ , là tập hợp không có phần tử nào.

### 2. Quan hệ giữa các tập hợp

[TOP](#)

Cho hai tập hợp A và B.

+ Nếu mỗi phần tử của B đều là phần tử của A thì ta nói tập B là một bộ phận hay là một tập hợp con của tập hợp A (hay B bao hàm trong A). Ký hiệu  $B \subset A$ .

Dĩ nhiên  $A \subset A$ .

Nếu  $B \subset A$  và  $B \neq A$  thì ta nói B là một bộ phận thực sự của A.

+ Hai tập A và B được gọi là bằng nhau nếu  $A \subset B$  và  $B \subset A$ . Ký hiệu  $A = B$ .

### 3. Các phép toán về tập hợp

[TOP](#)

Cho hai tập hợp A và B.

#### a. Hợp

Hợp của hai tập A và B là tập hợp gồm tất cả các phần tử thuộc ít nhất một trong hai tập hợp. Ký hiệu  $A \cup B$ .

Ta có  $A \cup B = \{x: x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$

Ví dụ: Cho  $A = \{a, b, c\}$  và  $B = \{b, c, e\}$ . Ta có  $A \cup B = \{a, b, c, e\}$ .

#### b. Giao

Giao của hai tập hợp A và B là tập hợp gồm tất cả các phần tử vừa thuộc A vừa thuộc B. Ký hiệu  $A \cap B$ .

Ta có  $A \cap B = \{x: x \in A \text{ và } x \in B\}$ .

Nếu  $A \cap B = \emptyset$  thì A và B được gọi là hai tập hợp rời nhau.

Phép hợp và giao có các tính chất như sau:

##### □ Tính giao hoán

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A.$$

##### □ Tính kết hợp

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

##### □ Tính phân phối

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

### c. Hiệu và phần bù

Hiệu của tập hợp A với tập hợp B là tập gồm tất cả các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B. Ký hiệu  $A \setminus B$ .

Ta có  $A \setminus B = \{x: x \in A \text{ và } x \notin B\}$ .

Nói chung  $A \setminus B \neq B \setminus A$

Nếu  $A \subset X$  thì  $X \setminus A$  được gọi là phần bù của tập A đối với X. Ký hiệu  $C_X^A$  hay  $A^c$ .

Ta có các công thức đối ngẫu De Morgan sau:

$$\text{i) } C_X(\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}) = \bigcap_{\alpha} (C_X A_{\alpha})$$

$$\text{ii) } C_X(\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}) = \bigcup_{\alpha} (C_X A_{\alpha}), \quad A_{\alpha} \subset X \quad \forall \alpha$$

### d. Họ tập hợp

Một họ tập hợp là một tập hợp mà mỗi phần tử là một tập hợp.

## II. ÁNH XẠ

### 1. Định nghĩa

[TOP](#)

Cho hai tập hợp X và Y. Nếu có qui luật f sao cho với mỗi phần tử  $x \in X$  ta có một và chỉ một phần tử  $y \in Y$  xác định theo qui luật f đó thì f được gọi là một ánh xạ từ tập X vào tập Y.

Ký hiệu  $f: X \rightarrow Y$  hay 
$$x \mapsto y = f(x)$$

Phần tử y ứng với phần tử x qua ánh xạ f được gọi là ảnh của x, còn x được gọi là tạo ảnh của y.

Ánh xạ f là không đổi (ánh xạ hằng) nếu  $\forall x \in X, f(x) = y_0$  với  $y_0 \in Y$ .

Ánh xạ  $f: X \rightarrow Y$  được gọi là ánh xạ đồng nhất

$$x \mapsto x$$

$$f(A) = \{y \in Y: y = f(x) \text{ với } x \in A\}$$

### 2. Tính chất

[TOP](#)

$$\text{i) } A = \emptyset \Leftrightarrow f(A) = \emptyset.$$

$$\text{ii) } A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B).$$

$$\text{iii) } f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

$$\text{iv) } f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

Giả sử  $B \subset Y$ .

$f^{-1}(B) = \{x \in X: f(x) \in B\}$  là tạo ảnh của B đối với ánh xạ f.

Ta có các tính chất:

Giả sử  $f: X \rightarrow Y$  và  $A \subset X$ ;  $C, D \subset Y$ .

i)  $C \subset D \Rightarrow f^1(C) \subset f^1(D)$ .

ii)  $f^1(C \cap D) = f^1(C) \cap f^1(D)$ .

iii)  $f^1(C \cup D) = f^1(C) \cup f^1(D)$ .

iv)  $f^1(C \setminus D) = f^1(C) \setminus f^1(D)$ .

v)  $A \subset f^1[f(A)]$

vi)  $f[f^1(C)] \subset C$ .

### 3. Toàn ánh, đơn ánh, song ánh

[TOP](#)

□ Định nghĩa:

Ảnh xạ  $f: X \rightarrow Y$  được gọi là một toàn ánh nếu  $f(X) = Y$ .

□ Định nghĩa:

Ảnh xạ  $f: X \rightarrow Y$  được gọi là một đơn ánh nếu :

$$\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

□ Định nghĩa:

Ảnh xạ  $f: X \rightarrow Y$  được gọi là một song ánh nếu  $f$  vừa là toàn ánh vừa là đơn ánh.

### 4. Ảnh xạ ngược

[TOP](#)

□ Định nghĩa:

Nếu  $f: X \rightarrow Y$  là một song ánh thì với mỗi phần tử  $y \in Y$  đều tồn tại duy nhất phần tử  $x \in X$  sao cho  $f(x) = y$ . Phép tương ứng xác định như thế từ  $Y$  vào  $X$  là một ảnh xạ. Ảnh xạ này được gọi là ảnh xạ ngược của ảnh xạ  $f$ . Ký hiệu:  $f^{-1}$ .

### 5. Ảnh xạ tích

[TOP](#)

□ Định nghĩa:

Giả sử  $f$  là một ảnh xạ từ  $X$  vào  $Y$ ,  $g$  là ảnh xạ từ  $Y$  vào  $Z$ . Khi đó với mỗi phần tử  $x$  thuộc  $X$  ta có phần tử  $y \in Y$ :  $y = f(x)$  và phần tử  $z \in Z$ :  $z = g(y) = g[f(x)]$ .

Vậy với mỗi  $x \in X$  đều có duy nhất phần tử  $z \in Z$ :  $z = g[f(x)] = h(x)$ .

Ảnh xạ  $h$  được gọi là ảnh xạ tích của các ảnh xạ  $f$  và  $g$ . Ký hiệu:  $h = g \circ f$ .

\* Nhận xét:

Nói chung  $g \circ f \neq f \circ g$ .

## III. LỰC LƯỢNG CỦA CÁC TẬP HỢP

### 1. Tập hợp tương đương

[TOP](#)

Tập hợp A được gọi là tập hữu hạn nếu ta có thể đếm được hết các phần tử của tập này.

