

Trường Đại học Thủy lợi

Phạm Phú Triêm

TaiLieu.vn

NHẬP MÔN
ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH



Euclid

Vào khoảng [365-275 TCN](#)

Lời nói đầu

Theo chương trình cải cách giáo dục của Bộ Giáo dục và Đào tạo, nội dung môn Đại số tuyến tính có sự thay đổi, bổ sung với mục tiêu nâng cao một bước chương trình giảng dạy Đại số tuyến tính trong các Trường Đại học Kỹ thuật.

Việc cải cách đòi hỏi phải khẩn trương biên soạn một tài liệu phù hợp với môn học này, làm cơ sở chuẩn bị bài giảng của giáo viên, đồng thời là tài liệu học tập thuận lợi cho sinh viên với nhiều bài tập có hướng dẫn cách giải được bổ sung.

Với mục đích đó, Bộ môn Toán Trường Đại học Thủy lợi và tác giả xin trân trọng giới thiệu giáo trình " Nhập môn Đại số tuyến tính " và vô cùng cảm ơn các ý kiến đóng góp quý giá của đồng nghiệp, độc giả.

Hà nội 10-2004

MỤC LỤC

Lời nói đầu	2
Chương I : TRƯỜNG SỐ PHỨC	6
I- KHÁI NIỆM VỀ SỐ PHỨC	6
1- Đặt vấn đề	6
2- Đơn vị ảo	6
3- Số phức	6
4- Số thuần ảo	6
5- Hai số phức bằng nhau	6
6- Hai số phức liên hợp với nhau	7
7- Biểu diễn số phức trên mặt phẳng	7
8- Đại lượng góc của số phức	7
II- CÁC PHÉP TÍNH	9
1- Cộng và trừ 2 số phức	9
2- Nhân 2 số phức	10
3- Chia số phức cho số phức	12
4- Căn bậc n của số phức	14
III- TRƯỜNG SỐ PHỨC	17
Kiểm tra nhận thức	23
Chương II : MA TRẬN VÀ ĐỊNH THỨC	23
I- KHÁI NIỆM VỀ MA TRẬN	23
1- Ma trận cấp m.n	23
2- Ma trận không	23
3- Hai ma trận bằng nhau	23
4- Ma trận đối	24
5- Ma trận chuyển vị	24
6- Ma trận vuông	25
7- Ma trận đơn vị	25
8- Ma trận đối xứng	25
II- CÁC PHÉP TÍNH ĐỐI VỚI MA TRẬN	26
1- Cộng và trừ 2 ma trận cùng cấp	26
2- Nhân ma trận với một số	27
3- Nhân 2 ma trận với nhau	28
III- ĐỊNH THỨC	29
1- Định thức cấp 2	29
2- Định thức cấp 3	29
3- Định thức cấp n	31
4- Định lý Laplace	32
5- Tính chất	39
IV- MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO CỦA MA TRẬN VUÔNG	43
1- Định nghĩa	43
2- Tính chất	44
3- Quy tắc tính	45
V- HẠNG CỦA MA TRẬN	48
1- Định nghĩa	48
2- Quy tắc tìm hạng của ma trận	50

Kiểm tra nhận thức	59
Chương III: KHÔNG GIAN VECTO.....	60
I- VECTO N- CHIỀU	60
1- Khái niệm.....	60
2- Sự phụ thuộc tuyến tính của hệ các vector.....	60
3- Hạng của hệ vector.....	64
II- KHÔNG GIAN VECTO N- CHIỀU.....	66
1- Khái niệm.....	66
2- Biến đổi tọa độ của vector.....	69
III- ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH.....	72
1- Khái niệm.....	72
2- Dạng ma trận của một ánh xạ tuyến tính	73
3- Ma trận đồng dạng.....	74
IV- KHÔNG GIAN VECTO.....	76
1- Khái niệm.....	76
2- Không gian con.....	78
Kiểm tra nhận thức.....	90
Chương IV: HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH.....	91
I- KHÁI NIỆM.....	91
1- Hệ phương trình tuyến tính	91
2- Hệ thuần nhất.....	92
II- ĐỊNH LÝ.....	92
III- PHƯƠNG PHÁP GIẢI.....	98
1- Phương pháp ma trận nghịch đảo.....	98
2- Phương pháp Cramer.....	102
3- Phương pháp Gauss.....	108
Kiểm tra nhận thức.....	114
Chương V : VECTO RIÊNG - GIÁ TRỊ RIÊNG DẠNG SONG TUYẾN - DẠNG TOÀN PHƯƠNG.....	115
I- VECTO RIÊNG - GIÁ TRỊ RIÊNG.....	115
1- Định nghĩa.....	115
2- Định lý.....	116
II- DẠNG SONG TUYẾN	V U C.....118
1- Định nghĩa	C F(V,U).....118
2- Ma trận của dạng song tuyến.....	120
III- DẠNG TOÀN PHƯƠNG.....	123
1- Định nghĩa.....	123
2- Tính xác định của dạng toàn phương	124
3- Dạng chính tắc của dạng toàn phương	125
4- Phương pháp đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc.....	125
5- Luật quán tính.....	132
IV- ĐƯỜNG BẬC HAI - MẶT BẬC HAI.....	132
1- Đường bậc hai	133
2- Mặt bậc hai.....	134
Kiểm tra nhận thức.....	141
Chương VI: KHÔNG GIAN EUCLID - KHÔNG GIAN UNITA	142
I- KHÁI NIỆM.....	142
1- Không gian Euclid.....	142
2- Không gian Unita	142
3- Độ dài của vector trong không gian Euclid.....	143

4- Góc giữa 2 vector trong không gian Euclid.....	143
5- Hai vector vuông góc với nhau trong không gian Euclid.....	143
II- CƠ SỞ TRỰC CHUẨN	147
1- Hình chiếu vuông góc.....	147
2- Cơ sở trực chuẩn.....	151
3- Phân bù trực giao.....	153
Kiểm tra nhận thức.....	158

Tailieu.vn

Chương I : TRƯỜNG SỐ PHỨC

I- KHÁI NIỆM VỀ SỐ PHỨC

1- Đặt vấn đề

Trong thực tế có nhiều bài toán dẫn đến phương trình không có nghiệm thực, chẳng hạn

$$x^2 + 1 = 0 \quad (1.1.1)$$

Vì vậy chúng ta cần mở rộng khái niệm về số, từ tập hợp các số thực ra tập hợp các số có tính chất tổng quát hơn - đó là *tập hợp các số phức*, mà chúng ta sẽ đề cập sau đây.

2- Đơn vị ảo

Đơn vị ảo, được ký hiệu là i , là một số thỏa mãn điều kiện

$$i^2 = -1 \quad (1.1.2)$$

Lúc này phương trình (1.1.1) được giải như sau

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-1} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{i^2} \Leftrightarrow x = \pm i$$

3- Số phức

Số phức Z là một số được biểu diễn dưới dạng

$$Z = a + ib; \quad a, b \in \mathbb{P} - \text{Tập hợp các số thực} \quad (1.1.3)$$

trong đó a được gọi là *phần thực của số phức* Z và được ký hiệu

$$a = \operatorname{Re} Z \quad (1.1.4)$$

còn b được gọi là *phần ảo của số phức* Z và được ký hiệu

$$b = \operatorname{Im} Z \quad (1.1.5)$$

Ví dụ 1

$$1) \quad Z = 1 - 2i \Leftrightarrow \operatorname{Re} Z = 1, \operatorname{Im} Z = -2$$

$$2) \quad Z = -0,5 + i \Leftrightarrow \operatorname{Re} Z = -0,5, \operatorname{Im} Z = 1$$

4- Số thuần ảo

Số thuần ảo là số phức có dạng $Z = ib$ ($a = 0$)

Số thực $Z = a$ là trường hợp riêng của số phức $Z = a + ib$ khi $b = 0$. Như vậy $\mathbb{P} \subset \mathbb{X}$ - *Tập hợp các số phức*.

(Tập hợp các số thực là tập con của Tập hợp các số phức)

Ví dụ 2

$Z = -i, Z = 3i$ là các số thuần ảo.

5- Hai số phức bằng nhau

Hai số phức bằng nhau là hai số phức có phần thực tương ứng bằng nhau, phần ảo tương ứng bằng nhau.

Như vậy với hai số phức $Z_1 = a_1 + ib_1, Z_2 = a_2 + ib_2; a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{P}$

$$Z_1 = Z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases} \quad (1.1.6)$$

Ví dụ 3

$$1) \quad Z_1 = 1 - 2i, Z_2 = 1 + i, Z_3 = -2i, Z_4 = 3 - i \Rightarrow Z_1 \neq Z_2 \neq Z_3 \neq Z_4$$

$$2) \quad \begin{cases} Z = -0,5 + i \\ Z = -0,5 + iy; x, y \in \mathbb{P} \\ Z = x + i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -0,5 \\ y = 1 \end{cases}$$

Từ định nghĩa hai số phức bằng nhau ta có

$$Z = a + ib \neq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 > 0 \quad (1.1.7)$$

$$(0 = 0 + i.0)$$

6- Hai số phức liên hợp với nhau

Hai số phức liên hợp với nhau là hai số phức có phần thực tương ứng bằng nhau, phần ảo tương ứng đối dấu với nhau.

Như vậy số phức liên hợp với số phức $Z = a + ib$, ký hiệu là $\bar{Z}$, sẽ là $\bar{Z} = a - ib$.

Ví dụ 4

$$1) \quad Z = 1 - 2i \Leftrightarrow \bar{Z} = 1 + 2i$$

$$2) \quad Z = -0,5 + i \Leftrightarrow \bar{Z} = -0,5 - i$$

$$3) \quad Z = 4 \Leftrightarrow \bar{Z} = 4$$

$$4) \quad Z = -i \Leftrightarrow \bar{Z} = i$$

Để dàng nhận thấy

$$\overline{\bar{Z}} = Z \quad (1.1.8)$$

$$Z \in \mathbb{P} \Leftrightarrow \bar{\bar{Z}} = Z \quad (1.1.9)$$

7- Biểu diễn số phức trên mặt phẳng

Cho hệ trục tọa độ vuông góc xOy.

Cho số phức $Z = a + ib$.

Trên trục Ox xác định một điểm có hoành độ bằng a.

Trên trục Oy xác định một điểm có tung độ bằng b.

Như vậy ta hoàn toàn xác định được một điểm M(a;b).

Ngược lại, từ một điểm M(a;b) ta xác định được một

số phức tương ứng $Z = a + ib$.

Vì vậy trục Ox còn gọi là *Trục thực* (tương ứng với phần thực a của số phức Z), trục Oy còn gọi là *Trục ảo* (tương ứng với phần ảo b của số phức Z). Mặt phẳng xOy còn gọi là *Mặt phẳng phức*.

Ví dụ 5

$$1) \quad Z_1 = 1 - 2i \Leftrightarrow M_1(1; -2)$$

$$2) \quad M_2(-2; 1) \Leftrightarrow Z_2 = -2 + i$$

$$3) \quad Z_3 = 4 \Leftrightarrow M_3(4; 0)$$

$$4) \quad M_4(0; -1) \Leftrightarrow Z_4 = -i$$

8- Dạng lượng giác của số phức

Trước tiên ta biểu diễn số phức $Z = a + ib$ trên mặt phẳng.

Bán kính vector OM được gọi là *Môđun của số phức Z* và ký hiệu

$$|Z| \equiv r = OM \quad (1.1.10)$$

Góc tạo bởi OM với phần dương trục Ox được gọi là

Argument của số phức Z và ký hiệu $\text{Arg}Z$.

Như vậy

$$\text{Arg}Z = \varphi + 2k\pi; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.1.11)$$

Từ hình vẽ ta thấy

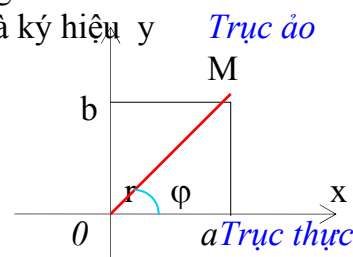
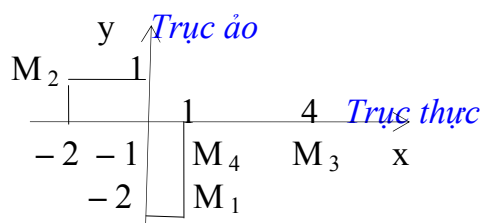
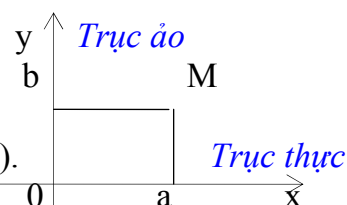
$$\begin{cases} a = r \cos \varphi \\ b = r \sin \varphi \end{cases} \quad (1.1.12)$$

Cho nên $Z = a + ib = r \cos \varphi + i r \sin \varphi$.

Vậy ta có cách biểu diễn số phức Z dưới *dạng lượng giác* như sau

$$Z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (1.1.13)$$

Để dàng nhận thấy



$$Z \neq 0 \Leftrightarrow r > 0 \quad (1.1.14)$$

$$(0 = 0(\cos\varphi + i \sin\varphi))$$

$$r_1(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1) = r_2(\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2) \Leftrightarrow \quad (1.1.15)$$

Ngược lại, ta sẽ tìm được r và φ khi đã cho số phức $Z = a + ib$, theo công thức

$$\begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}, a \neq 0 \end{cases} \quad (1.1.16)$$

ở đây góc φ phải chọn sao cho b và $\sin\varphi$ cùng dấu.

Dạng lượng giác tổng quát của số phức Z là

$$Z = |Z| [\cos(\operatorname{Arg}Z) + i \sin(\operatorname{Arg}Z)] \quad (1.1.17)$$

Ví dụ 6

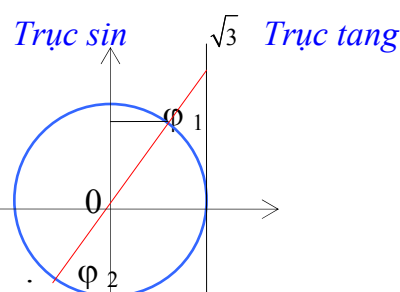
1) Hãy biểu diễn $Z = 1 + i\sqrt{3}$ dưới dạng lượng giác.

Giải

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{3}, \varphi_2 = \varphi_1 + \pi = \frac{4\pi}{3}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{3}, \varphi_2 = \varphi_1 + \pi = \frac{4\pi}{3}$$



Trên trục tang xác định một điểm ứng với $\sqrt{3}$.

Nối điểm này với gốc 0 cắt vòng tròn lượng giác tại 2 điểm ứng với φ_1, φ_2

Ta chọn φ_1 vì $\sin\varphi_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$ cùng dấu với $b = \sqrt{3} > 0$.

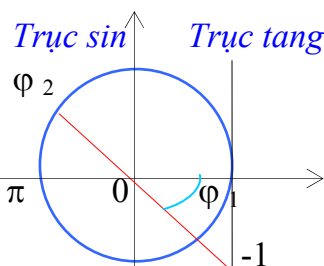
$$\text{Vậy } Z = 2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) \right] ; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

2) Hãy biểu diễn $Z = 1 - i$ dưới dạng lượng giác.

Giải

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a} = \frac{-1}{1} = -1 \Rightarrow \varphi_1 = \arctg(-1), \varphi_2 = \varphi_1 + \pi$$



Vẽ vòng tròn lượng giác.

Trên trục tang xác định một điểm ứng với -1 . Nối điểm này với gốc 0 cắt

-1

vòng tròn lượng giác tại 2 điểm ứng với φ_1, φ_2 . Ta chọn φ_1 vì $\sin\varphi_1 < 0$ cùng dấu với $b = -1 < 0$.

$$\text{Vậy } Z = \sqrt{2} [\cos(\varphi_1 + 2k\pi) + i \sin(\varphi_1 + 2k\pi)] ; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

3) Khi $Z = a, a \in \mathbb{P}$.

Nếu $a > 0$ thì $r = a$ và $\varphi = 0$ (điểm M tương ứng nằm trên phần dương trục Ox).

$$Z = a[\cos(2k\pi) + i \sin(2k\pi)] ; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.1.18)$$

Chẳng hạn, dạng lượng giác của $Z = 3,1$ là $Z = 3,1[\cos(2k\pi) + i \sin(2k\pi)] ; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Nếu $a < 0$ thì $r = -a$ và $\varphi = \pi$ (điểm M tương ứng nằm trên phần âm trục Ox).
 $Z = -a[\cos(\pi + 2k\pi) + i \sin(\pi + 2k\pi)]$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (1.1.19)

Chẳng hạn, dạng lượng giác của $Z = -2$ là $Z = 2[\cos(\pi + 2k\pi) + i \sin(\pi + 2k\pi)]$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

4) Khi $Z = ib$, $b \neq 0$.

Nếu $b > 0$ thì $r = b$ và $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (điểm M tương ứng nằm trên phần dương trục Oy).

$$Z = b \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \right]; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.1.20)$$

Chẳng hạn, dạng lượng giác của $Z = 4,5i$ là $Z = 4,5 \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \right]; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Nếu $b < 0$ thì $r = -b$ và $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ (điểm M tương ứng nằm trên phần âm trục Oy).

$$Z = -b \left[\cos\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \right]; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.1.21)$$

Chẳng hạn, dạng lượng giác của $Z = -i$ là $Z = 1 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \right]; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Đễ dàng nhận thấy

$$|\bar{z}| = |z| \quad (1.1.22)$$

$$\text{Arg } \bar{z} = -\text{Arg } z \quad (1.1.23)$$

II- CÁC PHÉP TÍNH

1- Cộng và trừ 2 số phức

a- Định nghĩa

Tổng (hoặc *Hiệu*) của 2 số phức Z_1, Z_2 , ký hiệu $Z_1 + Z_2$ (hoặc $Z_1 - Z_2$), là một số phức có phần thực bằng tổng (hoặc hiệu) phần thực tương ứng, phần ảo bằng tổng (hoặc hiệu) phần ảo tương ứng.

Như vậy với hai số phức $Z_1 = a_1 + ib_1, Z_2 = a_2 + ib_2$; $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{P}$ ta có

$$Z_1 \pm Z_2 = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2) \quad (1.2.1)$$

Ví dụ 7

Hãy tính tổng và hiệu của 2 số phức sau đây $Z_1 = 1 + 2i, Z_2 = -2 + i$.

Giải

$$Z_1 + Z_2 = (1 - 2) + i(2 + 1) = -1 + 3i$$

$$Z_1 - Z_2 = (1 + 2) + i(2 - 1) = 3 + i$$

$$Z_2 + Z_1 = (-2 + 1) + i(1 + 2) = -1 + 3i$$

$$Z_2 - Z_1 = (-2 - 1) + i(1 - 2) = -3 - i$$

b- Biểu diễn hình học

* Biểu diễn 2 số phức bằng các điểm tương ứng

Trục ảo

M_3

$$Z_1 = a_1 + ib_1 \Leftrightarrow M_1(a_1; b_1)$$

$$Z_2 = a_2 + ib_2 \Leftrightarrow M_2(a_2; b_2)$$

* Áp dụng biểu diễn hình học phép cộng, trừ 2 vector

$$Z_1 + Z_2 \Leftrightarrow M_3(a_1 + a_2; b_1 + b_2)$$

M_3 là đỉnh đối diện với 0 của hình bình hành $OM_1M_3M_2$

$$Z_1 - Z_2 \Leftrightarrow M_4(a_1 - a_2; b_1 - b_2)$$

M_4 là đỉnh của hình bình hành $OM_2M_1M_4$ mà M_1 là đỉnh đối diện với 0.

Ví dụ 8

Hãy biểu diễn hình học tổng và hiệu của 2 số phức sau đây $Z_1 = 1 + 2i, Z_2 = -2 + i$

i.

Giải

* Biểu diễn hình học của Z_1, Z_2 :

$$Z_1 = 1 + 2i \Leftrightarrow M_1(1; 2)$$

$$Z_2 = -2 + i \Leftrightarrow M_2(-2; 1)$$

* Biểu diễn hình học của $Z_1 + Z_2, Z_1 - Z_2$:

$$Z_1 + Z_2 = -1 + 3i \Leftrightarrow M_3(-1, 3)$$

$$Z_1 - Z_2 = 3 + i \Leftrightarrow M_4(3, 1)$$

c- Tính chất

1* Giao hoán: $Z_1 + Z_2 = Z_2 + Z_1; \forall Z_1, Z_2 \in X$

M_4

2* Kết hợp: $(Z_1 + Z_2) + Z_3 = Z_1 + (Z_2 + Z_3) =$

$$Z_1 + Z_2 + Z_3 \quad \forall Z_1, Z_2, Z_3 \in X$$

3* Với số không $0 \in X: Z + 0 = 0 + Z; \forall Z \in X$

4* Số đối của số phức $Z = a + ib$, ký hiệu là $-Z$, là số phức thỏa mãn điều kiện

$$Z + (-Z) = (-Z) + Z = Z - Z = 0; \forall Z \in X$$

Dễ dàng nhận thấy

$$-Z = -a - ib \quad (1.2.2)$$

$$|-Z| = |Z| \quad (1.2.3)$$

$$-(-Z) = Z \quad (1.2.4)$$

$$\text{Arg}(-Z) = \text{Arg}Z + \pi \quad (1.2.5)$$

5* Bất đẳng thức tam giác: $|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|; \forall Z_1, Z_2 \in X$

6* $Z + \bar{Z} = 2\text{Re}Z; \forall Z \in X$

7* $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2; \forall Z_1, Z_2 \in X$

8* $-(Z_1 \pm Z_2) = -Z_1 \mp Z_2; \forall Z_1, Z_2 \in X$

2- Nhân 2 số phức

a- Định nghĩa

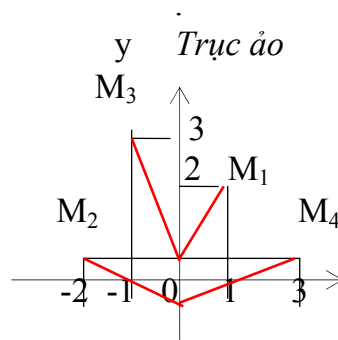
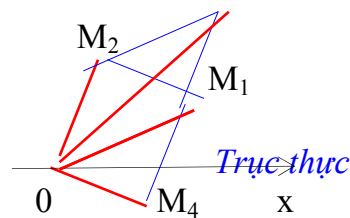
Tích của 2 số phức Z_1, Z_2 , ký hiệu $Z_1 Z_2$, là một số phức thu được như nhân 2 nhị thức, với chú ý là $i^2 = -1$

Như vậy với hai số phức $Z_1 = a_1 + ib_1, Z_2 = a_2 + ib_2; a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{P}$ ta có

$$Z_1 Z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + ia_1 b_2 + ia_2 b_1 + i^2 b_1 b_2 = a_1 a_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) - b_1 b_2$$

Cuối cùng ta được

$$Z_1 Z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \quad (1.2.6)$$



Ví dụ 9

Hãy tìm tích của 2 số phức sau đây $Z_1 = 1 + 2i$, $Z_2 = -2 + i$.

Giải

$$Z_1 Z_2 = (1 + 2i)(-2 + i) = 1 \cdot (-2) + i \cdot 1 \cdot 1 + i \cdot 2 \cdot (-2) + i^2 \cdot 2 \cdot 1 = -2 + i(1 - 4) - 2 = -4 - 3i$$

b- Dạng lượng giác

Giả sử 2 số phức Z_1, Z_2 đã cho dưới dạng lượng giác: $Z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)$, $Z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)$.

Lúc ấy

$$\begin{aligned} Z_1 Z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1) r_2(\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + i \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + i \cos\varphi_2 \sin\varphi_1 + i^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) \\ &= r_1 r_2 [(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_2 \sin\varphi_1)] \end{aligned}$$

Cuối cùng ta có

$$Z_1 Z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \quad (1.2.7)$$

Như vậy, *Tích 2 số phức dưới dạng lượng giác là một số phức dưới dạng lượng giác có: Môđun bằng tích 2 Môđun tương ứng và Argument bằng tổng 2 Argument tương ứng.*

Từ đó ta thu được **Công thức Moivre** sau đây

$$[r(\cos\varphi + i \sin\varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \quad (1.2.8)$$

Chú ý

Công thức Moivre đúng cho $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ với $r > 0$.

(Hiển nhiên Công thức Moivre vẫn đúng cho $n = 0, 1, 2, \dots$ với $r = 0$)

Ví dụ 10

Tìm tích 2 số phức sau đây dưới dạng lượng giác $Z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $Z_2 = \sqrt{3} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right]$

Giải

* Biểu diễn Z_1 dưới dạng lượng giác

$$Z_1 = 2 \left[\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = 2 \left[\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right]$$

* Ta tính được

$$\begin{aligned} Z_1 Z_2 &= 2\sqrt{3} \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) \right] = \\ &= 2\sqrt{3} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) \right] \end{aligned}$$

* Hơn nữa, theo cụng thức Moivre ta cú

$$Z_1^4 = 2^4 \left[\cos\left(4 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(4 \cdot \frac{\pi}{4}\right) \right] = 16(\cos\pi + i \sin\pi) = -16$$

$$Z_1^{-6} = 2^{-6} \left[\cos\left(-6 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-6 \cdot \frac{\pi}{4}\right) \right] =$$

$$\frac{1}{64} \left[\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) \right] = \frac{1}{64}$$

c- Tính chất

$$4^* \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_4} \Leftrightarrow Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3; \forall Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 \in \mathbb{X}, Z_2 \neq 0, Z_4 \neq 0$$

$$5^* \frac{\frac{Z_1}{Z_2}}{\frac{Z_3}{Z_4}} = \frac{Z_1 Z_4}{Z_2 Z_3}; \forall Z_1, Z_2, Z_3 \in \mathbb{X}, Z_2 \neq 0, Z_3 \neq 0$$

$$6^* \frac{-Z_1}{Z_2} = \frac{Z_1}{-Z_2} = -\frac{Z_1}{Z_2}; \forall Z_1, Z_2 \in \mathbb{X}, Z_2 \neq 0$$

$$7^* \overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}; \forall Z_1, Z_2 \in \mathbb{X}, Z_2 \neq 0$$

4- Căn bậc n của số phức

a- Định nghĩa

Căn bậc n của số phức Z, ký hiệu là $\sqrt[n]{Z}$, là một số phức thỏa mãn điều kiện

$$\left(\sqrt[n]{Z}\right)^n = Z \quad (1.2.19)$$

b- Dạng lượng giác

Giả sử dưới dạng lượng giác

$$Z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi), \quad \sqrt[n]{Z} = r_1(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)$$

Lúc này

$$r(\cos\varphi + i \sin\varphi) = [r_1(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)]^n = r_1^n(\cos n\varphi_1 + i \sin n\varphi_1)$$

Vì vậy

$$r_1^n = r \Leftrightarrow r_1 = \sqrt[n]{r}; \quad n\varphi_1 = \varphi + 2k\pi \Leftrightarrow \varphi_1 = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Cuối cùng ta được

$$\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{r} \left[\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right]; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Thu gọn lại, ta có công thức cho n giá trị khác nhau của căn bậc n của số phức Z:

$$\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{r} \left[\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right]; k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (1.2.20)$$

Ví dụ 13

1) Tìm $\sqrt[3]{1+i}$.

Giải

* Biểu diễn $1+i$ dưới dạng lượng giác $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

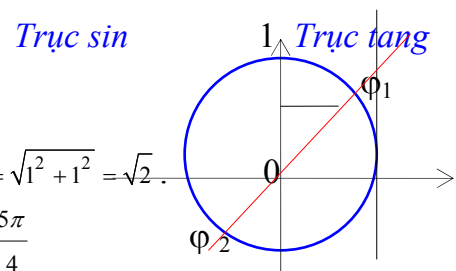
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{4}, \varphi_2 = \varphi_1 + \pi = \frac{5\pi}{4}$$

Vẽ vòng tròn lượng giác. Trên trục tang xác định một điểm ứng với 1. Nối điểm này với gốc 0 cắt vòng tròn lượng giác tại 2 điểm ứng với φ_1, φ_2 . Ta chọn φ_1 vì $\sin\varphi_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$ cùng dấu với $b = 1 > 0$.

Vậy

$$1+i = \sqrt{2} \left[\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right]$$

* Áp dụng công thức (1.2.20)



$$\sqrt{-4-3i} = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}+(-4)}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}-(-4)}{2}} \right) = \pm \left(\sqrt{\frac{1}{2}} - i\sqrt{\frac{9}{2}} \right)$$

Vậy

$$x_{1,2} = \frac{i \pm \sqrt{-4-3i}}{1+i} = \frac{i \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1-3i)}{1+i} = \frac{\pm \frac{1}{\sqrt{2}}[1+(\pm\sqrt{2}-3)i]}{1+i} = \frac{\pm \frac{1}{\sqrt{2}}[1+(\pm\sqrt{2}-3)i](1-i)}{1^2+1^2}$$

Từ đây ta tìm được 2 nghiệm của phương trình đã cho

$$x_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}[1+(\sqrt{2}-3)i](1-i) = \frac{1}{2\sqrt{2}}[(\sqrt{2}-2)+(\sqrt{2}-4)i] = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{2}-\sqrt{2}\right)i$$

$$x_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}[1+(-\sqrt{2}-3)i](1-i) = \frac{1}{2\sqrt{2}}[(\sqrt{2}+2)+(\sqrt{2}+4)i] = \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}+\sqrt{2}\right)i$$

3) *Tương ứng với n giá trị khác nhau của $\sqrt[n]{1}$ là n đỉnh của đa giác đều nội tiếp vòng tròn đơn vị mà một đỉnh là $M_0(1; 0)$.*

III- TRƯỜNG SỐ PHỨC

Ta nhận thấy rằng, trên P và rộng hơn là trên X xác định 2 phép tính: Phép cộng 2 số và phép nhân 2 số với các tính chất tương ứng. Vì vậy ta có ý tưởng *Tổng quát hóa* điều này cho tập hợp các phần tử (có cùng đặc trưng). Đó là khái niệm “*Trường*” mà chúng ta sẽ xét dưới đây.

Định nghĩa

Tập hợp T được gọi là *Trường* nếu trên T xác định 2 phép tính sau đây với các tính chất tương ứng.

Phép cộng 2 phần tử của T: $\forall x, y \in T \Rightarrow x + y \in T$ với các tính chất:

1* Giao hoán: $x + y = y + x$; $\forall x, y \in T$

2* Kết hợp: $(x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z$; $\forall x, y, z \in T$

3* Tồn tại “*Phần tử không*”, ký hiệu là $0 \in T$, thỏa mãn điều kiện $x + 0 = 0 + x = x$; $\forall x \in T$

4* Tồn tại “*Phần tử đối*” của $x \in T$, ký hiệu là $-x \in T$, thỏa mãn điều kiện

$$x + (-x) = (-x) + x = 0; \forall x \in T$$

Phép nhân 2 phần tử của T: $\forall x, y \in T \Rightarrow xy \in T$ với các tính chất:

1* Giao hoán: $xy = yx$; $\forall x, y \in T$

2* Kết hợp: $(xy)z = x(yz) = xyz$; $\forall x, y, z \in T$

3* Phân phối với phép cộng 2 phần tử của T: $(x + y)z = xz + yz$; $\forall x, y, z \in T$

4* Tồn tại “*Phần tử trung hòa*”, ký hiệu là $e \in T$, thỏa mãn điều kiện $x.e = e.x = x$; $\forall x \in T$

5* Tồn tại “*Phần tử nghịch đảo*” của $x \in T, x \neq 0$, ký hiệu là $x^{-1} \in T$, thỏa mãn

$$xx^{-1} = x^{-1}x = e; \forall x \in T$$

Ví dụ 16

1) $T = P$ - *Trường số thực* với phép cộng 2 số thực và phép nhân 2 số thực, trong đó *Phần tử không* là số 0, *Phần tử đối* của số thực x là $-x$, *Phần tử trung hoà* là số 1, *Phần tử nghịch đảo* của số thực $x \neq 0$ là $\frac{1}{x}$.

2) $T = X$ - *Trường số phức* với phép cộng 2 số phức và phép nhân 2 số phức trong đó *Phần tử không* là số 0, *Phần tử đối* của số phức Z là $-Z$, *Phần tử trung hoà* là số 1, *Phần tử nghịch đảo* của số phức $Z \neq 0$ là $\frac{1}{Z}$.

3) T là tập hợp các hàm thực $f(x)$ có hữu hạn điểm gián đoạn và nghiệm trên $[a;b]$ với phép cộng 2 hàm và phép nhân 2 hàm là một *Trường* vì

* $f(x), g(x) \in T$ thì $f(x) + g(x) \in T$ cùng các tính chất, trong đó *Phần tử không* là $f(x) \equiv 0 \in T$, *Phần tử đối* của $f(x) \in T$ là $-f(x) \in T$.

* $f(x), g(x) \in T$ thì $f(x).g(x) \in T$ cùng các tính chất, trong đó *Phần tử trung hoà* là $f(x) \equiv 1 \in T$, *Phần tử nghịch đảo* của $f(x) \neq 0$ và $f(x) \in T$ là $\frac{1}{f(x)} \in T$.

4) Tập hợp $TH = \{ib : b \in P\}$ - tập hợp tất cả các số thuần ảo, với phép cộng là phép cộng 2 số phức và phép nhân là phép nhân 2 số phức, *không phải là một trường*.

Thật vậy, vì $2i \in TH$, $5i \in TH$ nhưng $2i.5i = 10i^2 = -10 \notin TH$.

Như vậy, để chứng tỏ một tập hợp, với 2 phép tính được xác định, không phải là một trường, ta chỉ cần chỉ ra một điều kiện nào đó trong định nghĩa không thoả mãn là đủ.

Bài tập

1) Tìm $x, y, z, w \in P$ thoả mãn:

a) $(1 + 2i)x + (3 - 5i)y = 1 - 3i$

b) $(-1 +$

$2i)x + (4 + 5i)y = y + 3i$

c)
$$\begin{cases} (1 + ix) - (2y - 3i) + 4(1 - iz) = 5 + i \\ (3 - 2iy) + z - 2(1 + iw) = x - i \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} |x + iy| - |z + iw| = 1 & |x + iy| + (z + iw) = i \\ \operatorname{tg} \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{w}{z} \end{cases}$$

2) Thực hiện các phép tính:

a) $(2 + 3i) + (4 - i)$

b) $(-5 + 6i) - (7 + 8i)$

c) $(3 + 5i)(4 - i)$

d) $(6 + 11i)(7 + 3i)$

e) $(4 - 7i)^2$

f) $(-2 + 3i)^3$

g) $\frac{3 - i}{4 + 5i}$

h) $\frac{4 + 5i}{3 - i}$

i) $\sqrt[4]{i}$

j) $\sqrt[5]{-i}$

k) $\sqrt{-5 - 12i}$

l) $\sqrt[4]{1 - i\sqrt{3}}$

m) $\frac{(1 - i\sqrt{3})^{15}}{(1 - i)^{20}} + \frac{(-1 - i\sqrt{3})^{15}}{(1 + i)^{20}}$

n) $\sqrt[3]{2 - 2i}$

3) Đưa các số phức sau đây về dạng lượng giác:

$$\text{i) } -\sin \frac{\pi}{8} - i \cos \frac{\pi}{8}$$

4) Sử dụng công thức Moivre để biểu diễn các biểu thức sau đây:

a) $\cos 2x$, $\sin 2x$ và $\cos 4x$, $\sin 4x$ theo lũy thừa của $\cos x$, $\sin x$; $x \in \mathbb{P}$

b) $\text{tg} 6x$ theo luỹ thừa của $\text{tg} x$; $x \in P$

5) Giải các phương trình sau đây:

$$\text{a) } x^2 + x + 1 = 0$$

$$\text{b) } x^2 - x + 1 = 0$$

c)

$$x^2 - (2 + i)x - 1 + 7i = 0$$

$$\text{d) } x^2 - (3 - 2i)x + 5 - 7i = 0$$

$$\text{e) } x^4 - 3x^2 + 4 = 0$$

f) x^4

$$+ 2x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = 0$$

$$\text{g) } x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 100 = 0$$

h) $|x|^2 + (1 + i)x + i = 0$

6) Tính $w_1^n + w_2^n$ với n là số nguyên dương, trong đó $w_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $w_2 =$

$$-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

7) Với n là số nguyên dương, hãy tính:

a) $(1 + \varepsilon)^n$, $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$

b) $(1 +$

$$\cos \alpha + i \sin \alpha)^n, \alpha \in \mathbb{P}$$

c) $\prod_{k=1}^{n-1} \left(e^{\frac{2k\pi}{n}} - 1 \right)$ biết rằng $e^{ia} = \cos a + i \sin a$; $a \in \mathbb{P}$

d)

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right)^5$$

8) Với $\varphi \in P$ và k là số nguyên dương, hãy tính:

$$A = 1 + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \dots + \cos k\varphi$$

$$\mathbf{B} =$$

$$\sin\varphi + \sin 2\varphi + \dots + \sin k\varphi$$

9) Chứng minh:

a) Nếu $x + iy = (a + ib)^n$; $x, y, a, b \in \mathbb{P}$; $n = 1, 2, \dots$ thì $x^2 + y^2 = (a^2 + b^2)^n$

b) Nếu $\sqrt{a+ib} = \pm (x+iy)$; $x, y, a, b \in \mathbb{P}$ thì $\sqrt{a-ib} = \pm (x-iy)$

c) $|Z_1 + Z_2|^2 + |Z_1 - Z_2|^2 = 2(|Z_1|^2 + |Z_2|^2)$

$$d) \left[\frac{1+itgx}{1-itgx} \right]^n = \frac{1+itgnx}{1-itgnx}; n = 1, 2, \dots; x \in P$$

e) Nếu $z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta$; $\theta \in \mathbb{R}$ thì $z^m + \frac{1}{z^m} = 2\cos m\theta$; $m = 1, 2, \dots$

f) Tổng các nghiệm của phương trình $1 + Z + Z^2 + Z^3 + Z^4 = 0$ bằng -1

g) $\cos \frac{2.1.\pi}{10} + \cos \frac{2.2.\pi}{10} + \cos \frac{2.3.\pi}{10} + \dots + \cos \frac{2.9.\pi}{10} = -1$

$$\sin \frac{2.1.\pi}{10} + \sin \frac{2.2.\pi}{10} + \sin \frac{2.3.\pi}{10} + \dots + \sin \frac{2.9.\pi}{10} = 0$$

h) $-C_{16}^2 + C_{16}^4 - C_{16}^6 + C_{16}^8 - C_{16}^{10} + C_{16}^{12} - C_{16}^{14} + C_{16}^{16} = 255$.

i) $-C_{17}^2 + C_{17}^4 - C_{17}^6 + C_{17}^8 - C_{17}^{10} + C_{17}^{12} - C_{17}^{14} + C_{17}^{16} = C_{17}^1 - C_{17}^3 + C_{17}^5 - C_{17}^7 + C_{17}^9 - C_{17}^{11} + C_{17}^{13} - C_{17}^{15} = 255$