Kinh nghiệm giảng dạy

Chuyên đề 1:

HỆ THỨC KHOẢNG CÁCH VÀ CÁC ỨNG DỤNG TRONG HÌNH HỌC PHẲNG

I.LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI:

Nhiều năm gần đây, thực tế cho thấy bài toán hình học phẳng chiếm ưu thế trong các đề thi chọn học sinh giỏi các cấp, mà vấn đề tiếp tuyến của đường tròn là một trong những nội dung được khai thác khá phong phú và đa dạng. Trong quá trình giảng dạy bồi dưỡng học sinh giỏi, chúng tôi đã tập hợp và hệ thống dưới dạng các chuyên đề. Bài viết này mạn phép giới thiệu cùng các anh chị đồng nghiệp và các em học sinh chuyên đề:

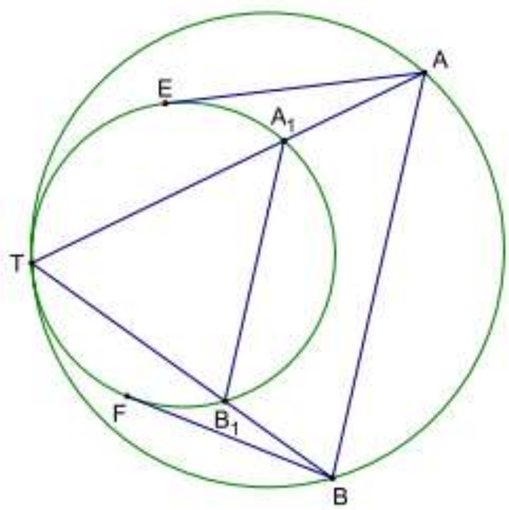
"Hệ thức khoảng cách và các ứng dụng trong hình học phẳng".

II.NỘI DUNG ĐỀ TÀI:

A.Bổ đề:

Cho đường tròn (γ) và hai điểm A,B nằm trên đó. Một đường tròn (ρ) tiếp xúc trong với (γ) tại T. Nếu AE và BF là các tiếp tuyến của (ρ) lần lượt tại E và F thì $\frac{TA}{TB}=\frac{AE}{BF}$.

* Chứng minh:



Gọi A_1 và B_1 lần lượt là các giao điểm của TA và TB với (ρ). Ta có $A_1B_1 // AB$.
Do đó:

$$\left(\frac{AE}{TA_1}\right)^2=\frac{AA_1.AT}{A_1T.A_1T}=\frac{BB_1}{B_1T}.\frac{BT}{B_1T}=\left(\frac{BF}{TB_1}\right)^2$$

Vì vậy: $\frac{AE}{TA_1}=\frac{BF}{TB_1}\Rightarrow\frac{AE}{BF}=\frac{TA_1}{TB_1}=\frac{TA}{TB}$.

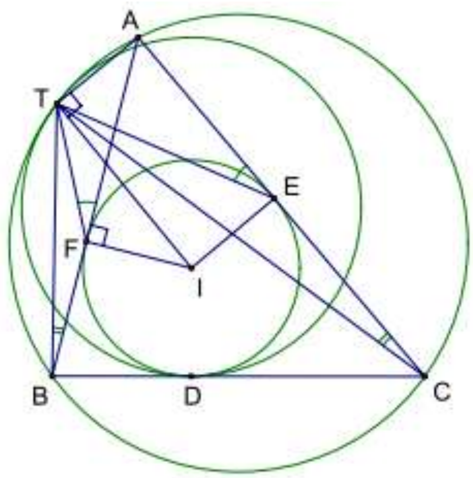
Từ hệ thức đã được chứng minh trong bổ đề trên, chúng ta sẽ vận dụng giải quyết một số bài toán minh họa sau đây nhằm làm rõ tác dụng tích cực của nó.

B. Các bài toán ứng dụng:

Bài toán 1:

Cho (Ω) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và D là tiếp điểm của đường tròn (ρ) tâm I nội tiếp tam giác ABC với cạnh BC. Gọi (ω) là đường tròn tiếp xúc trong với (Ω) tại T và tiếp xúc BC tại D. Chứng minh rằng: $ATI = 90^0$.

$*$ Lời giải:



□Gọi E và F lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn (ρ) với các cạnh CA và CB.
Theo bổ đề trên ta có:

$$\frac{TB}{TC} = \frac{BD}{CD} = \frac{BF}{CE}.$$

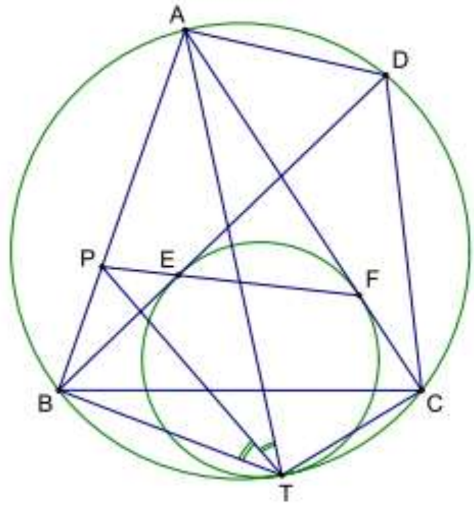
□Do đó ΔTBF đồng dạng ΔTCE, $\Rightarrow TFA = TEA$.
Từ đó 5 điểm A, I, E, F, T nằm trên một đường tròn.

Vì vậy: $ATI = AFI = 90^0$.

Bài toán 2:

Cho $ABCD$ là một tứ giác nội tiếp đường tròn (Ω). Giả sử (ω) là đường tròn tiếp xúc trong với (Ω) tại T, tiếp xúc với BD và AC lần lượt tại E và F. Gọi P là giao điểm của EF và AB. Chứng minh rằng: TP là tia phân giác của góc ATB.

$*$ Lời giải:



Áp dụng bổ đề với các đường tròn (Ω), (ω) và hai điểm A, B ta được: $\frac{AT}{BT} = \frac{AF}{BE}$.

Ta cần chứng minh: $\frac{AF}{BE} = \frac{AP}{BP}$.

Thật vậy, chú ý $PEB = AFP$ và áp dụng định lý sin vào các tam giác APF, BPE, ta có:

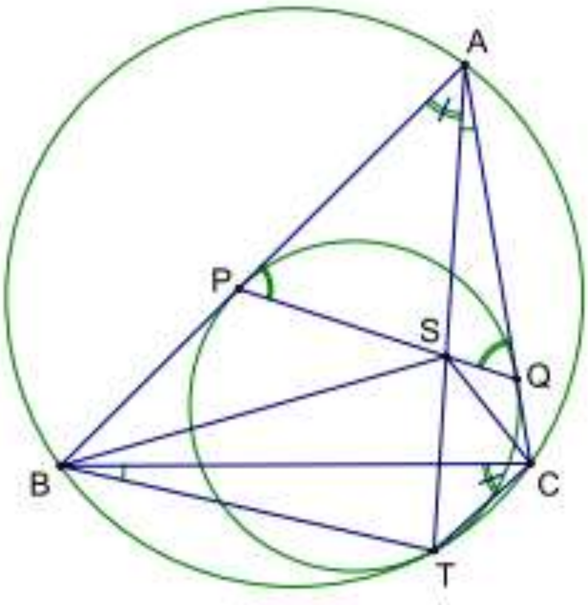
$$\frac{AP}{AF} = \frac{\sin AFP}{\sin APF} = \frac{\sin BEP}{\sin BPE} = \frac{BP}{BE}$$

Do đó: $\frac{AF}{BE} = \frac{AP}{BP}$.

Bài toán 3:

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (Ω). Đường tròn (ω) là đường tròn tiếp xúc trong với (Ω) tại T, tiếp xúc với các cạnh AB và AC lần lượt tại P và Q. Gọi S là giao điểm của AT và PQ. Chứng minh rằng: $SBA = SCA$.

$*$ Lời giải:



Áp dụng bổ đề , ta có:

$$\frac{BP}{CQ}=\frac{BT}{CT}=\frac{\sin BCT}{\sin CBT}=\frac{\sin BAT}{\sin CAT}=\frac{PS}{QS}$$

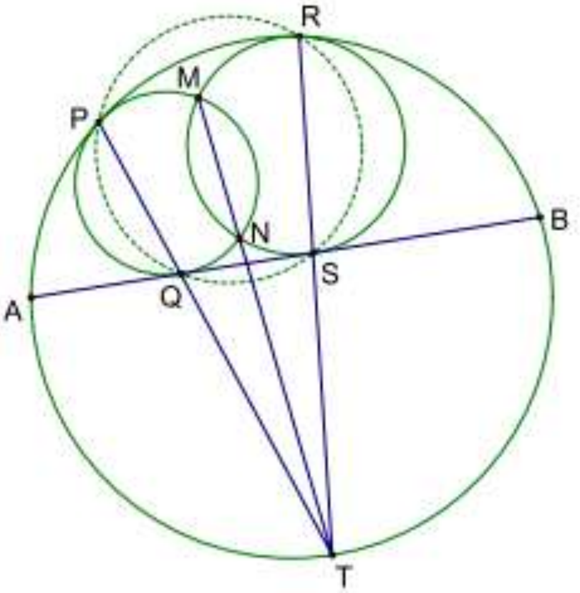
Suy ra ΔBPS đồng dạng ΔCQS

Do đó: $SBA = SCA$.

Bài toán 4:

Xét đường tròn (O) và dây cung AB. Giả sử các đường tròn $(O_1),(O_2)$ tiếp xúc trong với (O) và tiếp xúc dây AB. Gọi M và N là các giao điểm của (O_1) và (O_2). Chứng minh rằng đường thẳng MN đi qua trung điểm của cung AB không thuộc miền chứa M và N.

$*$ Lời giải:



- Kí hiệu P và Q lần lượt là các tiếp điểm của (O_1) với (O) và AB; Kí hiệu R và S lần lượt là các tiếp điểm của (O_2) với (O) và AB. Gọi T là trung điểm của cung AB không thuộc miền chứa M và N.
- Áp dụng bổ đề trên vào các đường tròn $(O),(O_1)$ và các điểm A,B với hai tiếp tuyến AQ,BQ đối với (O_1), ta được:

$$\frac{PA}{PB}=\frac{QA}{QB}$$

$\Rightarrow PQ$ là tia phân giác của $APB \Rightarrow PQ$ qua T. Tương tự RS cũng qua T.

- Mặt khác, $PQA = QTA + QAT = PRA + ART = PRS$

Do đó 4 điểm P,Q,R,S cùng thuộc một đường tròn, ta kí hiệu (O_3).

- Ta có PQ là trục đẳng phương của (O_1) và (O_3);

    RS là trục đẳng phương của (O_2) và (O_3);

    MN là trục đẳng phương của (O_1) và (O_2).

Như vậy MN, PQ và RS đồng quy tại tâm đẳng phương của 3 đường tròn $(O_1),(O_2),(O_3)$.

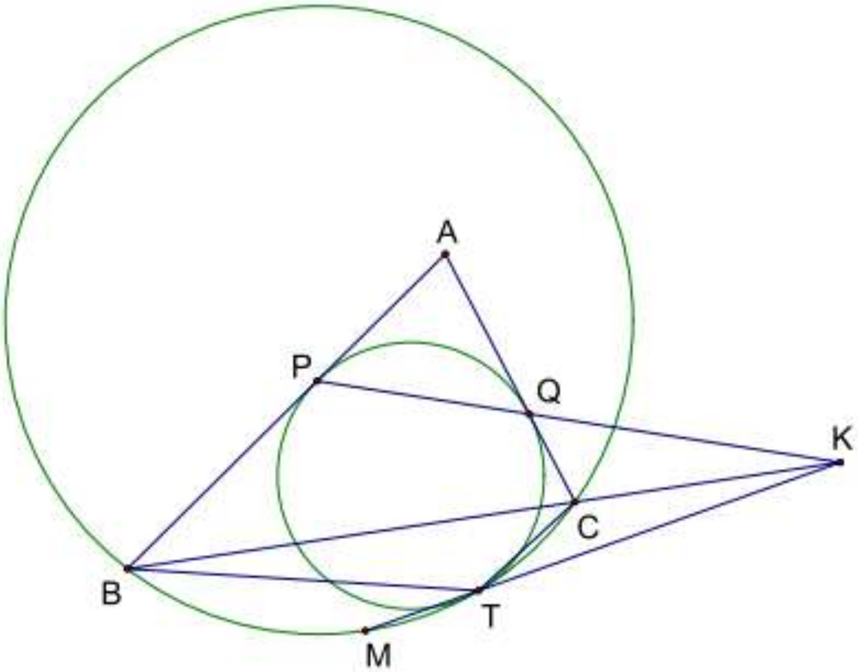
- Từ đó kết luận MN qua T, với T là trung điểm của cung AB không thuộc miền chứa M và N.

Bài toán 5:

Cho tam giác ABC. Đường tròn (ω) qua 2 đỉnh B và C. Đường tròn (ω_1) tiếp xúc trong với (ω) và tiếp xúc với hai cạnh AB và AC lần lượt tại T,P và Q. Gọi M

là trung điểm của cung BC (chứa điểm T) của (ω). Chứng minh rằng: PQ, BC và MT đồng quy.

$*$ Lời giải:



□Gọi $K = PQ \cap BC$ và gọi $K' = MT \cap BC$.

Áp dụng định lý Menelaus cho ΔABC với cát tuyến PQK ta được:

$$\frac{KB}{KC}.\frac{QC}{QA}.\frac{PA}{PB} = 1 \Rightarrow \frac{KB}{KC} = \frac{BP}{CQ}.$$

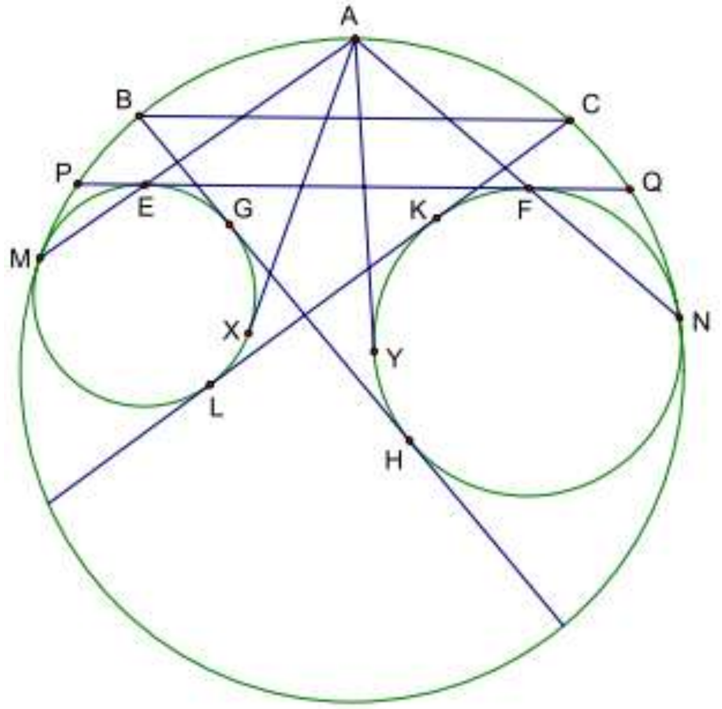
□Mặt khác, M là trung điểm của cung BC (chứa điểm T) của (ω) nên MT là phân giác ngoài của BTC, do đó: $\frac{K'B}{K'C} = \frac{TB}{TC}$

Vì vậy, ta cần chứng tỏ $\frac{BP}{CQ} = \frac{TB}{TC}$, điều này đúng theo bổ đề , suy ra $K \equiv K'$, có đpcm.

Bài toán 6:

Các đường tròn (O_1) và (O_2) tiếp xúc trong với đường tròn (O) lần lượt tại M và N. Các tiếp tuyến chung trong của (O_1) và (O_2) cắt đường tròn (O) tại bốn điểm. Gọi B và C là hai trong chúng, sao cho B và C nằm cùng phía đối với đường thẳng O_1O_2. Chứng minh rằng BC song song với tiếp tuyến chung ngoài của (O_1) và (O_2).

$*$ Lời giải:



- Vẽ các tiếp tuyến chung trong GH, KL của (O_1) và (O_2) sao cho G và L nằm trên (O_1), còn K và H nằm trên (O_2). Gọi EF là tiếp tuyến chung ngoài của (O_1) và (O_2) sao cho E và B nằm cùng phía đối với đường thẳng O_1O_2.

- Kí hiệu P và Q là các giao điểm của EF với đường tròn (O), ta sẽ chứng minh $BC//PQ$. Kí hiệu A là trung điểm của cung PQ không thuộc miền chứa M và N.Gọi AX và AY là hai tiếp tuyến tại X và Y của các đường tròn (O_1) và (O_2).

- Theo kết quả của bài toán 4 ta chứng minh được A, E và M thẳng hàng; A, F và N cũng thẳng hàng và tứ giác $MEFN$ nội tiếp đường tròn. Do đó:
$AX^2 = AE.AM = AF.AN = AY^2$ vì thế $AX = AY$ (1)

Theo bổ đề, ta có: $\dfrac{MA}{AX} = \dfrac{MB}{BG} = \dfrac{MC}{CL}$

$$\Rightarrow \frac{MA.BC}{AX.BC} = \frac{MB.AC}{BG.AC} = \frac{MC.AB}{CL.AB} = \frac{MB.AC + MC.AB}{BG.AC + CL.AB}$$

- Mặt khác, áp dụng định lý Ptolémé cho tứ giác $ABMC$:
$MA.BC = MB.AC + MC.AB$
Do đó: $AX.BC = BG.AC + CL.AB$
Tương tự: $AY.BC = BH.AC + CK.AB$
Kết hợp (1) $\Rightarrow AC.(BH - BG) = AB.(CL - CK)$
Hay: $AC.GH = AB.KL \Rightarrow AC = AB$

- Do đó A là trung điểm cung BC của đường tròn (O)
Vì vậy $BC//PQ$. Bài toán được chứng minh.