Nếu mãi vẫn còn những phần tử của tập hợp A chưa được đếm tới thì tập hợp A được gọi là tập vô hạn.

**□ Định nghĩa:**

Hai tập hợp A và B gọi là tương đương nhau nếu có thể thiết lập một song ánh giữa hai tập hợp này. Ký hiệu:  $A \sim B$ .

**♦ Ví dụ:**

- a) Hai tập hợp A, B hữu hạn và có số phần tử bằng nhau thì tương đương nhau.
- b)  $A = \{ 1, 2, 3, \dots, n, \dots \}$  và  $B = \{ 2, 4, 6, \dots, 2n, \dots \}$  là tương đương nhau.

**\* Lưu ý:**

Một tập hợp vô hạn có thể tương đương với một tập con thực sự của nó. Tuy nhiên, điều này không thể xảy ra đối với các tập hợp hữu hạn.

**□ Định nghĩa:**

Hai tập A và B tương đương nhau được gọi là có cùng lực lượng hay là cùng bản số. Nếu tập A hữu hạn thì lực lượng của A chính là số phần tử của nó. Lực lượng của tập A được ký hiệu là CardA hoặc  $|A|$ .

+ Nếu một tập hợp B tương đương với một tập con thực sự của tập hợp A nhưng không tương đương với tập A thì B được nói là có lực lượng nhỏ hơn lực lượng của tập hợp A (hay lực lượng của A lớn hơn lực lượng của B) Ký hiệu:  $|B| < |A|$ .

**◆ Định lý:**

*A và B là hai tập hợp bất kỳ. Bao giờ cũng xảy ra một và chỉ một trong ba trường hợp sau:*

- a)  $|A| = |B|$
- b)  $|A| > |B|$
- c)  $|A| < |B|$

## 2. Tập hợp đếm được

[TOP](#)

**□ Định nghĩa:**

Lực lượng của tập số tự nhiên N được gọi là lực lượng đếm được.

**□ Định nghĩa:**

Một tập hợp tương đương với tập hợp N gọi là tập hợp đếm được.

Nói một cách khác, một tập hợp là đếm được nếu các phần tử khác nhau của tập này có thể được đánh số bởi tất cả các số tự nhiên.

♦ Ví dụ:

- Tập hợp  $\{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$  là tập hợp đếm được.
- Tập hợp tất cả các số hữu tỷ là tập đếm được.

□ Định nghĩa:

Một tập hợp hữu hạn hoặc đếm được được gọi là tập hợp không quá đếm được.

\* Các tính chất:

- a) Bất cứ một tập hợp vô hạn nào cũng có chứa một tập con đếm được.
- b) Tập hợp con của một tập hợp đếm được thì phải là hữu hạn hoặc đếm được.
- c) Hợp của một họ hữu hạn hay đếm được các tập hợp đếm được là một tập hợp đếm được.
- d) Khi ta thêm một tập hợp hữu hạn hay đếm được vào một tập hợp vô hạn  $A$  thì ta không làm thay đổi lực lượng của tập hợp  $A$ .

### 3. Tập hợp có lực lượng continuum

[TOP](#)

□ Định nghĩa:

Tập hợp không đếm được là một tập hợp vô hạn và không là tập đếm được.

♦ Ví dụ:

- Tập hợp các điểm thuộc  $[a, b]$  là tập không đếm được.
- Tập hợp các số vô tỷ là không đếm được.
- + Người ta chứng minh được rằng tập hợp tất cả các số thực  $\mathbb{R}$  là không đếm được.

□ Định nghĩa:

Lực lượng của tập hợp  $\mathbb{R}$  được gọi là lực lượng continuum hay là lực lượng  $c$ .  $|\mathbb{R}| = c$ .

## CHƯƠNG 2 : KHÔNG GIAN TÔPÔ

- I. [KHÔNG GIAN TÔPÔ](#)
- II. [TẬP MỞ - TẬP ĐÓNG - LÂN CẬN](#)
- III. [CÁC LOẠI ĐIỂM - PHẦN TRONG - BAO ĐÓNG](#)
- IV. [CƠ SỞ TÔPÔ](#)
- V. [CÁC TIÊN ĐỀ ĐẾM ĐƯỢC](#)
- VI. [KHÔNG GIAN CON](#)
- VII. [TÔPÔ SINH BỞI MỘT HO TẬP HỢP](#)
- VIII. [ÁNH XẠ LIÊN TỤC](#)
- IX. [CÁC TIÊN ĐỀ TÁCH](#)
- X. [KHÔNG GIAN COMPACT](#)
- XI. [KHÔNG GIAN LIÊN THÔNG](#)
- XII. [TÔPÔ XÁC ĐỊNH BỞI HO ÁNH XẠ](#)
- XIII. [TỔNG - THƯƠNG - TÍCH CÁC KHÔNG GIAN TÔPÔ](#)

### [BÀI TẬP CHƯƠNG 2](#)

**1. Định nghĩa**

Cho một tập hợp  $X \neq \emptyset$ . Họ  $\tau$  các tập hợp con nào đó của  $X$  được gọi là một tôpô trên  $X$  nếu :

- i)  $\emptyset \in \tau, X \in \tau$ .
- ii)  $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset \tau \Rightarrow \bigcup_{\alpha} G_\alpha \in \tau$ .
- iii)  $\forall G_1, G_2 \in \tau \Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \tau$ .

Tập hợp  $X$  cùng với tôpô trên  $X$  được gọi là một không gian tôpô. Ký hiệu:  $(X, \tau)$ .

**2. Ví dụ**

+ Cho  $X$  là tập hợp tùy ý khác rỗng. Họ  $\tau = \{\emptyset, X\}$  là một tôpô trên  $X$ .  $(X, \tau)$  được gọi là không gian tôpô thô ( hoặc không gian phần rời rạc).

+ Họ  $\tau = \{A \mid A \subset X\}$  là một tôpô trên  $X$ .  $(X, \tau)$  gọi là không gian tôpô rời rạc.

+ Cho tập hợp  $X$  vô hạn.  $\tau = \{A \subset X \mid A = \emptyset \text{ hoặc } X \setminus A \text{ hữu hạn}\}$ .  $\tau$  là một tôpô trên  $X$ . Tập  $X$  với tôpô này được gọi là không gian tôpô bù hữu hạn (hay không gian Darixki).

+  $X$  tùy ý.  $A \subset X$ .  $\tau = \{\emptyset, A, X\}$  là một tôpô trên  $X$ .

**3. So sánh các tôpô:**

➤ **Nhận xét**

Trên một tập hợp  $X$  có thể cho nhiều tôpô khác nhau.

□ **Định nghĩa**

Cho  $\tau_1, \tau_2$  là 2 tôpô trên  $X$ .  $\tau_1$  là yếu ( nhỏ, thô ) hơn  $\tau_2$  hay nói cách khác  $\tau_2$  là mạnh (lớn, mịn) hơn  $\tau_1$  nếu  $\tau_1 \subset \tau_2$ . Ký hiệu:  $\tau_1 \leq \tau_2$ .

➤ **Nhận xét:**

- Tôpô thô là tôpô yếu nhất và tôpô rời rạc là tôpô mạnh nhất trong tất cả các tôpô cho trên cùng một tập hợp  $X$ .

-Nếu  $\tau_1 \not\subset \tau_2$  và  $\tau_2 \not\subset \tau_1$  thì hai tôpô này là không thể so sánh với nhau. Ví dụ:  $A, B \subset X$  và  $A \neq B$  thì  $\tau_1 = \{\emptyset, A, X\}$  và  $\tau_2 = \{\emptyset, B, X\}$  là hai tôpô không so sánh được với nhau.

**II. TẬP MỞ, TẬP ĐÓNG, LÂN CẬN**

### □ Định nghĩa 1

Cho  $(X, \tau)$  là không gian tôpô. Tập  $G \subset X$  được gọi là tập hợp mở trong  $(X, \tau)$  nếu  $G \in \tau$ .

#### ► Nhận xét:

- $\emptyset$  và  $X$  là các tập hợp mở.
- Hợp một họ các tập hợp mở là một tập mở.
- Giao hữu hạn các tập mở là một tập mở.

### □ Định nghĩa 2

Cho  $A \subset X$  và  $V \subset X$ .  $V$  được gọi là một lân cận của tập hợp  $A$  nếu  $\exists G \in \tau: A \subset G \subset V$ .

Nếu  $A = \{x\}$  thì  $V$  được gọi là một lân cận của điểm  $x$ . Nếu  $V$  là tập mở thì  $V$  là lân cận mở của  $A$ .

#### ♦ Định lý 1

$G$  là tập hợp mở nếu và chỉ nếu  $G$  là lân cận của mọi điểm thuộc  $G$ .

#### Chứng minh

( $\Rightarrow$ ) Hiển nhiên.

( $\Leftarrow$ ) Với mỗi  $x \in G$ , do  $G$  là lân cận của  $x$  nên  $\exists V_x \in \tau: x \in V_x \subset G$ .

$$\text{Ta có } G = \bigcup_{x \in G} \{x\} \subset \bigcup_{x \in G} V_x \subset G \Rightarrow G = \bigcup_{x \in G} V_x \Rightarrow G \text{ mở.}$$

### □ Định nghĩa 3

Họ tất cả các lân cận của  $x$  trong  $(X, \tau)$  được gọi là hệ lân cận của  $x$ . Ký hiệu:  $\mathcal{V}_x$ .

### □ Định nghĩa 4

Họ  $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{V}_x$  là một cơ sở lân cận của điểm  $x$  (hay cơ sở địa phương của không gian  $X$  tại điểm  $x$ ) nếu  $\forall V \in \mathcal{V}_x, \exists B \in \mathcal{B}_x: x \in B \subset V$ .

#### ♦ Định lý 2

Nếu  $\mathcal{V}_x$  là họ tất cả các lân cận của  $x$  thì :

- $x \in V, \forall V \in \mathcal{V}_x$ .
- $\forall V_1, V_2 \in \mathcal{V}_x \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_x$ .
- $V_1 \in \mathcal{V}_x, V_2 \supset V_1 \Rightarrow V_2 \in \mathcal{V}_x$ .
- $\forall V \in \mathcal{V}_x, \exists W \in \mathcal{V}_x: V \in \mathcal{V}_y, \forall y \in W$ .

\* Ngược lại nếu với mỗi  $x$  thuộc  $X$  có họ  $\mathcal{V}_x$  các tập con nào đó của  $X$  thỏa các tính chất i), ii), iii), iv) thì trên  $X$  có một tôpô duy nhất nhận họ  $\mathcal{V}_x$  làm hệ lân cận của  $x$ .



## Chứng minh

Người đọc tự chứng minh i), ii), iii).

iv) Giả sử  $V \in \mathcal{V}_x \Rightarrow \exists W \in \tau: x \in W \subset V$ . Do  $W$  mở và chứa  $x$  nên  $W \in \mathcal{V}_x$ .

$\forall y \in W \Rightarrow W \in \mathcal{V}_y$ . Do  $V \supset W$  nên theo iii)  $V \in \mathcal{V}_y$ .

Vậy:  $\forall V \in \mathcal{V}_x, \exists W \in \mathcal{V}_x: V \in \mathcal{V}_y \quad \forall y \in W$ .

\* Ta chứng minh phần đảo lại của định lý.

Đặt  $\tau = \{\emptyset, \text{ hoặc các tập } G, \emptyset \neq G \subset X: \forall x \in G \Rightarrow G \in \mathcal{V}_x\}$

- Trước tiên ta chứng minh  $\tau$  là một tôpô trên  $X$ .

+  $\emptyset \in \tau, X \in \tau$ .

+  $\forall G_1, G_2 \in \tau \Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \tau$ . Thật vậy:

Nếu  $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$  thì  $\forall x \in G_1 \cap G_2 \Rightarrow G_1 \in \mathcal{V}_x$  và  $G_2 \in \mathcal{V}_x \Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \mathcal{V}_x$ .

+  $\{G_\alpha\}_\alpha$  là một họ bất kỳ thuộc  $\tau$ . Ta chứng minh  $\bigcup_\alpha G_\alpha \in \tau$ .

$\forall x \in \bigcup_\alpha G_\alpha \Rightarrow \exists G_{\alpha_0} \in \tau: x \in G_{\alpha_0} \Rightarrow G_{\alpha_0} \in \mathcal{V}_x \Rightarrow \bigcup_\alpha G_\alpha \in \mathcal{V}_x$ . Vậy  $\bigcup_\alpha G_\alpha \in \tau$ .

Từ các kết quả trên ta có  $\tau$  là một tôpô trên  $X$ .

- Tôpô  $\tau$  này nhận  $\mathcal{V}_x$  là hệ lân cận của  $x$  với mỗi  $x \in X$ . Thật vậy:

+ Nếu  $V$  là một lân cận của  $x$  thì  $\exists G \in \tau: x \in G \subset V$ . Theo cách xây dựng  $\tau$ , ta có  $G \in \mathcal{V}_x$ . Do  $V \supset G$  nên  $V \in \mathcal{V}_x$  (1)

+ Ngược lại, lấy  $V$  bất kỳ,  $V \in \mathcal{V}_x$ . Ta chứng minh  $V$  là một lân cận của  $x$ .

Đặt  $G = \{y: V \in \mathcal{V}_y\}$ . Ta có:

$x \in G$  vì  $V \in \mathcal{V}_x$ .

$G \subset V$ . Thật vậy,  $\forall y \in G \Rightarrow V \in \mathcal{V}_y \Rightarrow y \in V \Rightarrow G \subset V$ .

Mặt khác,  $V \in \mathcal{V}_y \quad (\forall y \in G) \Rightarrow \exists W \in \mathcal{V}_y: V \in \mathcal{V}_z \quad \forall z \in W$  nghĩa là  $W$  thỏa  $\forall z \in W$  thì  $V \in \mathcal{V}_z$ . Vậy  $W \subset G$ . Do  $W \in \mathcal{V}_y$  nên  $G \in \mathcal{V}_y \quad (\forall y \in G) \Rightarrow G \in \tau$ .

Vậy  $\forall V \in \mathcal{V}_x, \exists G \in \tau: x \in G \subset V$ . Điều này chứng tỏ  $V$  là một lân cận của  $x$  (2)

Từ (1) và (2) ta được  $\mathcal{V}_x$  là hệ lân cận của  $x$ .

- Ta còn phải chứng minh  $\tau$  là tôpô duy nhất nhận họ  $\mathcal{V}_x$  là lân cận của  $x$ .

Giả sử  $\tau'$  là một tôpô có tính chất như trên.

Lấy tập  $G$  bất kỳ thuộc  $\tau$ . Khi đó  $\forall x \in G \Rightarrow G \in \mathcal{V}_x$

$\Rightarrow G \in \tau' \Rightarrow \tau \subset \tau'$  (3)

Lấy  $G$  bất kỳ thuộc  $\tau'$ . Khi đó  $\forall x \in G \Rightarrow G \in \mathcal{V}_x \Rightarrow G \in \tau \Rightarrow \tau' \subset \tau$  (4)

Từ (3) và (4) ta được  $\tau = \tau'$ . Vậy  $\tau$  là duy nhất.

Định lý đã được chứng minh xong.

► **Nhận xét:**

- Hợp các lân cận của  $x$  cũng là một lân cận của  $x$ .
- Giao hữu hạn các lân cận của  $x$  cũng là một lân cận của  $x$ .

□ **Định nghĩa 5**

$F \subset X$  được gọi là tập đóng nếu  $X \setminus F \in \tau$ .

► **Nhận xét:**

- $F$  đóng  $\Leftrightarrow X \setminus F$  mở.
- Giao một họ bất kỳ các tập đóng là một tập đóng.
- Hợp hữu hạn các tập đóng là một tập đóng.

● **Ví dụ:**

- + Cho  $X$  với tôpô thô. Khi đó chỉ có hai tập vừa đóng vừa mở trong  $X$  là  $\emptyset$  và  $X$ .
- + Cho  $X$  với tôpô rời rạc trên  $X$ . Khi đó  $\forall A \subset X \Rightarrow A$  vừa mở vừa đóng.
- + Trên  $\mathbb{R}$ , đặt  $\tau = \{A \subset \mathbb{R} \mid A \text{ là hợp hữu hạn hay đếm được các khoảng rời nhau từng đôi một}\}$ . Ta chứng minh được  $\tau$  là một tôpô trên  $\mathbb{R}$ . Trong không gian tôpô này ta có:

$\mathbb{Z}$  là tập đóng.

$Q$  là tập không mở cũng không đóng.

### III. CÁC LOẠI ĐIỂM, PHẦN TRONG, BAO ĐÓNG

[TOP](#)

#### 1. Các loại điểm

Cho không gian tôpô  $(X, \tau)$ ,  $x \in X$  và  $A \subset X$ .

- +  $x$  được gọi là điểm trong của  $A$  nếu  $\exists G \in \tau : x \in G \subset A$  ( tức  $x$  nhận  $A$  làm lân cận).
- +  $x$  là điểm ngoài của  $A$  nếu  $\exists G \in \tau : x \in G \subset X \setminus A$ .
- +  $x$  là điểm biên của  $A$  nếu  $\forall V \in \mathcal{V}_x \Rightarrow V \cap A \neq \emptyset$  và  $V \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ .
- +  $x$  là điểm dính của  $A$  nếu  $\forall V \in \mathcal{V}_x \Rightarrow V \cap A \neq \emptyset$ .
- +  $x$  là điểm giới hạn của  $A$  nếu  $\forall V \in \mathcal{V}_x \Rightarrow V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ .
- +  $x$  là điểm cô lập của  $A$  nếu  $\exists V \in \mathcal{V}_x : V \cap A = \{x\}$ .

## 2. Phần trong:

### □ Định nghĩa

Phần trong của tập  $A$  là tập hợp tất cả các điểm trong của tập  $A$ .

Ký hiệu:  $\text{int}A$  hoặc  $A^\circ$ .

### ◆ Định lý 1

*$\text{int}A$  là tập mở lớn nhất được chứa trong  $A$ .*

#### Chứng minh

+  $\text{int}A$  là tập mở. Thật vậy:

Nếu  $\text{int}A = \emptyset \Rightarrow \text{int}A$  là tập mở.

Giả sử  $\text{int}A \neq \emptyset$ . Với mỗi  $x \in \text{int}A$  ta có  $x$  là điểm trong của  $A$ . Do đó  $\exists G \ni x$ :  $x \in G \subset A$ . Mặt khác do  $G$  mở nên  $G \subset \text{int}A$ .

Vậy:  $\forall x \in \text{int}A, \exists G \subset A: x \in G \subset \text{int}A$ . Điều này chứng tỏ  $\text{int}A$  là tập mở. (1)

+ Giả sử  $G$  là tập mở,  $G \subset A$  thì theo trên ta có  $G \subset \text{int}A$ . (2)

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow \text{đpcm}$ .

### ➤ Hệ quả

a)  $\text{int}A = \bigcup \{G: G \text{ là tập mở } \subset A\}$ .

b)  $G \text{ mở} \Leftrightarrow G = \text{int}G$ .

### ◆ Định lý 2

a)  $\text{int}\emptyset = \emptyset, \text{int}X = X$ .

b)  $\forall A, B \subset X$ , ta có:

i)  $\text{int}(\text{int}A) = \text{int}A$ .

ii) Nếu  $A \subset B \Rightarrow \text{int}A \subset \text{int}B$ .

iii)  $\text{int}(A \cap B) = \text{int}A \cap \text{int}B$ .

iv)  $\text{int}(A \cup B) \supset \text{int}A \cup \text{int}B$ .

#### Chứng minh

a) Người đọc tự chứng minh.

b) i) Do  $\text{int}A$  là tập mở nên  $\text{int}(\text{int}A) = \text{int}A$ .

ii) Do  $\text{int}A \subset A$  và  $A \subset B \Rightarrow \text{int}A \subset B \Rightarrow \text{int}A \subset \text{int}B$ .

iii) Do  $A \cap B \subset A \Rightarrow \text{int}(A \cap B) \subset \text{int}A$ .

Do  $A \cap B \subset B \Rightarrow \text{int}(A \cap B) \subset \text{int}B$ .

Vậy  $\text{int}(A \cap B) \subset \text{int}A \cap \text{int}B$ . (\*)

Ngoài ra  $\text{int}A \cap \text{int}B \text{ mở} \subset A \cap B \Rightarrow \text{int}A \cap \text{int}B \subset \text{int}(A \cap B)$ . (\*\*)

Từ (\*) và (\*\*)  $\Rightarrow \text{int}(A \cap B) = \text{int}A \cap \text{int}B$ .

$$\text{iv) } A \subset A \cup B \Rightarrow \text{int}A \subset \text{int}(A \cup B).$$

$$\text{Tương tự ta có: } \text{int}B \subset \text{int}(A \cup B).$$

$$\text{Vậy } \text{int}A \cup \text{int}B \subset \text{int}(A \cup B).$$

### 3. Bao đóng

#### □ Định nghĩa

Bao đóng của tập  $A$  là tập đóng bé nhất trong  $X$  chứa  $A$ .

Ký hiệu:  $[A]$  hoặc  $\overline{A}$ .

#### ► Hệ quả

$$\text{a) } \overline{\overline{A}} = \bigcap \{F: F \text{ đóng } \supset A\}.$$

$$\text{b) } A \text{ đóng} \Leftrightarrow \overline{A} = A.$$

#### ◆ Định lý

Cho không gian tôpô  $(X, \tau)$ ,  $A$  và  $B \subset X$ .

$$\text{a) } \overline{\emptyset} = \emptyset, \overline{X} = X.$$

$$\text{b) } \overline{\overline{A}} = \overline{A}.$$

$$\text{c) } A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}.$$

$$\text{d) } \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

$$\text{e) } \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}.$$

#### Chương minh

a) và b) Người đọc tự chứng minh.

$$\text{c) Do } A \subset B, B \subset \overline{B} \Rightarrow A \subset \overline{B} \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}.$$

$$\text{d) } * A \subset A \cup B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{A \cup B}.$$

$$\text{Tương tự: } \overline{B} \subset \overline{A \cup B}.$$

$$\text{Vậy: } \overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B} \quad (1)$$

$$* \text{ Mặt khác, } \overline{A \cup B} \text{ là tập đóng } \supset A \cup B \Rightarrow \overline{A \cup B} \supset \overline{A} \cup \overline{B} \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta được } \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

e) Do  $A \cap B \subset A \Rightarrow \overline{A \cap B} \subset \overline{A}$  (3)

Do  $A \cap B \subset B \Rightarrow \overline{A \cap B} \subset \overline{B}$  (4)

Từ (3) và (4), ta có  $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ .

♦ Định lý 2

Cho  $(X, \tau)$ ,  $A \subset X$ ,  $x \in X$ .  $x \in \overline{A} \Leftrightarrow x$  là điểm dính của tập  $A$ .

**Chứng minh**

( $\Rightarrow$ ) Giả sử  $x$  không là điểm dính của  $A$ .

Khi đó tồn tại một lân cận mở  $V$  của  $x$  sao cho  $V \cap A = \emptyset$

$$\Rightarrow \overline{A} \subset X \setminus V \Rightarrow \overline{A} \cap V = \emptyset$$

$\Rightarrow x \notin \overline{A}$ . Điều này mâu thuẫn với giả thiết  $x \in \overline{A}$ .

Vậy  $x$  là điểm dính của  $A$ .

( $\Leftarrow$ ) Giả sử  $x \notin \overline{A} \Rightarrow x \in X \setminus \overline{A} = V$  (\*). Do  $x$  là điểm dính của  $A$  nên  $V \cap A \neq \emptyset$ . Điều này mâu thuẫn với (\*).

Vậy  $x \in \overline{A}$ .

► Nhận xét

a)  $F$  là tập đóng khi và chỉ khi mọi điểm dính của  $F$  đều thuộc  $F$ .

b)  $\overline{X \setminus A} = X \setminus A^0$ .

$$(X \setminus A)^0 = X \setminus \overline{A}.$$

#### 4. Tập hợp trù mật - Không gian khả ly

a) Tập hợp trù mật:

□ Định nghĩa

Cho  $(X, \tau)$ ,  $A, B \subset X$ .  $A$  được gọi là trù mật trong  $B$  nếu  $B \subset \overline{A}$ .

□ Định nghĩa

$A$  là trù mật khắp nơi (tr.m.k.n) trong  $X$  nếu  $\overline{A} = X$ .

♦ Định lý 1

$$\overline{A} = X \Leftrightarrow \forall x \in X, \forall V \in \mathcal{V}_x \Rightarrow V \cap A \neq \emptyset$$

♦ Định lý 2

$$A \text{ trù mật khắp nơi trong } X \Leftrightarrow \forall G \in \tau \setminus \{\emptyset\} \Rightarrow G \cap A \neq \emptyset$$

**Chứng minh**

( $\Rightarrow$ ) Lấy  $G$  bất kỳ,  $G \in \tau \setminus \{\emptyset\} \Rightarrow G$  là lân cận của các phần tử  $y$  thuộc  $G$ .

Vì  $\overline{A} = X$  nên theo định lý 1 ta có:  $G \cap A \neq \emptyset$ .

( $\Leftarrow$ ) Lấy  $x$  bất kỳ,  $x \in X$  và  $V$  là lân cận tùy ý của  $x$ .

Khi đó  $\exists G \in \tau: x \in G \subset V \Rightarrow \emptyset \neq G \cap A \Rightarrow V \cap A \neq \emptyset$ .

Vậy  $\overline{A} = X$ .

## b) Tập thưa:

### □ Định nghĩa

$A$  được gọi là tập thưa (tập không đâu trù mật) nếu  $\text{int } \overline{A} = \emptyset$ .

#### ● Ví dụ:

Trong  $\mathbb{R}$ , tập hợp  $\mathbb{N}$  là tập thưa.

### ◇ Định lý

$A$  là tập không đâu trù mật  $\Leftrightarrow \forall V \in \tau, \exists V_0 \in \tau, V_0 \subset V: V_0 \cap A = \emptyset$

### Chứng minh

( $\Rightarrow$ ) Giả sử  $A$  là tập không đâu trù mật.

Ta có:  $\text{int } \overline{A} = \emptyset = X \setminus (\overline{X \setminus A}) \Rightarrow X = \overline{X \setminus A}$ . Khi đó  $\forall V \in \tau \Rightarrow V \cap (X \setminus \overline{A}) \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists x \in V$  và  $x \notin \overline{A} \Rightarrow \exists V_x$  là một lân cận mở của  $x$ :  $V_x \cap A = \emptyset$ .

Đặt  $V_0 = V \cap V_x$  thì  $V_0 \in \tau, V_0 \subset V$  và  $V_0 \cap A = \emptyset$ .

( $\Leftarrow$ ) Giả sử  $\text{int } \overline{A} \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in \text{int } \overline{A} \Rightarrow \exists V \in \tau: x \in V \subset \overline{A} \Rightarrow \forall V_0 \in \tau, V_0 \subset V \Rightarrow$

$V_0 \subset \overline{A} \Rightarrow V_0 \cap A \neq \emptyset$ . Điều này trái giả thiết.

Vậy  $\text{int } \overline{A} = \emptyset$ .

### ► Nhận xét

- Tập con của một tập thưa là một tập thưa.
- Hợp hữu hạn các tập thưa là một tập thưa.
- Hợp đếm được các tập thưa không chắc là một tập thưa (chẳng hạn tập  $\mathbb{Q}$ ).

## c. Không gian khả ly:

### □ Định nghĩa

Không gian tôpô  $(X, \tau)$  là không gian khả ly (tách được) nếu tồn tại một tập  $A \subset X$  sao cho  $A$  đếm được và  $\overline{A} = X$ .

#### ● Ví dụ:

$\mathbb{R}^1$  với tôpô tự nhiên là không gian khả ly.

## IV. CƠ SỞ TÔPÔ

[TOP](#)

## □ Định nghĩa

Cho  $(X, \tau)$ . Họ  $\mathcal{B} \subset \tau$  là một cơ sở tôpô của  $\tau$  nếu:

$$\forall x \in X, \forall V \in \mathcal{V}_x, \exists B \in \mathcal{B}: x \in B \subset V.$$

Cơ sở tôpô  $\mathcal{B}$  được gọi là đếm được nếu  $\mathcal{B}$  gồm một số đếm được (hay không quá đếm được) những tập hợp mở.

## ♦ Định lý

Cho họ  $\mathcal{B} \subset \tau$ .  $\mathcal{B}$  là cơ sở tôpô của  $(X, \tau)$  khi và chỉ khi mỗi tập hợp mở trong  $X$  là hợp của một họ các tập hợp nào đó thuộc  $\mathcal{B}$ .

## Chứng minh

( $\Rightarrow$ ) Giả sử  $G$  là tập mở. Ta có  $G$  là lân cận của mỗi điểm  $x$  thuộc  $G$ .

Do  $\mathcal{B}$  là cơ sở tôpô nên mỗi  $x$  thuộc  $G$  đều tồn tại  $B_x \in \mathcal{B}: x \in B_x \subset G \Rightarrow G = \bigcup_{x \in G} B_x$ .

( $\Leftarrow$ )  $\forall x \in X, \forall V \in \mathcal{V}_x \Rightarrow \exists G \in \tau: x \in G \subset V$ . Do  $G = \bigcup_{\alpha} B_{\alpha}$ ,  $B_{\alpha} \in \mathcal{B}$  nên:

$$\exists B_{\alpha_0} \in \mathcal{B}: x \in B_{\alpha_0} \subset V.$$

Vậy  $\mathcal{B}$  là cơ sở tôpô của  $(X, \tau)$ .

## ♦ Định lý 2

Họ  $\mathcal{B}$  là cơ sở của một tôpô nào đó trên  $X = \bigcup \{ B, B \in \mathcal{B} \}$  khi và chỉ khi với mỗi  $B_1, B_2$  thuộc  $\mathcal{B}$  và với mỗi  $x$  thuộc  $B_1 \cap B_2$  đều tồn tại  $B \in \mathcal{B}$  sao cho  $x \in B \subset B_1 \cap B_2$ .

## Chứng minh

( $\Rightarrow$ ) Giả sử  $\mathcal{B}$  là cơ sở tôpô của  $\tau$ . Khi đó với  $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow B_1 \cap B_2 \in \tau$ .

Với mỗi  $x \in B_1 \cap B_2$  thì  $B_1 \cap B_2$  là lân cận của  $x$  nên:

$$\exists B \in \mathcal{B}: x \in B \subset B_1 \cap B_2.$$

( $\Leftarrow$ ) Trên  $X$  xây dựng một họ  $\tau$  như sau:

$$\tau = \{ G = \bigcup_{\alpha} B_{\alpha}, B_{\alpha} \in \mathcal{B}, \alpha \text{ chạy tùy ý} \}.$$

Ta có:

$$+ \emptyset \in \tau, X \in \tau.$$

$$+ \forall G_1 \in \tau, G_2 \in \tau. \text{ Ta chứng minh } G_1 \cap G_2 \in \tau.$$

$$\text{Do } G_1 \in \tau \Rightarrow G_1 = \bigcup_{\alpha_1} B_{\alpha_1}$$

$$\text{Do } G_2 \in \tau \Rightarrow G_2 = \bigcup_{\alpha_2} B_{\alpha_2}.$$

$$\text{Vậy } G_1 \cap G_2 = \left( \bigcup_{\alpha_1} B_{\alpha_1} \right) \cap \left( \bigcup_{\alpha_2} B_{\alpha_2} \right) = \bigcup_{\alpha_1} \bigcup_{\alpha_2} (B_{\alpha_1} \cap B_{\alpha_2}).$$

$$\text{Với mỗi } x \in G_1 \cap G_2 \Rightarrow \exists B_{\alpha_1, \alpha_2} \in \mathcal{B}: x \in B_{\alpha_1, \alpha_2} \subset B_{\alpha_1} \cap B_{\alpha_2}.$$

$$\text{Từ đó } G_1 \cap G_2 \subset \cup B_{\alpha_1, \alpha_2} \subset \overline{\cup_{\alpha_1} \cup_{\alpha_2} (B_{\alpha_1} \cap B_{\alpha_2})} = \overline{G_1 \cap G_2}$$

$$\Rightarrow G_1 \cap G_2 = \cup B_{\alpha_1, \alpha_2} \Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \tau.$$

+ Giả sử  $\{G_\beta\}_\beta \subset \tau$ . Ta chứng minh  $\bigcup_\beta G_\beta \in \tau$ .

$$\text{Do với mỗi } \beta \text{ ta có } G_\beta \in \tau \text{ nên } G_\beta = \bigcup_{\alpha_\beta} B_{\alpha_\beta} \Rightarrow \bigcup_\beta G_\beta = \bigcup_\beta \bigcup_{\alpha_\beta} B_{\alpha_\beta} \in \tau.$$

Vậy  $\tau$  là một tôpô trên  $X$ .

- Dễ thấy  $\mathcal{B}$  là cơ sở của tôpô này.

### ♦ Định lý 3

*Giả sử  $\sigma$  là một họ tập hợp khác rỗng. Khi đó họ  $\mathcal{B}$  các giao hữu hạn có thể của các phần tử trong  $\sigma$  là một cơ sở của một tôpô nào đó trên  $X = \cup \{S : S \in \sigma\}$ .*

#### Chứng minh

Giả sử  $\sigma$  là một họ tập hợp khác rỗng.

Gọi  $\mathcal{B}$  là họ các giao hữu hạn có thể của các phần tử trong  $\sigma$ .

Với mỗi  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ , đặt  $B = B_1 \cap B_2$ .

Khi đó  $\forall x \in B_1 \cap B_2, \exists B = B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}: x \in B \subset B_1 \cap B_2$ .

Vậy  $\mathcal{B}$  là cơ sở của một tôpô nào đó trên  $X = \cup \{B, B \in \mathcal{B}\}$ .

Mặt khác:  $\cup \{B, B \in \mathcal{B}\} = \cup \{S, S \in \sigma\}$ .

Do đó  $\mathcal{B}$  là cơ sở của một tôpô nào đó trên  $X = \cup \{S, S \in \sigma\}$ .

### □ Định nghĩa

Họ  $\sigma$  tùy ý khác rỗng các tập được gọi là một tiền cơ sở của một tôpô  $\tau$  nào đó nếu họ các giao hữu hạn có thể các phần tử của  $\sigma$  lập thành một cơ sở tôpô của  $\tau$ .

## V. CÁC TIÊN ĐỀ ĐẾM ĐƯỢC

[TOP](#)

### □ Định nghĩa 1

$(X, \tau)$  được gọi là thỏa mãn tiên đề đếm được thứ nhất nếu mỗi điểm  $x$  thuộc  $X$  đều tồn tại một hệ cơ sở lân cận của  $x$  gồm đếm được phần tử.

### □ Định nghĩa 2

$(X, \tau)$  được gọi là thỏa mãn tiên đề đếm được thứ hai nếu  $X$  có một cơ sở tôpô gồm đếm được phần tử.

### ♦ Định lý 1

*Nếu  $X$  thỏa tiên đề đếm được thứ hai thì  $X$  thỏa tiên đề đếm được thứ nhất.*



### Chương minh

Giả sử  $X$  có một cơ sở tôpô đếm được là  $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_n, \dots\}$ .

Với mỗi  $x \in X$ , đặt  $\mathcal{B}_x = \{B_k : B_k \in \mathcal{B} \cap \mathcal{V}_x\}$ . Khi đó ta có:

$$+ \mathcal{B}_x \subset \mathcal{V}_x \quad (1)$$

+ Do  $\mathcal{B}$  là cơ sở tôpô nên với mỗi  $V$  là lân cận của  $x$  thì tồn tại  $B_k \in \mathcal{B} : x \in B_k \subset V$ .

Suy ra  $B_k \in \mathcal{B}_x$  và  $B_k$  thỏa:  $x \in B_k \subset V$  (2).

$$+ \text{Mặt khác } \mathcal{B}_x \text{ là đếm được} \quad (3).$$

Từ (1), (2), (3) ta có  $\mathcal{B}_x$  là hệ cơ sở lân cận đếm được của  $x$ .

Vậy  $X$  thỏa tiên đề đếm được thứ nhất.

### ► Nhận xét

$X$  thỏa tiên đề đếm được thứ nhất thì chưa chắc  $X$  thỏa tiên đề đếm được thứ hai.

### ♦ Định lý 2

*Nếu  $X$  thỏa mãn tiên đề đếm được thứ hai thì  $X$  khả ly.*

### Chương minh

Giả sử  $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_n, \dots\}$  là cơ sở tôpô đếm được của  $X$ .

Trong mỗi  $B_n$  lấy một điểm  $x_n$  tùy ý. Đặt  $A = \{x_n\}_n$ . Ta có:

$$+ A \text{ là đếm được} \quad (i)$$

$$+ \overline{A} = X. \text{ Thật vậy:}$$

$$\text{Giả sử } \overline{A} \neq X \Rightarrow \exists x \in X \setminus \overline{A} \Rightarrow \exists B_n \in \mathcal{B} : x \in B_n \subset X \setminus \overline{A}$$

$$\Rightarrow x_n \in (X \setminus \overline{A}) \cap \overline{A} = \emptyset \quad (\text{Vô lý}).$$

$$\text{Vậy } \overline{A} = X \quad (ii)$$

Từ (i) và (ii) ta kết luận:  $X$  là không gian khả ly.

### □ Định nghĩa 2

Họ  $\mathcal{H}$  các tập hợp nào đó là một cái phủ của tập  $B$  nếu hợp tất cả các tập thuộc  $\mathcal{H}$  chứa  $B$ .

Nếu tất cả các tập thuộc  $\mathcal{H}$  là các tập mở (đóng) thì  $\mathcal{H}$  là một phủ mở (phủ đóng) của tập  $B$ .

### □ Định nghĩa 3

Nếu họ  $\mathcal{H}$  là một cái phủ của tập  $B$ ,  $\mathcal{M}$  là một họ con hữu hạn của họ  $\mathcal{H}$  và  $\mathcal{M}$  cũng là một cái phủ của  $B$  thì  $\mathcal{M}$  được gọi là một phủ con hữu hạn của phủ  $\mathcal{H}$ .

#### □ Định nghĩa 4

Một không gian tôpô có tính chất từ mỗi phủ mở đều rút ra được một phủ con đếm được được gọi là không gian Lindelof.

#### ◆ Định lý 3

*Nếu  $X$  thỏa tiên đề đếm được thứ hai thì  $X$  là không gian Lindelof*

##### Chứng minh

Giả sử  $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_\alpha, \dots\}$  là cơ sở tôpô đếm được của  $X$ ,  $A \subset X$  và  $\mathcal{H}$  là một phủ mở của  $A$ .

Ta có:  $A \subset \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ ,  $U_{\alpha} \in \mathcal{H}$ .

$\forall U_{\alpha} \in \mathcal{H} \Rightarrow U_{\alpha} = \bigcup_j B_{\alpha_j}$  ( $B_{\alpha_j} \in \mathcal{B}$ )  $\Rightarrow A \subset \bigcup_{\alpha} U_{\alpha} = \bigcup_{\alpha} \bigcup_j B_{\alpha_j}$ .

Gọi  $\mathcal{C}$  là tập hợp tất cả các tập  $B_{\alpha_j}$ .

Do  $\mathcal{C}$  đếm được nên ta có thể viết  $\mathcal{C} = \{B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, \}$ .

Gọi  $U_{i_1}$  là một tập trong  $\mathcal{H}$  chứa  $B_{i_1}$ .

$U_{i_2}$  là tập trong  $\mathcal{H}$  chứa  $B_{i_2}$ .

.....

Ta được họ  $\{U_{i_j}\}_j$  đếm được thuộc  $\mathcal{H}$  và  $A \subset \bigcup_{i_1} U_{i_1}$ .

Vậy  $\{U_{i_j}\}_j$  là một phủ con đếm được của  $A$ . Do đó  $X$  là không gian Lindelof.

[TO](#)  
[P](#)

## VI. KHÔNG GIAN CON

#### □ Định nghĩa

Cho  $(X, \tau_x)$  là không gian tôpô,  $Y \subset X$ . Khi đó họ  $\tau_y = \{G \cap Y, G \in \tau_x\}$  là một  $\tau$  trên  $Y$ .  $(Y, \tau_y)$  được gọi là không gian tôpô con của không gian tôpô  $(X, \tau_x)$ . Tôpô  $\tau_y$  được là tôpô cảm sinh trên  $Y$  bởi tôpô  $\tau_x$ .

#### \* Ví dụ:

Cho  $\mathbb{R}$  với tôpô tự nhiên và  $A = [0, 1)$ . Trong không gian con  $A$ , ta có  $[0, 1/2)$  là mở.

$$Y \cap [X \setminus (Y \setminus B)] = Y \cap [F \cup (X \setminus Y)] \\ \Leftrightarrow B = Y \cap F \quad (\text{đpcm})$$

► **Nhận xét:**

Nếu  $(Y, \tau_Y)$  là không gian con của không gian  $(X, \tau_X)$  và  $y \in Y$  thì mọi lân cận của  $y$  trong  $Y$  đều có dạng  $V \cap Y$  với  $V$  là một lân cận của  $y$  trong  $X$ .

♦ **Định lý 2**

Cho  $(Y, \tau_Y)$  là không gian con của không gian  $(X, \tau_X)$ . Ta có:

- $\forall A \subset Y, [A]_Y = [A]_X \cap Y$  ( $[A]_Y$ : bao đóng của  $A$  trong  $Y$ ,  $[A]_X$ : bao đóng của  $A$  trong  $X$ ).
- $(\forall G \in \tau_Y \Rightarrow G \in \tau_X) \Leftrightarrow Y \in \tau_X$ .
- $(\forall F \subset Y, F \text{ đóng trong } Y \Rightarrow F \text{ đóng trong } X) \Leftrightarrow Y \text{ đóng trong } X$ .

**Chứng minh**

- $\forall A \subset Y$  ta có:

$$+ A \subset [A]_X \cap Y \Rightarrow [A]_Y \subset [A]_X \cap Y \quad (i)$$

$$+ \text{ Mặt khác: } [A]_Y = F \cap Y \text{ với } F \text{ là tập đóng trong } X.$$

$$\Rightarrow [A]_X \subset F \Rightarrow [A]_X \cap Y \subset F \cap Y = [A]_Y \quad (ii)$$

$$\text{Từ (i) và (ii) ta được: } [A]_Y = [A]_X \cap Y.$$

- $(\Leftrightarrow)$  Nếu  $Y \in \tau_X$  và  $G \in \tau_Y$  thì  $G = V \cap Y$  với  $V \in \tau_X \Rightarrow G \in \tau_X$ .  
 $(\Rightarrow)$  Vì  $Y \in \tau_Y \Rightarrow Y \in \tau_X$ .

- Người đọc tự chứng minh.

## VII. TÔPÔ SINH BỞI MỘT HỌ TẬP HỢP

[TOP](#)

♦ **Định lý**

Giao của một họ các tôpô trên  $X$  cũng là một tôpô trên  $X$ .

► **Nhận xét**

Cho  $\mathcal{M}$  là một họ các tập con nào đó của  $X$ . Luôn tồn tại ít nhất một tôpô trên  $X$  chứa  $\mathcal{M}$ . Giao của tất cả các tôpô trên  $X$  chứa  $\mathcal{M}$  là một tôpô trên  $X$  chứa  $\mathcal{M}$ . Đó là tôpô duy nhất bé nhất chứa  $\mathcal{M}$ . Tôpô này được gọi là tôpô sinh bởi  $\mathcal{M}$ .

Ký hiệu:  $\tau(\mathcal{M})$ .

## VIII. ÁNH XẠ LIÊN TỤC

[TOP](#)

### □ Định nghĩa

Cho hai không gian tôpô  $(X, \tau_X)$ ,  $(Y, \tau_Y)$  và ánh xạ  $f: X \rightarrow Y$ .

\*  $f$  được gọi là liên tục tại điểm  $x_0 \in X$  nếu với mỗi lân cận  $W$  của  $f(x_0)$  (trong  $Y$ ) luôn tồn tại một lân cận  $V$  của  $x_0$  (trong  $X$ ) sao cho  $f(V) \subset W$ .

\*  $f$  là liên tục trên  $X$  nếu  $f$  liên tục tại mọi điểm  $x$  thuộc  $X$ .

### ◆ Định lý 1

Cho  $X, Y$  là hai không gian tôpô và ánh xạ  $f: X \rightarrow Y$ . Khi đó ánh xạ  $f$  liên tục tại điểm  $x_0$  thuộc  $X$  khi và chỉ khi với mỗi lân cận  $W$  của  $f(x_0)$  (trong  $Y$ ) thì  $f^{-1}(W)$  là lân cận của  $x_0$  (trong  $X$ ).

#### Chứng minh

( $\Rightarrow$ ) Giả sử  $W$  là một lân cận của  $f(x_0)$ . Do  $f$  liên tục tại  $x_0$  nên tồn tại  $V$  là một lân cận của  $x_0$  với  $f(V) \subset W \Rightarrow V \subset f^{-1}(W) \Rightarrow f^{-1}(W)$  là một lân cận của  $x_0$ .

( $\Leftarrow$ ) Giả sử  $W$  là một lân cận của  $f(x_0)$ . Theo giả thiết thì  $f^{-1}(W)$  là lân cận của  $x_0$ .

Đặt  $V = f^{-1}(W)$ . Ta có:  $V$  là một lân cận của  $x_0$  và  $f(V) \subset W$ .

Vậy  $f$  liên tục tại  $x_0$ .

### ◆ Định lý 2

Giả sử  $(X, \tau_X)$ ,  $(Y, \tau_Y)$  là hai không gian tôpô và  $f$  là ánh xạ từ  $X$  vào  $Y$ . Các mệnh đề sau đây là tương đương:

- Ánh xạ  $f$  liên tục trên  $X$ .
- Nghịch ảnh của mỗi tập mở là một tập mở.
- Nghịch ảnh của mỗi tập đóng là một tập đóng.
- $\forall A \subset X \Rightarrow f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$
- $\forall B \subset Y \Rightarrow f^{-1}(B^c) \subset (f^{-1}(B))^c$ .

#### Chứng minh

a)  $\Rightarrow$  b) Giả sử  $G \in \tau_Y$ ,  $G \neq \emptyset$ .

$\forall x \in f^{-1}(G) \Rightarrow G$  là lân cận của  $f(x) \Rightarrow f^{-1}(G)$  là lân cận của  $x$ .

Do đó  $f^{-1}(G)$  là tập mở trong  $X$ .

b)  $\Rightarrow$  c) Giả sử  $F$  là tập đóng trong  $Y$ .

Do b) ta được  $f^{-1}(Y \setminus F)$  là tập mở trong  $X \Rightarrow f^{-1}(F)$  đóng trong  $X$ .

c)  $\Rightarrow$  d) Do c) ta có  $\forall A \subset X \Rightarrow f^{-1}(\overline{f(A)})$  là tập đóng trong  $X$ .

Vi  $A \subset f^{-1}(\overline{f(A)}) \Rightarrow \overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)}) \Rightarrow f(\overline{A}) \subset f[f^{-1}(\overline{f(A)})] \subset \overline{f(A)}$ .

d)  $\Rightarrow$  e) Do d) ta có  $\forall B \subset Y \Rightarrow f(\overline{X \setminus f^{-1}(B)}) \subset \overline{f(X \setminus f^{-1}(B))}$

Vi  $\overline{f(X \setminus f^{-1}(B))} \subset \overline{Y \setminus B}$  nên: