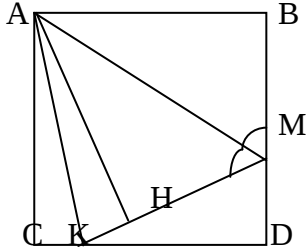


HÌNH VUÔNG LẤY CÁC ĐIỂM TRÊN CẠNH HÌNH VUÔNG

1/ Trên cạnh BC của hình vuông ABCD lấy một điểm M tùy ý. Từ M kẻ một đường thẳng cắt cạnh CD tại K sao cho $\angle AMB = \angle AMK$. Tính góc MAK.

HƯỚNG DẪN



Hạ $AH \perp MK$. Ta có $MH = MB$ (Vì $M \in$ tia phân giác của góc BAM)
 $\Rightarrow AH = AB = AC \Rightarrow \triangle ABM = \triangle AHM$; $\triangle AHK = \triangle ACK \Rightarrow \angle CAK = \angle HAK$; $\angle BAM = \angle HAM$
 $\Rightarrow \angle KAM = \frac{1}{2} \angle BAC = 45^\circ$

2/ Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 1. Trên các cạnh AB, AD lần lượt lấy các điểm P, Q sao cho $\triangle APQ$ có chu vi bằng 2.

a/ Chứng minh : $PB + QD = PQ$.

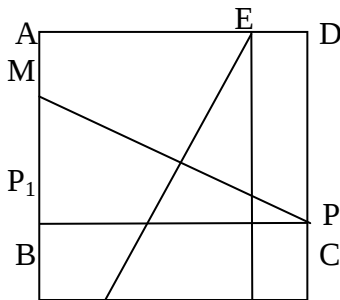
b/ Chứng minh : $\angle PCQ = 45^\circ$

3/ Cho M, N là trung điểm các cạnh AB, BC của hình vuông ABCD. Gọi P là giao điểm của DN và CM. Chứng minh PA bằng cạnh hình vuông.

4/ Từ đỉnh A của hình vuông ABCD ta vẽ hai tia Ax, Ay đi qua miền trong của hình vuông đó. Giả sử các điểm M, K là hình chiếu của B, D lên Ax ; L, N là hình chiếu của B, D lên Ay . Chứng minh rằng các đoạn thẳng KL, MN vuông góc với nhau và bằng nhau.

5/ Cho hình vuông ABCD. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA lấy lần lượt 4 điểm tùy ý M, N, P, Q. Nối MP. Hạ NE vuông góc với MP. Chứng minh rằng nếu $NE = MP$ thì E thuộc đường thẳng AD.

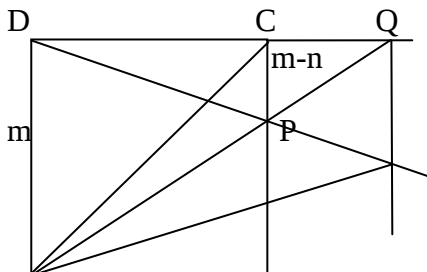
HƯỚNG DẪN



Hạ $EE_1 \perp BC$; $PP_1 \perp AB \Rightarrow \triangle EE_1N = \triangle PP_1M$
 $\Rightarrow EE_1 \perp PP_1$
 $\Rightarrow EE_1 = AB \Rightarrow E$ nằm trên AD.

6/ Qua đỉnh A của hình vuông ABCD cạnh m ta kẻ một đường thẳng bất kỳ cắt BC tại P và DC kéo dài tại Q. Chứng minh : $\frac{1}{CP} - \frac{1}{CQ} = \frac{1}{m}$.

HƯỚNG DẪN



A $\frac{n}{B}$

Đặt $BP = n$ thì $PC = m - n$.

$$\Delta ABP \sim \Delta QCP \Rightarrow \frac{CQ}{AB} = \frac{CP}{BP} \Rightarrow CQ = \frac{AB \cdot CP}{BP} = \frac{m(m-n)}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{CP} - \frac{1}{CQ} = \frac{1}{m-n} - \frac{n}{m(m-n)} = \frac{1}{m}$$

Cách 2 : Dùng tính chất hình thang . Vẽ $QK \parallel AD$

$$\text{Ta có : } \frac{QK}{AD} = \frac{PQ}{PA} \quad \text{mà} \quad \frac{PQ}{PA} = \frac{CQ}{CD} \Rightarrow \frac{QK}{AD} = \frac{CQ}{CD} \Rightarrow QK = CQ$$

$$\text{Àp dụng tính chất hình thang : } \frac{1}{CP} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{QK} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{CQ}$$

8/ Cho hình vuông ABCD . Trên các cạnh AB , BC , CD , DA ta lấy theo thứ tự các điểm E , F , G , H sao cho $AE = BF = CG = DH$. Xác định vị trí của các điểm E , F , G , H sao cho tứ giác EFGH có chu vi nhỏ nhất .

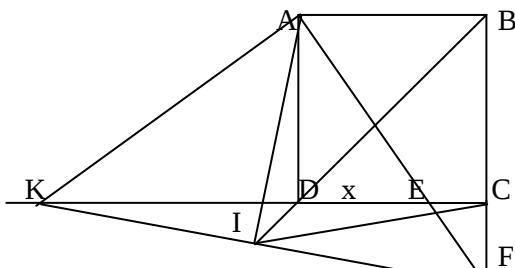
9/ Cho hình vuông ABCD . Gọi E là một điểm di động trên cạnh CD (E không trùng với C và D) . Đường thẳng AE cắt đường thẳng BC tại F . Đường thẳng AE cắt đường thẳng BC tại F . Đường thẳng vuông góc với AE tại A cắt đường thẳng CD tại K .

a/ So sánh hai tam giác ABF và ADK .

b/ Gọi I là trung điểm của FK . Chứng minh điểm I di động trên một đường thẳng cố định khi E di động trên CD .

c/ Chứng minh rằng $EK \geq 2AB$. (Đề thi học sinh giỏi cấp huyện năm 2003 – 2004)

HƯỚNG DẪN



$$\text{a/ } \angle BAE = \angle DAK \Rightarrow \Delta ABF = \Delta ADK \quad (\text{g.c.g})$$

$$\text{b/ } IA = IC = \frac{1}{2} KF \Rightarrow I \text{ nằm trên đường trung trực của } AC \text{ hay } I \text{ nằm trên đường thẳng } BD .$$

$$\text{c/ Đặt } DE = x . \text{ Trong tam giác vuông } AEK \text{ ta có : } DA^2 = DE \cdot DK \Rightarrow DK^2 = \frac{a^2}{x}$$

$$\text{Ta có : } EK = ED + DK = x + \frac{a^2}{x} . \text{ Àp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số không âm } x \text{ và } \frac{a^2}{x}$$

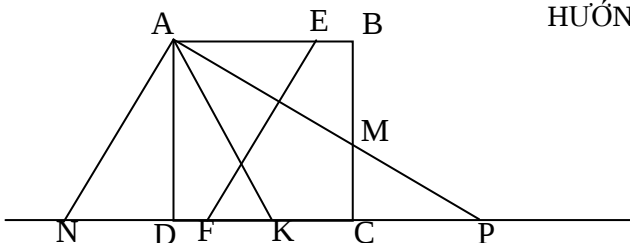
$$\text{ta được : } EK \geq 2 \sqrt{x \cdot \frac{a^2}{x}} = 2a \Rightarrow EK \geq 2AB .$$

15/ Cho hình vuông ABCD . Lấy M trên cạnh BC . Đường thẳng AM cắt đường thẳng CD tại P . Đường thẳng EF vuông góc với AM trong đó E , F tương ứng nằm trên AB , CD . Đường phân giác của góc DAM cắt CD tại K . Chứng minh rằng :

$$\text{a/ } EF = BM + DK$$

$$\text{b/ } \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AP^2}$$

HƯỚNG DẪN



Kẻ $AN \perp AM$ cắt đường thẳng CD tại N . Tứ giác $ANFE$ là hình bình hành nên $EF = AN$ (1).
Ta có : $DAN = BAM$; $AD = AB$; $AND = ABM = 90^\circ \Rightarrow \Delta AND = \Delta ABM \Rightarrow BM = ND$; $AN = AM$ (2).

Mặt khác có $NAK = KAD + DAN = KAM + BAM = KAB = AKN$ nên $NA = NK$ (3)
Kết hợp (1) , (2) , (3) ta có : $EF = AN = NK = ND + DK = BM + DK$.

$$b/ \text{ Xét tam giác vuông NAP có đường cao AD ta có : } \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AN^2} + \frac{1}{AP^2}$$

$$\text{Từ đó và (2) suy ra } \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AP^2}$$

Nhận xét : Điều mấu chốt trong cách giải trên là vẽ thêm ΔAND để có $\Delta AND = \Delta ABM$. Nếu thay điều kiện $ABCD$ từ hình vuông trở thành hình chữ nhật thì trong lời giải sẽ có $\Delta AND \sim \Delta ABM$

$$\Rightarrow \frac{AN}{AM} = \frac{DN}{BM} = \frac{AD}{AB} = t \quad (t > 0). \text{ Lúc đó ta có :}$$

$$a/ EF = AN = NK = ND + DK = t.BM + DK.$$

$$b/ \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AN^2} + \frac{1}{AP^2} \Rightarrow \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AP^2}$$

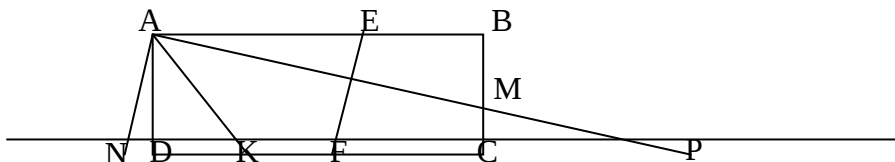
Từ đó ta có bài toán tổng quát hơn như sau :

Cho hình chữ nhật $ABCD$ (với $AD = t.AB$ ($t > 0$)). Lấy M trên cạnh BC . Đường thẳng AM cắt đường thẳng CD tại P . Đường thẳng EF vuông góc với AM trong đó E, F tương ứng nằm trên AB, CD . Đường phân giác của góc DAM cắt CD tại K . Chứng minh rằng :

$$a/ EF = t.BM + DK$$

$$b/ \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AP^2}$$

HƯỚNG DẪN (Theo nhận xét trên)



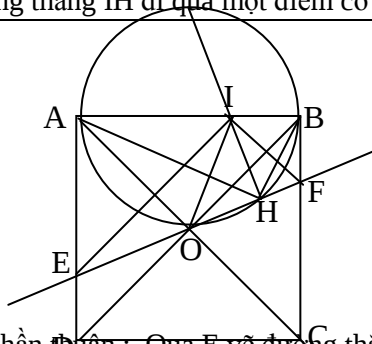
QUỖ TÍCH

1/ Cho hình vuông ABCD tâm O . Vẽ đường thẳng (d) quay quanh O cắt hai cạnh AD và BC tại E và F (E , F không trùng với các đỉnh của hình vuông). Từ E , F lần lượt vẽ các đường thẳng song song với DB , AC cắt nhau tại I .

a/ Tìm tập hợp các điểm I .

b/ Từ I vẽ đường vuông góc với EF tại H . Chứng minh rằng H thuộc về một đường cố định và đường thẳng IH đi qua một điểm cố định .

HƯỚNG DẪN



a/ **Phân tích :** Qua E vẽ đường thẳng song song với OB cắt AB tại I $\Rightarrow \triangle AEI$ vuông cân $\Rightarrow AE = AI$
 Xét $\triangle OAE$ và $\triangle OCF$ có : $\angle EAO = \angle FCO = 45^\circ$; $OA = OC$ (gt) ; $\angle AOE = \angle COF$ (đ đ)

$\Rightarrow \triangle OAE = \triangle OCF$ (g . c . g) $\Rightarrow AE = CF$.

$\Rightarrow ED = BF$; $AI = CF$ do đó : $BI = BF$.

$\triangle ABC$ có : $\frac{BI}{AI} = \frac{BF}{CF} \Rightarrow IF \parallel AC \Rightarrow I$ thuộc đường thẳng AB .

Giới hạn :

+ Khi $d \rightarrow AC$ thì $E \rightarrow A$; $F \rightarrow C$; $I \rightarrow B$

+ Khi $d \rightarrow BD$ thì $E \rightarrow D$; $F \rightarrow B$; $I \rightarrow A$

Vậy I chuyển động trên đoạn thẳng AB trừ A và B .

Phân đảo : Lấy I bất kỳ trên đường thẳng AB (I không trùng với A và B) . Gọi E , F là điểm đối xứng của I qua AC , BD .

OA , OB là hai tia phân giác của hai góc kề $\angle EOI$ và $\angle IOF \Rightarrow \angle AOB = \frac{1}{2} \angle EOF$. Mà $\angle AOB = 90^\circ$ do đó $\angle EOF = 180^\circ \Rightarrow E , O , F$ thẳng hàng .

Kết luận : Tập hợp các điểm I là cạnh AB của hình vuông ABCD (trừ hai điểm A và B)

b/ Tứ giác EAIH nội tiếp $\Rightarrow \angle AHI = \angle AEI = 45^\circ$. Tứ giác IBFH nội tiếp $\Rightarrow \angle IHB = \angle IFB = 45^\circ$.

Do đó : $\angle AHB = \angle AHI + \angle IHB = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$. AB cố định . Vậy H thuộc đường tròn cố định đường kính AB .

Gọi J là giao điểm của HI và đường tròn đường kính AB (J không trùng với H) .

$\angle AHI = \angle IHB = 45^\circ \Rightarrow$ cung $AJ =$ cung $JB \Rightarrow J$ là điểm chính giữa của cung AB nên J cố định .

Vậy đường thẳng HI đi qua điểm cố định J .

LẤY ĐIỂM TRÊN ĐƯỜNG CHÉO

1/ Cho hình vuông ABCD . M thuộc BD . E và F là hình chiếu của M trên AB và AD . Chứng minh BF , CM , DE đồng qui .

2/ Cho hình vuông ABCD , M là một điểm trên đường chéo AC . Hạ $MH \perp AD$, $MK \perp DC$.

a/ Chứng minh : $BH \perp AK$, $BK \perp CH$, $BM \perp HK$, $BM = HK$. Suy ra AK , BM , CH đồng qui .

b/ BM cắt AD tại N , cắt DC tại P . Chứng minh : $\frac{1}{BC^2} = \frac{1}{BN^2} + \frac{1}{BP^2}$

c/ Tìm vị trí của M trên AC sao cho MHDK có diện tích lớn nhất . Tính giá trị lớn nhất đó .

3/ Cho hình vuông ABCD có $AB = a$ cố định . M là một điểm di động trên đường chéo AC . Hạ MF vuông góc với BC , ME vuông góc với AB . Xác định vị trí của M trên AC sao cho diện tích $\triangle DEF$ nhỏ nhất . Tính giá trị nhỏ nhất đó .

4/ Cho hình vuông ABCD . Hãy xác định đường thẳng đi qua tâm hình vuông sao cho tổng các khoảng cách từ 4 đỉnh của hình vuông đến đường thẳng đó là :

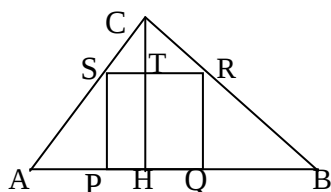
- a/ Lớn nhất .
b/ Nhỏ nhất .

VỀ HÌNH VUÔNG VỀ PHÍA NGOÀI HÌNH BÌNH HÀNH .

1/ Về phía ngoài 2 cạnh DC và CB của hình bình hành ABCD ta dựng hai hình vuông DCTU và BCSR .
Chứng minh rằng $AC = ST$ và $AC \perp ST$.

HÌNH VUÔNG NỘI TIẾP TAM GIÁC

1/ Trong tam giác vuông ABC vuông tại C . Hình vuông PQRS nội tiếp trong tam giác . (P, Q ∈ AB , S ∈ AC) . Giả sử $AB = c$ và đường cao hạ từ C xuống cạnh AB là h , $\frac{1}{h} + \frac{1}{c} = \frac{2}{3}$. Tính độ dài cạnh hình vuông .



HƯỚNG DẪN

Vẽ đường cao $CH = h$, $SP = x$. Nếu đường cao đó cắt SR tại T thì $CT = h - x$. Các tam giác SRC và ABC đồng dạng . Khi đó : $\frac{CT}{CH} = \frac{CR}{CB} = \frac{SR}{AB} \Leftrightarrow \frac{h-x}{h} = \frac{x}{c}$

$$\text{Suy ra } x = \frac{ch}{c+h} ; \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{h} + \frac{1}{c} = \frac{2}{3}$$

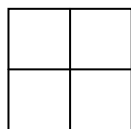
$$\Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

BÀI TOÁN SUY LUẬN

1/ Trong hình vuông cạnh bằng 1 cho 5 điểm bất kỳ . Chứng minh rằng trong các điểm đã cho có thể tìm được hai điểm sao cho khoảng cách giữa chúng không lớn hơn $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

HƯỚNG DẪN

a/



Chia hình vuông cạnh 1 thành 4 hình vuông cạnh $\frac{1}{2}$. Có 5 điểm nằm trong 4 hình vuông nên ít nhất cũng có 1 hình vuông nhỏ chứa 2 trong 5 điểm đã cho . Hai điểm này nằm trong đường tròn có đường kính là đường chéo của hình vuông nhỏ chứa nó nên khoảng cách giữa chúng không vượt quá đường kính đường tròn bằng $\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2/ Trong hình vuông cạnh bằng 1 cho 33 điểm bất kỳ . Chứng minh rằng trong các điểm đã cho có thể tìm được 3 điểm lập thành tam giác có diện tích không lớn hơn $\frac{1}{32}$.