

CÁC BÀI TOÁN HÌNH KHÔNG GIAN

CÁC BÀI TOÁN VỀ THỂ TÍCH CHÓP

CÂU 1) Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC = a$, $BC = \frac{a}{2}$, $SA = a\sqrt{3}$, $SAB = SAC = 30^\circ$.

Gọi M là trung điểm SA , chứng minh $SA \perp (MBC)$. Tính $V_{S.MBC}$

GIẢI

Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC = a$, $BC = \frac{a}{2}$, $SA = a\sqrt{3}$,

$SAB = SAC = 30^\circ$.

Gọi M là trung điểm SA , chứng minh $SA \perp (MBC)$.

Tính $V_{S.MBC}$

Theo định lí cosin ta có:

$$SB^2 = SA^2 + AB^2 - 2SA \cdot AB \cdot \cos SAB = 3a^2 + a^2 - 2 \cdot a\sqrt{3} \cdot a \cdot \cos 30^\circ = a^2$$

Suy ra $SB = a$. Tương tự ta cũng có $SC = a$.

Gọi M là trung điểm của SA , do hai tam giác SAB và SAC là

hai tam giác cân nên $MB \perp SA$, $MC \perp SA$. Suy ra $SA \perp (MBC)$.

Hai tam giác SAB và SAC có ba cặp cạnh tương ứng bằng nhau nên chúng bằng nhau. Do đó $MB = MC$ hay tam giác MBC cân tại M . Gọi N là trung điểm của BC suy ra $MN \perp BC$. Tương tự ta cũng có $MN \perp SA$.

$$MN^2 = AN^2 - AM^2 = AB^2 - BN^2 - AM^2 = a^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{16} \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Do đó } V_{S.MBC} = \frac{1}{3} SM \cdot \frac{1}{2} MN \cdot BC = \frac{1}{6} \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{32} \text{ (đvtt)}$$

CÂU 2) Cho tứ diện $SABC$ có tam giác ABC vuông cân đỉnh B , $AB = a$; các cạnh $SA = SB = SC = 3a$, ($a > 0$). Trên cạnh SA , SB lần lượt lấy điểm M , N sao cho $SM = BN = a$. Tính thể tích khối chóp $C.ABNM$ theo a .

GIẢI

* Chân đường cao của tứ diện hạ từ đỉnh S là trung điểm H của cạnh AC

$$\text{* Tính được } V_{S.ABC} = \frac{a^3 \sqrt{34}}{12}$$

$$\text{* CM được } V_{S.MNC} = \frac{2}{9} V_{S.ABC}$$

$$\Rightarrow V_{C.ABNM} = \frac{7}{9} V_{S.ABC} = \frac{7a^3 \sqrt{34}}{108}$$

Câu V. (1.0 điểm)

Cho tứ diện $ABCD$ biết $AB = CD = a$, $AD = BC = b$, $AC = BD = c$. Tính thể tích của tứ diện $ABCD$

GIẢI

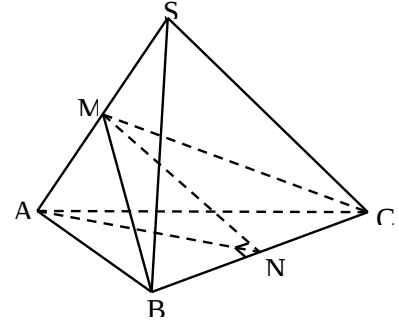
Qua B , C , D lần lượt dựng các đường thẳng

Song song với CD , BD , BC cắt nhau tại M , N , P

Ta có $MN = 2BD$, $MP = 2CD$, $NP = 2BC$

từ đó ta có các tam giác AMN , APM , ANP

vuông tại A Đặt $x = AM$, $y = AN$, $AP = z$ ta có



$$x = \sqrt{2(a^2 + c^2 - b^2)}, y = \sqrt{2(b^2 + c^2 - a^2)}$$

$$z = \sqrt{2(a^2 + b^2 - c^2)}$$

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{12} \sqrt{2(a^2 + c^2 - b^2)(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + b^2 - c^2)}$$

CÂU 3) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và tính bán kính mặt cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của hình chóp đó.

G

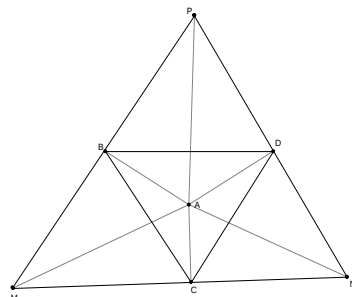
Gọi O là giao điểm AC và $BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$

$$\text{Ta có: } SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$S_{ABCD} = a^2 \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{6} a^3 \sqrt{2}.$$

Gọi M, N là trung điểm AB và CD và I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác SMN . Ta chứng minh I cách đều các mặt của hình chóp

$$S_{\Delta SMN} = pr \Rightarrow r = \frac{2a^2 \sqrt{2}}{4(a + a\sqrt{3})} = \frac{a\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} \text{ là bán kính cần tìm.}$$



CÂU 4) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi ; hai đường chéo $AC = 2\sqrt{3}a$, $BD = 2a$ và cắt nhau tại O ; hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$, tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a .

GIẢI

Từ giả thiết $AC = 2a\sqrt{3}$; $BD = 2a$ và AC, BD vuông góc với nhau tại trung điểm O của mỗi đường chéo. Ta có tam giác ABO vuông tại O và $AO = a\sqrt{3}$; $BO = a$, do đó $\angle ABD = 60^\circ$

Hay tam giác ABD đều.

Từ giả thiết hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ nên giao tuyến của chúng là $SO \perp (ABCD)$.

Do tam giác ABD đều nên với H là trung điểm của AB , K là trung điểm của HB ta có $DH \perp AB$ và $DH = a\sqrt{3}$; $OK \parallel$

$$DH \text{ và } OK = \frac{1}{2} DH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OK \perp AB \Rightarrow AB \perp (SOK)$$

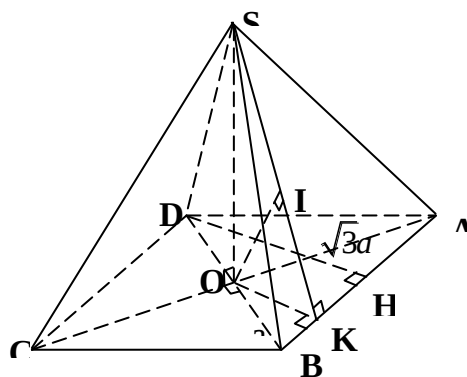
Gọi I là hình chiếu của O lên SK ta có $OI \perp SK$; $AB \perp OI \Rightarrow OI \perp (SAB)$, hay OI là khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) .

$$\text{Tam giác } SOK \text{ vuông tại } O, OI \text{ là đường cao} \Rightarrow \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OK^2} + \frac{1}{SO^2} \Rightarrow SO = \frac{a}{2}$$

$$\text{Diện tích đáy } S_{ABCD} = 4S_{\Delta ABO} = 2.OA.OB = 2\sqrt{3}a^2;$$

$$\text{đường cao của hình chóp } SO = \frac{a}{2}.$$

Thể tích khối chóp $S.ABCD$:



$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$$

CÂU 5) Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng 1. Gọi M, N là các điểm lần lượt di động trên các cạnh AB, AC sao cho $(DMN) \perp (ABC)$. Đặt $AM = x$, $AN = y$. Tính thể tích tứ diện DAMN theo x và y. Chứng minh rằng: $x + y = 3xy$.

GIẢI

Dựng $DH \perp MN = H$

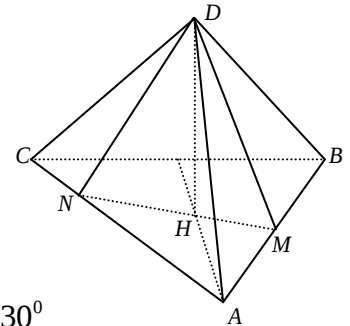
Do $(DMN) \perp (ABC) \Rightarrow DH \perp (ABC)$ mà $D.ABC$ là tứ diện đều nên H là tâm tam giác đều ABC .

Trong tam giác vuông DHA: $DH = \sqrt{DA^2 - AH^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Diện tích tam giác AMN là $S_{AMN} = \frac{1}{2} AM \cdot AN \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} xy$

Thể tích tứ diện $D.AMN$ là $V = \frac{1}{3} S_{AMN} \cdot DH = \frac{\sqrt{2}}{12} xy$

Ta có: $S_{AMN} = S_{AMH} + S_{AMH} \Leftrightarrow \frac{1}{2} xy \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} x \cdot AH \cdot \sin 30^\circ + \frac{1}{2} y \cdot AH \cdot \sin 30^\circ$
 $\Leftrightarrow x + y = 3xy.$



Trước hết ta có: $x^3 + y^3 \geq \frac{(x+y)^3}{4}$ (biến đổi tương đương) $\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (x-y)^2 (x+y) \geq 0$

Đặt $x + y + z = a$. Khi đó

$$4P \geq \frac{(x+y)^3 + 64z^3}{a^3} = \frac{(a-z)^3 + 64z^3}{a^3} = (1-t)^3 + 64t^3$$

(với $t = \frac{z}{a}$, $0 \leq t \leq 1$)

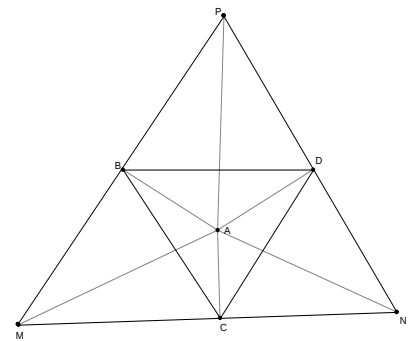
Xét hàm số $f(t) = (1-t)^3 + 64t^3$ với $t \in [0;1]$. Có

$$f'(t) = 3[64t^2 - (1-t)^2], f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{9} \in [0;1]$$

Lập bảng biến thiên

$$\Rightarrow \min_{t \in [0;1]} f(t) = \frac{64}{81} \Rightarrow \text{GTNN của } P \text{ là } \frac{16}{81} \text{ đạt được khi } x = y = 4z >$$

0



CÂU 6) Cho hình chóp $S.ABC$ có chân đường cao là H trùng với tâm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC và $AB = AC = 5a$, $BC = 6a$. Góc giữa mặt bên (SBC) với mặt đáy là 60° . Tính theo a thể tích và diện tích xung quanh của khối chóp $S.ABC$.

GIẢI

Gọi M là trung điểm $BC \rightarrow A, M, H$ thẳng hàng

$$BC \perp AM \rightarrow BC \perp SM \rightarrow \angle SMH = 60^\circ.$$

$$AM=4a \rightarrow S_{ABC} = 12a^2; p=8a \rightarrow r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{3a}{2} = MH.$$

$$\rightarrow SH = \frac{3a\sqrt{3}}{2} \rightarrow V_{S.ABC} = 6a^3\sqrt{3}.$$

Hạ HN, HP vuông góc với AB và AC $\rightarrow AB \perp SN; AC \perp SP$

$$HM = HN = HP \rightarrow SM = SN = SP = 3a \rightarrow S_{xq} = 3ap = 24a^2.$$

CÂU 7) Cho hình chóp S.ABC có SA=SB=SC= $a\sqrt{2}$. Đáy là tam giác ABC cân $BAC = 120^\circ$, cạnh BC=2a. Tính thể tích của khối chóp S.ABC. Gọi M là trung điểm của SA. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SBC).

* Áp dụng định lý cosin trong ΔABC có $AB = AC = \frac{2a}{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 120^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}. \text{ Gọi H là hình chiếu của S lên (ABC), theo gt: SA = SB = SC} \Rightarrow HA = HB = HC$$

$\Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

* Theo định lý sin trong ΔABC ta có: $\frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{2a}{\sqrt{3}} = HA$

$$\Delta SHA \text{ vuông tại H} \Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - HA^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SH = \frac{a^2\sqrt{2}}{9}$$

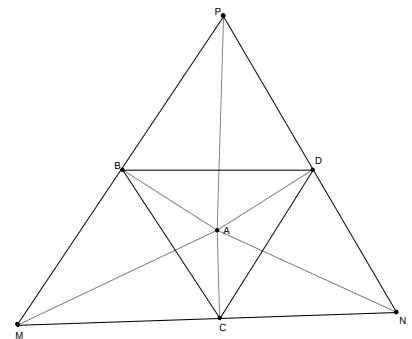
* Gọi h_A, h_M lần lượt là khoảng cách từ A, M tới mp(SBC)

$$\Rightarrow \frac{h_M}{h_A} = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{2} \Rightarrow h_M = \frac{1}{2} h_A.$$

$$\Delta SBC \text{ vuông tại S} \Rightarrow S_{\Delta SBC} = a^2$$

$$* \text{ Lại có: } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta SBC} \cdot h_A \Rightarrow h_A = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{\Delta SBC}} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Vậy } h_M = d(M; (SBC)) = \frac{a\sqrt{2}}{6}$$



CÂU 8) Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh A, $AB = a\sqrt{2}$. Gọi I là trung điểm của

BC, hình chiếu vuông góc H của S lên mặt đáy (ABC) thỏa mãn: $\vec{IA} = -2\vec{IH}$, góc giữa SC và mặt đáy (ABC) bằng 60° . Hãy tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách từ trung điểm K của SB tới (SAH).

•Ta có $\vec{IA} = -2\vec{IH} \Rightarrow H$ thuộc tia đối của tia IA và $IA = 2IH$

$$BC = AB\sqrt{2} = 2a; AI = a; IH = \frac{IA}{2} = \frac{a}{2}$$

$$AH = AI + IH = \frac{3a}{2}$$

$$•\text{Ta có } HC^2 = AC^2 + AH^2 - 2AC \cdot AH \cos 45^\circ \Rightarrow HC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Vì } SH \perp (ABC) \Rightarrow (SC; (\widehat{ABC})) = \widehat{SCH} = 60^\circ$$

$$SH = HC \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{15}}{2}$$

$$\bullet V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} (a\sqrt{2})^2 \frac{a\sqrt{15}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{15}}{6}$$

$$\bullet \left. \begin{array}{l} BI \perp AH \\ BI \perp SH \end{array} \right\} \Rightarrow BI \perp (SAH)$$

$$\text{Ta có } \frac{d(K; (SAH))}{d(B; (SAH))} = \frac{SK}{SB} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(K; (SAH)) = \frac{1}{2} d(B; (SAH)) = \frac{1}{2} BI = \frac{a}{2}$$

CÂU 9) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi ; hai đường chéo $AC = 2\sqrt{3}a$, $BD = 2a$ và cắt nhau tại O; hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

Biết khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$, tính thể tích khối chóp S.ABCD

theo a.

Từ giả thiết $AC = 2a\sqrt{3}$; $BD = 2a$ và AC ,BD vuông góc với nhau tại trung điểm O của mỗi đường chéo.Ta có tam giác ABO vuông tại O và $AO = a\sqrt{3}$; $BO = a$, do đó

$$\angle ABD = 60^\circ$$

Hay tam giác ABD đều.

Từ giả thiết hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD) nên giao tuyến của chúng là $SO \perp (ABCD)$.

Do tam giác ABD đều nên với H là trung điểm của AB, K là trung điểm của HB ta có $DH \perp AB$ và $DH = a\sqrt{3}$;

$$OK \parallel DH \text{ và } OK = \frac{1}{2} DH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OK \perp AB \Rightarrow AB \perp (SOK)$$

Gọi I là hình chiếu của O lên SK ta có $OI \perp SK$; $AB \perp OI \Rightarrow OI \perp (SAB)$, hay OI là khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB).

Tam giác SOK vuông tại O, OI là đường cao $\Rightarrow$

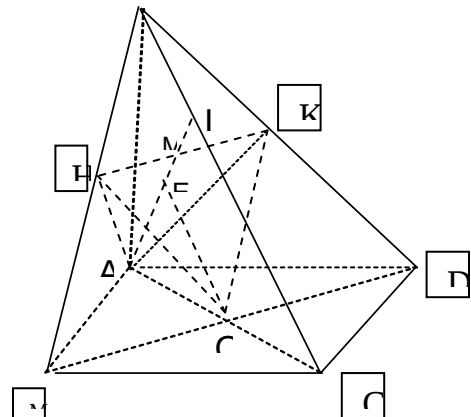
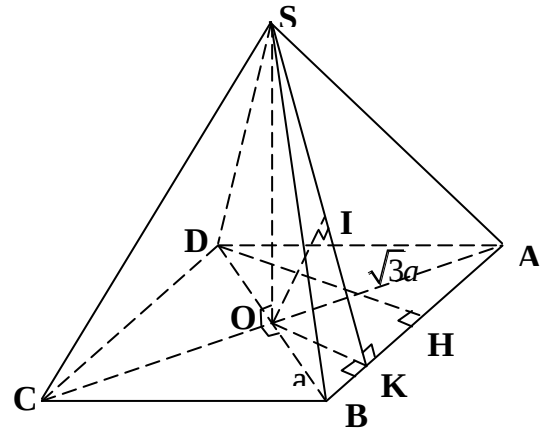
$$\frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OK^2} + \frac{1}{SO^2} \Rightarrow SO = \frac{a}{2}$$

$$\text{Diện tích đáy } S_{ABCD} = 4S_{\Delta ABO} = 2.OA.OB = 2\sqrt{3}a^2;$$

$$\text{đường cao của hình chóp } SO = \frac{a}{2}.$$

Thể tích khối chóp S.ABCD:

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$$



CÂU 10) Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O, SA vuông góc với đáy hình chóp. Cho $AB = a$, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SD. Chứng minh $SC \perp (AHK)$ và tính thể tích khối chóp OAHK.

+BC vuông góc với (SAB)

$\Rightarrow$ BC vuông góc với AH mà AH vuông với SB

$\Rightarrow$ AH vuông góc với (SBC) $\Rightarrow$ AH vuông góc SC (1)

+ Tương tự AK vuông góc SC (2)

(1) và (2) $\Rightarrow$ SC vuông góc với (AHK)

$$SB^2 = AB^2 + SA^2 = 3a^2 \Rightarrow SB = a\sqrt{3}$$

$$AH \cdot SB = SA \cdot AB \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow SH = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow SK = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

(do 2 tam giác SAB và SAD bằng nhau và cùng vuông tại A)

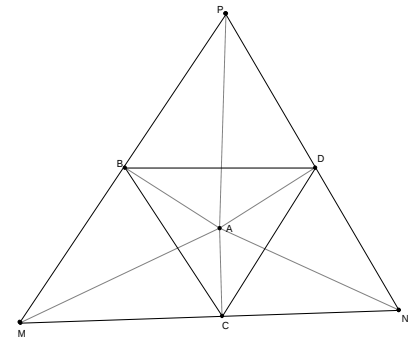
$$\text{Ta có HK song song với BD nên } \frac{HK}{BD} = \frac{SH}{SB} \Rightarrow HK = \frac{2a\sqrt{2}}{3}.$$

kẻ OE// SC $\Rightarrow OE \perp (AHK)$ (do $SC \perp (AHK)$) suy ra OE là đ-ờng cao của hình chóp OAHK và $OE = \frac{1}{2} IC = \frac{1}{4} SC = \frac{a}{2}$

Gọi AM là đường cao của tam giác cân AHK ta có

$$AM^2 = AH^2 - HM^2 = \frac{4a^2}{9} \Rightarrow AM = \frac{2a}{3}$$

$$V_{OAHK} = \frac{1}{3} OE \cdot S_{AHK} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} HK \cdot AM = \frac{a^3 \sqrt{2}}{27} \text{ (đvtt)}$$



CÂU 11) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D; $AB = AD = 2a$, $CD = a$; góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) bằng 60° . Gọi I là trung điểm của cạnh AD. Biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD), tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

Giải:

Vì (SBI) và (SCI) vuông góc với (ABCD) nên $SI \perp (ABCD)$.

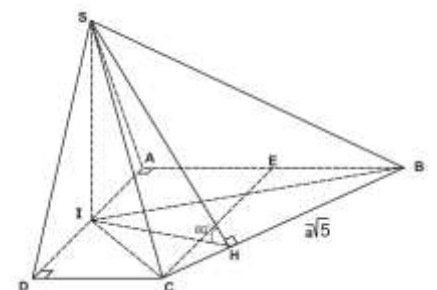
Ta có $IB = a\sqrt{5}$; $BC = a\sqrt{5}$; $IC = a\sqrt{2}$;

Hạ $IH \perp BC$ tính được $IH = \frac{3a\sqrt{5}}{5}$;

Trong tam giác vuông SIH có $SI = IH \tan 60^\circ = \frac{3a\sqrt{15}}{5}$.

$$S_{ABCD} = S_{AECD} + S_{EBC} = 2a^2 + a^2 = 3a^2 \text{ (E là trung điểm của AB).}$$

$$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} SI = \frac{1}{3} 3a^2 \frac{3a\sqrt{15}}{5} = \frac{3a^3 \sqrt{15}}{5}.$$



Câu V. (1.0 điểm)

CÂU 12) Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình thoi. $SA = x$ ($0 < x < \sqrt{3}$) các cạnh còn lại đều bằng 1. Tính thể tích của hình chóp S.ABCD theo x

Ta có $\triangle SBD = \triangle DCB$ (c.c.c) $\Rightarrow SO = CO$

Tương tự ta có $SO = OA$

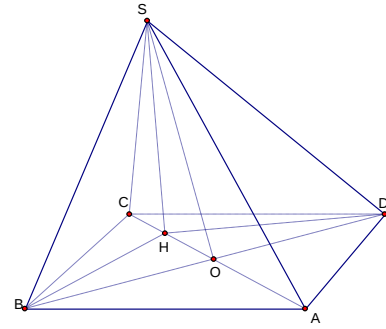
vậy tam giác SCA vuông tại S.

$$\Rightarrow CA = \sqrt{1+x^2}$$

Mặt khác ta có $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$

$$\Rightarrow BD = \sqrt{3-x^2} \text{ (do } 0 < x < \sqrt{3})$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{4} \sqrt{1+x^2} \sqrt{3-x^2}$$



Gọi H là hình chiếu của S xuống (CAB)

Vì $SB = SD$ nên $HB = HD$

$\Rightarrow H \in CO$

$$\text{Mà } \frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SC^2} + \frac{1}{SA^2} \Rightarrow SH = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{6} x \sqrt{3-x^2} \text{ (đvtt)}$$

CÂU 13) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$. Cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy, cạnh bên SB tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° . Trên cạnh SA lấy điểm M sao cho $AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, mặt phẳng (BCM) cắt cạnh SD tại N. Tính thể tích khối chóp S.BCNM

Tính thể tích hình chóp SBCNM

(BCM) // AD nên mặt phẳng này cắt mp(SAD) theo giao tuyến MN // AD

Ta có : $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp BM$. Tứ giác BCMN là hình thang vuông có BM là đường cao

$$\text{Ta có } SA = AB \tan 60^\circ = a\sqrt{3},$$

$$\frac{MN}{AD} = \frac{SM}{SA} \Leftrightarrow \frac{MN}{2a} = \frac{a\sqrt{3} - \frac{a\sqrt{3}}{3}}{a\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Suy ra } MN = \frac{4a}{3}, BM = \frac{2a}{\sqrt{3}} \quad \text{Diện tích hình}$$

thang BCMN là :

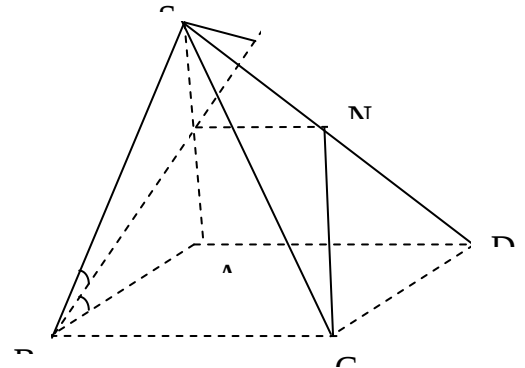
$$S = \frac{BC+MN}{2} BM = \left(\frac{2a + \frac{4a}{3}}{2} \right) \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{10a^2}{3\sqrt{3}}$$

Hạ $AH \perp BM$. Ta có $SH \perp BM$ và $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SH$. Vậy $SH \perp (BCNM)$

$\Rightarrow SH$ là đường cao của khối chóp SBCNM

$$\text{Trong tam giác SBA ta có } SB = 2a, \frac{AB}{SB} = \frac{AM}{MS} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } BM \text{ là phân giác của góc SBA} \Rightarrow \angle SBH = 30^\circ \Rightarrow SH = SB \cdot \sin 30^\circ = a$$

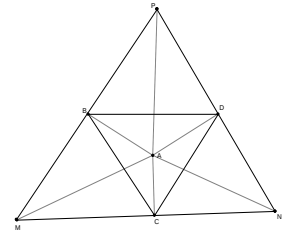


$$\text{Gọi } V \text{ là thể tích chóp } SBCNM \text{ ta có } V = \frac{1}{3}SH.(dtBCNM) = \frac{10\sqrt{3}a^3}{27}$$

CÂU 14) Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC = a$. $BC = \frac{a}{2}$. $SA = a\sqrt{3}$,

$SAB = SAC = 30^\circ$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

$$\text{Do đó } V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA \cdot \frac{1}{2}MN \cdot BC = \frac{1}{6}a\sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{16}$$

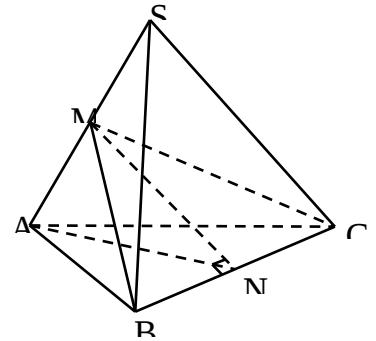


Theo định lí cosin ta có: $SB^2 = SA^2 + AB^2 - 2SA \cdot AB \cdot \cos SAB = 3a^2 + a^2 - 2a\sqrt{3} \cdot a \cdot \cos 30^\circ = a^2$
Suy ra $SB = a$. Tương tự ta cũng có $SC = a$.

Gọi M là trung điểm của SA, do hai tam giác SAB và SAC là hai tam giác cân nên $MB \perp SA$, $MC \perp SA$. Suy ra $SA \perp (MBC)$.

$$\text{Ta có } V_{S.ABC} = V_{S.MBC} + V_{A.MBC} = \frac{1}{3}MA \cdot S_{MBC} + \frac{1}{3}SA \cdot S_{MBC} = \frac{1}{3}SA \cdot S_{MBC}$$

Hai tam giác SAB và SAC có ba cặp cạnh tương ứng bằng nhau nên chúng bằng nhau. Do đó $MB = MC$ hay tam giác MBC cân tại M. Gọi N là trung điểm của BC suy ra $MN \perp BC$. Tương tự ta cũng có $MN \perp SA$.



$$MN^2 = AN^2 - AM^2 = AB^2 - BN^2 - AM^2 = a^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{16}$$

$$\Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Câu 14) Cho hai hình chóp $S.ABCD$ và $S'.ABCD$ có chung đáy là hình vuông ABCD cạnh a. Hai đỉnh S và S' nằm về cùng một phía đối với mặt phẳng (ABCD), có hình chiếu vuông góc lên đáy lần lượt là trung điểm H của AD và trung điểm K của BC. Tính thể tích phần chung của hai hình chóp, biết rằng $SH = S'K = h$.

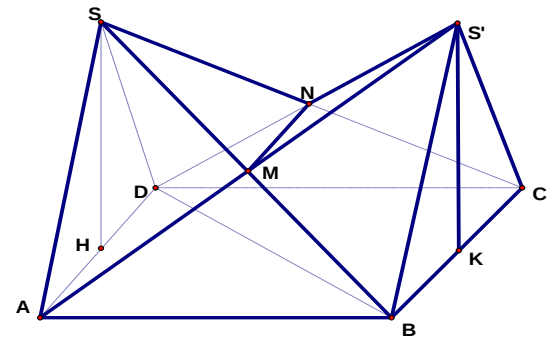
$SABS'$ và $SDCS'$ là hình bình hành $\Rightarrow M, N$ là trung điểm SB, $S'D$: $V = V_{S.ABCD} - V_{S.AMND}$

$$V_{S.AMND} = V_{S.AMD} + V_{S.MND};$$

$$\frac{V_{S.AMD}}{V_{S.ABD}} = \frac{SM}{SB} = \frac{1}{2}; \frac{V_{S.MND}}{V_{S.BCD}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{1}{4};$$

$$V_{S.ABD} = V_{S.ACD} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD}; V_{S.AMND} = \frac{3}{8}V_{S.ABCD} \Rightarrow V = \frac{5}{8}V_{S.ABCD}$$

$$\Rightarrow V = \frac{5}{24}a^2h$$



Câu 15) Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tâm O. Cạnh bên SA vuông góc với mp (ABCD) và $SA = a$; M là trung điểm cạnh SD.

a) Mặt phẳng (α) đi qua OM và vuông góc với mặt phẳng (ABCD) cắt hình chóp SABCD theo thiết diện là hình gì? Tính diện tích thiết diện theo a.

b) Gọi H là trung điểm của CM; I là điểm thay đổi trên SD. Chứng minh $OH \perp (SCD)$; và hình chiếu của O trên CI thuộc đường tròn cố định.

a. Kẻ $MQ \parallel SA \Rightarrow MQ \perp (ABCD) \Rightarrow (\alpha) \equiv (MQO)$

Thiết diện là hình thang vuông MNPQ ($MN \parallel PQ$)

$$S_{td} = \frac{(MN + PQ) \cdot MQ}{2} = \frac{3a^2}{8} \text{ (đvdt)}$$

b.

$$\triangle AMC : OH \parallel AM, AM \perp SD, AM \perp CD \Rightarrow AM \perp (SCD) \Rightarrow OH \perp (SCD)$$

Gọi K là hình chiếu của O trên CI
 $\Rightarrow OK \perp CI, OH \perp CI \Rightarrow CI \perp (OKH) \Rightarrow CI \perp HK$

Trong mp(SCD) : H, K cố định, góc HKC vuông $\Rightarrow K$ thuộc đường tròn đg kính HC

Câu 16) Cho tứ diện ABCD có ba cạnh AB, BC, CD đôi một vuông góc với nhau và $AB = BC = CD = a$. Gọi $C' \square$ và $D' \square$ lần lượt là hình chiếu của điểm B trên AC và AD. Tính thể tích tứ diện $ABC'D' \square$.

CÂU 4. Vì $CD \perp BC, CD \perp AB$ nên $CD \perp mp(ABC)$ và do đó $mp(ABC) \perp mp(ACD)$. Vì $BC' \perp AC$ nên $BC \perp mp(ACD)$.

Suy ra nếu V là thể tích tứ diện $ABC'D'$ thì $V = \frac{1}{3} dt(AC'D').BC'$.

Vì tam giác ABC vuông cân nên $AC' = CC' = BC' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $AD^2 = AB^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 = 3a^2$ nên $AD = a\sqrt{3}$. Vì BD' là đường cao của tam giác vuông ABD nên $AD'.AD = AB^2$, vậy $AD' = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Ta có

$$dt(AC'D') = \frac{1}{2} AC'.AD' \sin \widehat{CAD} = \frac{1}{2} AC'.AD' \cdot \frac{CD}{AD} = \frac{1}{2} \frac{a\sqrt{2}}{2} \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a^2\sqrt{2}}{12}. \text{ Vậy } V = \frac{1}{3} \frac{a^2\sqrt{2}}{12} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \boxed{\frac{a^3}{36}}$$

Câu 17) Trên đường thẳng vuông góc tại A với mặt phẳng của hình vuông ABCD cạnh a ta lấy điểm S với $SA = 2a$. Gọi B', D' là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SD. Mặt phẳng $(AB'D')$ cắt SC tại C' . Tính thể tích khối đa diện $ABCDD'C'B'$.

+ Trong tam giác SAB hạ $AB' \perp SC$.

Trong tam giác SAD hạ $AD' \perp SD$.

Để có: $BC \perp SA, BC \perp BA \Rightarrow BC \perp (SAB)$

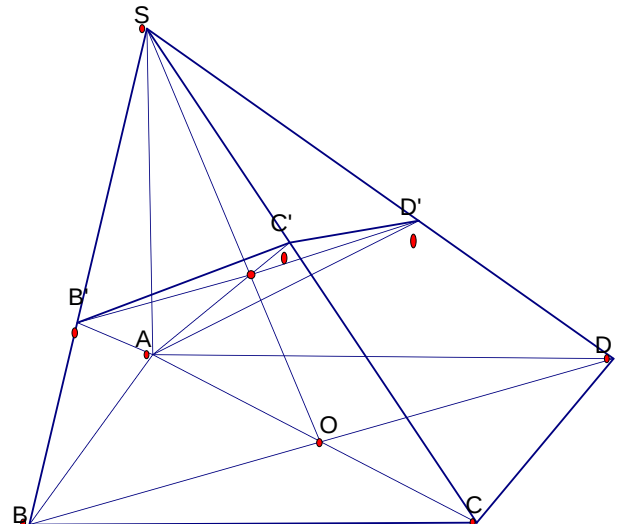
Suy ra: $AB' \perp BC$, mà $AB' \perp SB$. Từ đó có $AB' \perp (SAC) \Rightarrow AB' \perp SC(1)$.

Tương tự ta có: $AD' \perp SC(2)$. Từ (1) và (2)

suy ra: $SC \perp (AB'D') \Rightarrow B'D' \perp SC$.

Từ đó suy ra: $SC' \perp (AB'C'D')$

$$+ \text{ Ta có: } \frac{1}{AB'^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{BA^2} \Rightarrow AB' = \frac{2\sqrt{5}a}{5}$$



$$\Rightarrow SB' = \sqrt{SA^2 - AB'^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{4}{5}a^2} = \frac{4\sqrt{5}}{5}a, \quad SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{5}a.$$

$$\text{Suy ra: } \frac{SB'}{SB} = \frac{4}{5};$$

Lại có $B'D' \parallel BD$ (cùng thuộc mp(SBD) và cùng vuông góc với SC) nên $B'D' \perp AC'$ (vì dễ có $BD \perp (SAC)$ nên $BD \perp AC'$).

$$\text{Xét hai tam giác đồng dạng } SB'D' \text{ và } SBD \text{ suy ra: } \frac{B'D'}{BD} = \frac{SB'}{SB} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow B'D' = \frac{4\sqrt{2}a}{5}.$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{AC'^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow AC' = \frac{2\sqrt{3}a}{3} \Rightarrow SC' = \sqrt{SA^2 - AC'^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}a$$

$$+ \text{ Ta có: } V_{S.AB'C'D'} = \frac{1}{3} S_{AB'C'D'} \cdot SC' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} B'D' \cdot AC' \cdot SC' = \frac{16}{45} a^3.$$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{2}{3} a^3. \text{ Suy ra thể tích đa diện cần tìm là:}$$

$$V = V_{S.ABCD} - V_{S.AB'C'D'} = \frac{14}{45} a^3.$$

Câu 18) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi; hai đường chéo $AC = 2\sqrt{3}a$, $BD = 2a$ và cắt nhau tại O; hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Biết khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$, tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

Từ giả thiết $AC = 2a\sqrt{3}$; $BD = 2a$ và AC, BD vuông góc với nhau tại trung điểm O của mỗi đường chéo. Ta có tam giác ABO vuông tại O và $AO = a\sqrt{3}$; $BO = a$, do đó $\angle ABD = 60^\circ$

Hay tam giác ABD đều.

Từ giả thiết hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD) nên giao tuyến của chúng là $SO \perp (ABCD)$.

Do tam giác ABD đều nên với H là trung điểm của AB, K là trung điểm của HB ta có $DH \perp AB$ và

$$DH = a\sqrt{3}; \quad OK \parallel DH \text{ và } OK = \frac{1}{2} DH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OK \perp AB \Rightarrow AB \perp (SOK)$$

Gọi I là hình chiếu của O lên SK ta có $OI \perp SK$; $AB \perp OI \Rightarrow OI \perp (SAB)$, hay OI là khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB).

$$\text{Tam giác SOK vuông tại O, OI là đường cao} \Rightarrow \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OK^2} + \frac{1}{SO^2} \Rightarrow SO = \frac{a}{2}$$

$$\text{Diện tích đáy } S_{ABCD} = 4S_{\triangle ABO} = 2 \cdot OA \cdot OB = 2\sqrt{3}a^2;$$

$$\text{đường cao của hình chóp } SO = \frac{a}{2}.$$

Thể tích khối chóp S.ABCD:

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$$

