

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI 1,2,3,4,5,6 TRANG 18 SGK GIẢI TÍCH LỚP 12

(BÀI TẬP CỰC TRỊ HÀM SỐ)

Giải Bài tập bài 1,2,3,4,5,6 trang 18 SGK (Sách giáo khoa) giải tích lớp 12 – Bài tập cực trị hàm số- Chương 1: ứng dụng đạo hàm để khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số.

- A. Giải bài tập Sách giáo khoa
- B. Ôn lại Lý thuyết cực trị hàm số
- C. Bài tập luyện cực trị hàm số có đáp án

A. Giải bài tập Sách giáo khoa

Bài 1. (trang 18 SGK giải tích 12)

Áp dụng quy tắc I, hãy tìm các điểm cực trị của hàm số sau :

a) $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 10$; b) $y = x^4 + 2x^2 - 3$;

c) $y = x + 1/x$; d) $y = x^3(1 - x)^2$;

e) $y = \sqrt{x^2 - x} + 1$

Đáp án và hướng dẫn giải bài 1:

a) $y' = 6x^2 + 6x - 36 = 6(x^2 + x - 6)$;

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2; x = -3$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-3		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+
y	$-\infty$		↗ 71	↘ -54		↗ $+\infty$

Hàm số đạt cực đại tại $x = -3$, $y_{cd} = y(-3) = 71$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$, $y_{(ct)} = y(2) = -54$

b) $y' = 4x^3 + 4x = 4x(x^2 + 1); y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	-3	$+\infty$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0, y_{(ct)} = y(0) = -3$.

c) Tập xác định : $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$y' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x^2}; y' = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = 1$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	-2	$+\infty$	2	$+\infty$

Hàm số đạt cực đại tại $x = -1, y_{cd} = y(-1) = -2$;

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1, y_{ct} = y(1) = 2$.

d) Tập xác định : $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2(1 - x)^2 + x^3 \cdot 2(1 - x)(-1) = x^2(1 - x)[3(1 - x) - 2x] = x^2(x - 1)(5x - 3). y' = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 3/5, x = 1.$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	0	$\frac{3}{5}$	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$+$	0	$+$
y	$-\infty$	$\frac{108}{3125}$	0	$+\infty$	$+\infty$

Hàm số đạt cực đại tại $x = 3/5, y_{cd} = y(3/5) = 108/3125$;



Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$, $y_{ct} = y(1) = 0$.

e) Tập xác định : $D = \mathbf{R}$. $\frac{x}{x^2plus; 1}$

Bảng biến thiên : (HS tự vẽ)

Hàm số đạt cực tiểu tại $\frac{x}{x^2plus; 1}$

Bài 2. (trang 18 SGK giải tích 12)

Áp dụng quy tắc II, hãy tìm các điểm cực trị của hàm số sau:

a) $y = x^4 - 2x^2 + 1$; b) $y = \sin 2x - x$;

c) $y = \sin x + \cos x$; d) $y = x^5 - x^3 - 2x + 1$.

Đáp án và hướng dẫn giải bài 2:

a) $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \pm 1$.

$y'' = 12x^2 - 4$. $y''(0) = -4 < 0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{cd} = y(0) = 1$. $y''(\pm 1) = 8 > 0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm 1$, $y_{ct} = y(\pm 1) = 0$.

b) $y' = 2\cos 2x - 1$;

$\frac{x}{x^2plus; 1}$

$y'' = -4\sin 2x$.

$y''\left(\frac{\pi}{6} + k\pi\right) = -4\sin\left(\frac{\pi}{3} + k2\pi\right) = -2\sqrt{3} < 0$

nên hàm số đạt cực đại tại các điểm $x = \pi/6 + k\pi$, $y_{cd} = \sin(\pi/3 + k2\pi) - \pi/6 - k\pi = \sqrt{3}/2 - \pi/6 - k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

$y''\left(-\frac{\pi}{6} + k\pi\right) = -4\sin\left(-\frac{\pi}{3} + k2\pi\right) = 2\sqrt{3} > 0$

nên hàm số đạt cực tiểu tại các điểm $x = -\pi/6 + k\pi$, $y_{ct} = \sin(-\pi/3 + k2\pi) + \pi/6 - k\pi = -\sqrt{3}/2 + \pi/6 - k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

c) $y = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \pi/4)$;



$$y' = \sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right); y' = 0 \Leftrightarrow \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$\frac{x}{x^2 + 1} y'' \left(\frac{\pi}{4} + k\pi \right) = -\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + k\pi + \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) = \begin{cases} -\sqrt{2} & \text{nếu } k \text{ chẵn} \\ \sqrt{2} & \text{nếu } k \text{ lẻ} \end{cases}$$

Do đó hàm số đạt cực đại tại các điểm $x = \pi/4 + k2\pi$, đạt cực tiểu tại các điểm $\frac{x}{x^2 + 1}$

$$d) y' = 5x^4 - 3x^2 - 2 = (x^2 - 1)(5x^2 + 2); y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

$$y'' = 20x^3 - 6x.$$

$$y''(1) = 14 > 0 \text{ nên hàm số đạt cực tiểu tại } x = 1, y_{ct} = y(1) = -1.$$

$$y''(-1) = -14 < 0 \text{ hàm số đạt cực đại tại } x = -1, y_{cd} = y(-1) = 3.$$

Bài 3. (trang 18 SGK giải tích 12)

Chứng minh rằng hàm số $y = \sqrt{|x|}$ không có đạo hàm tại $x = 0$ nhưng vẫn đạt cực tiểu tại điểm đó.

Đáp án và Hướng dẫn giải bài 3:

Đặt $y = f(x) = \sqrt{|x|}$. Giả sử $x > 0$, ta có :

$$\frac{x}{x^2 + 1}$$

Do đó hàm số không có đạo hàm tại $x = 0$. Tuy nhiên hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ vì $f(x) = \sqrt{|x|} \geq 0 = f(0) \forall x \in \mathbb{R}$

Bài 4. (trang 18 SGK giải tích 12)

Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m , hàm số $y = x^3 - mx^2 - 2x + 1$ luôn luôn có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

Đáp án và Hướng dẫn giải bài 4:

$y' = 3x^2 - 2mx - 2$, $\Delta' = m^2 + 6 > 0$ nên $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và y' đổi dấu khi qua các nghiệm đó.



Vậy hàm số luôn có một cực đại và một cực tiểu.

Bài 5. (trang 18 SGK giải tích 12)

Tìm a và b để các cực trị của hàm số $y = \frac{5}{3}ax^3 + 2ax^2 - 9x + b$

đều là những số dương và $x_0 = -5/9$ là điểm cực đại.

Đáp án và Hướng dẫn giải bài 5:

- Xét $a = 0$ hàm số trở thành $y = -9x + b$. Trường hợp này hàm số không có cực trị.
- Xét $a \neq 0$. Ta có : $y' = 5a^2x^2 + 4ax - 9$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1/\alpha$ hoặc $x = -9/5\alpha$
- Với $a < 0$ ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\frac{1}{a}$	$-\frac{9}{5a}$	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+
y						

Diagram showing the behavior of the function y as x approaches $-\infty$ and $+\infty$. Arrows indicate that y goes from $-\infty$ to $+\infty$ as x increases, passing through a local maximum at $x = \frac{1}{a}$ and a local minimum at $x = -\frac{9}{5a}$.

Theo giả thiết $x_0 = -5/9$ là điểm cực đại nên $1/\alpha = -5/9 \Leftrightarrow \alpha = 9/5$. Theo yêu cầu bài toán thì

$$\frac{x}{x^2 + 1}$$

- Với $a > 0$ ta có bảng biến thiên :

x	$-\infty$	$-\frac{9}{5a}$	$\frac{1}{a}$	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+
y						

Diagram showing the behavior of the function y as x approaches $-\infty$ and $+\infty$. Arrows indicate that y goes from $-\infty$ to $+\infty$ as x increases, passing through a local minimum at $x = -\frac{9}{5a}$ and a local maximum at $x = \frac{1}{a}$.

Vì $x_0 = -5/9$ là điểm cực đại nên $-\frac{9}{5a} = -\frac{5}{9} \Leftrightarrow a = \frac{81}{25}$. Theo yêu cầu bài toán thì: $\frac{x}{x^2 + 1}$

Vậy các giá trị a, b cần tìm là: $\frac{x}{x^2 + 1}$ hoặc $\frac{x}{x^2 + 1}$



Bài 6.(trang 18 SGK giải tích 12)

Xác định giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ đạt cực đại tại $x = 2$.

Đáp án và Hướng dẫn giải bài 6:

Tập xác định : $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$

$$\frac{x}{x^2 + 1}$$

Nếu hàm số đạt cực đại tại $x = 2$ thì $y'(2) = 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -1$ hoặc $m = -3$

- Với $m = -1$, ta có : $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$;

$$\frac{x}{x^2 + 1} \quad x=0 \text{ hoặc } x=2.$$

Ta có bảng biến thiên :

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
y'	+	0	-	0	+
y		$\nearrow -1$		$\searrow 3$	

Trường hợp này ta thấy hàm số không đạt cực đại tại $x = 2$.

- Với $m = -3$, ta có: $y = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 3}$;

$$\frac{x}{x^2 + 1} \quad x=2 \text{ hoặc } x=4$$

Ta có bảng biến thiên :

x	$-\infty$	2	3	4	$+\infty$
y'	+	0	-	0	+
y		$\nearrow 1$		$\searrow 5$	



Trường hợp này ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.

Vậy $m = -3$ là giá trị cần tìm.

B. Ôn lại Lý thuyết về cực trị hàm số

Tóm tắt kiến thức.

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a ; b)$ và điểm $x_0 \in (a ; b)$.

- Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0), \forall x \in (x_0 - h ; x_0 + h), x \neq x_0$ thì ta nói hàm số f đạt cực đại tại x_0 .
- Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0), \forall x \in (x_0 - h ; x_0 + h), x \neq x_0$ thì ta nói hàm số f đạt cực tiểu tại x_0 .

2. Định lý 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $K = (x_0 - h ; x_0 + h)$ ($h > 0$) và có đạo hàm trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$.

– Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1$ thì x_0 là điểm cực đại của hàm số f .

– Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -1$ thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số f .

3. Định lý 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên khoảng $K = (x_0 - h ; x_0 + h)$ ($h > 0$).

- Nếu $f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số f .
- Nếu $f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại của hàm số f .

4. Quy tắc tìm cực trị

Quy tắc 1

- Tìm tập xác định.
- Tính $f'(x)$. Tìm các điểm tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không xác định.
- Lập bảng biến thiên.
- Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị.