

Phần1: Một số bài toán hình học phẳng và tính chất của nó

CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN VÀ MỘT SỐ ĐỊNH LÝ QUEN THUỘC

Trong mục này, chúng ta quan tâm xét những bài cơ bản và những định lý đơn giản nhất của bộ môn hình học. Dựa vào chúng, chúng ta có thể dễ dàng giải một số bài toán khó; Bên cạnh đó chúng còn giúp chúng ta có thể tự suy ra một số tính chất áp dụng được cho nhiều bài toán.

1. (Định lý Menelaus). Trên ba cạnh (tính luôn phần kéo dài) BC, CA, AB của tam giác ABC ta lấy lần lượt các điểm M, N, P. Chứng minh rằng ba điểm

M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi: $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1(*)$.

BÀI GIẢI

° Chiều thuận: giả sử M, N, P thẳng hàng; Ta chứng minh (*).

Từ A kẻ đường thẳng song song với BC cắt MNP tại Q.

Theo định lý Talet, ta có:

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{QA}}{\overline{MB}} \quad (1)$$

$$\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{QA}} \quad (2)$$

Nhân từng vế đẳng thức (1) và (2) ta được:

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{MB}} \text{ hay } \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1(*) \text{ (đpcm)}$$

° Chiều nghịch: giả sử đã có (*). Ta đi chứng minh M, N, P thẳng hàng.

Thật vậy: giả sử đường thẳng NP cắt BC tại M', theo chiều thuận ta có:

$$\frac{\overline{M'B}}{\overline{M'C}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1(**)$$

$$\text{Từ (*) và (**)} \Rightarrow \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{M'B}}{\overline{M'C}} \Leftrightarrow \frac{\overline{MB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{M'B}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow MB = M'B$$

$$\Rightarrow M \equiv M'$$

Vậy M, N, P thẳng hàng.

2. (Định lý Ceva). Trên ba cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC ta lần lượt lấy các điểm M, N, P. Chứng minh rằng ba đường thẳng AM, BN, CP đồng quy khi và chỉ

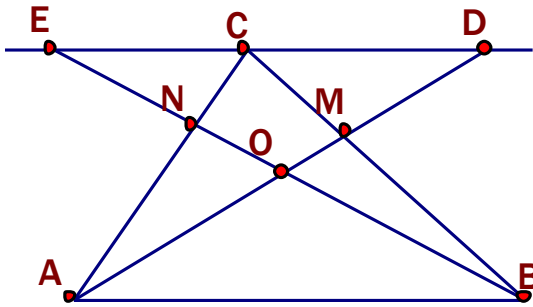
khi: $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -1$.

BÀI GIẢI

° Chiều thuận: giả sử AM, BN, CP đồng quy tại O.

Phần 1: Một số bài toán hình học phẳng và tính chất của nó

Theo định lý Talet, ta có:



$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{CD}} \quad (1)$$

$$\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{BA}} \quad (2)$$

Bên cạnh đó:

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OC}} = -\frac{\overline{PB}}{\overline{EC}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -\frac{\overline{CD}}{\overline{EC}} \quad (3)$$

Nhân từng vế đẳng thức (1), (2) và (3) ta được điều phải chứng minh.

°Chiều nghịch: giả sử $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -1 (*)$. Ta phải chứng minh AM, BN, CP đồng quy.

Thật vậy: AM giao BN tại O. Qua O kẻ OC cắt AB tại P'.

Theo chiều thuận ta có:

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{P'A}}{\overline{P'B}} = -1 \quad (**)$$

$$\text{Từ (*) và (**)} \Rightarrow \frac{\overline{P'A}}{\overline{P'B}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \Rightarrow P \equiv P'.$$

Vậy AM, BN, CP đồng quy tại O (đpcm).

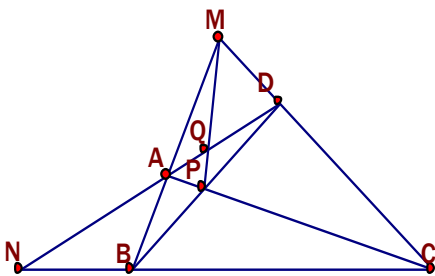
Ở trên là hai định lý quan trọng và được sử dụng nhiều trong hình học phẳng. Nhờ chúng ta có thể chứng minh được tập hợp điểm thuộc một đường thẳng (sự thẳng hàng), sự đồng quy của các đường thẳng, điểm cố định, các tỉ số bằng nhau và một số bài toán về tập hợp điểm...

Sau đây ta sẽ xét một số bài toán dạng trên.

3. Giả sử các cặp cạnh AB và CD, BC và AD, AC và BD của tứ giác ABCD lần lượt cắt nhau tại M, P, Q. Gọi Q là giao điểm của MP và AD.

Chứng minh rằng: $\frac{\overline{QA}}{\overline{QD}} = -\frac{\overline{NA}}{\overline{ND}}$.

BÀI GIẢI



Dùng định lý Menelaus ta có:

$$\frac{\overline{QA}}{\overline{QD}} \cdot \frac{\overline{PD}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{MB}}{\overline{MA}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{QA}}{\overline{QD}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PD}} \cdot \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \alpha$$

$$\text{Với } \square ADM \text{ ta có: } \frac{\overline{NA}}{\overline{ND}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{CM}} \cdot \frac{\overline{BM}}{\overline{BA}} = 1$$

$$\Rightarrow -\frac{\overline{NA}}{\overline{ND}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{BA}}{\overline{AM}} = \beta \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PD}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{CM}} \cdot \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = 1$$

(theo định lý Menelaus trong $\square BDM$)

$$\text{Vậy } \alpha = \beta \Rightarrow \frac{\overline{QA}}{\overline{QD}} = -\frac{\overline{NA}}{\overline{ND}} \text{ (đpcm).}$$

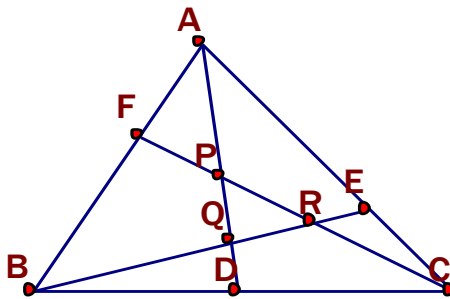
4. Trên các cạnh của tam giác ABC ta lấy các điểm A_1 , B_1 và C_1 sao cho $\frac{BA_1}{A_1C} = p$, $\frac{CB_1}{B_1A} = q$, $\frac{AC_1}{C_1B} = r$. Gọi giao điểm của AA_1 với CC_1 , BB_1 lần lượt là P và

Q. Gọi giao điểm của BB_1 và CC_1 là R. Hãy tính: $\frac{S_{\square PQR}}{S_{\square ABC}}$.

BÀI GIẢI

Xét tam giác ABE và cát tuyến CRF ta có:

$$\frac{CB_1}{CA} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} \cdot \frac{RB}{RB_1} = 1 \Rightarrow \frac{RB}{RB_1} = \frac{CA}{CB_1} \cdot \frac{C_1B}{C_1A} = \frac{r+1}{r} \cdot \frac{1}{q}$$



$$\Rightarrow \frac{RB}{BB_1} = \frac{(q+1).r+1}{q.r}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{S_{\square BRC}}{S_{\square ABC}} &= \frac{S_{\square BRC}}{S_{\square BB_1C}} \cdot \frac{S_{\square BB_1C}}{S_{\square ABC}} = \frac{BR}{BB_1} \cdot \frac{CB_1}{CA} \\ &= \frac{(q+1).r+1}{q.r} \cdot \frac{r}{r+1} = \frac{(q+1).r+1}{q.(r+1)} \end{aligned}$$

Tương tự, ta có:

$$\frac{S_{\square ABQ}}{S_{\square ABC}} = \frac{(r+1).q+1}{(p+1).r} \text{ và } \frac{S_{\square ACP}}{S_{\square ABC}} = \frac{(p+1).q+1}{(q+1).p}$$

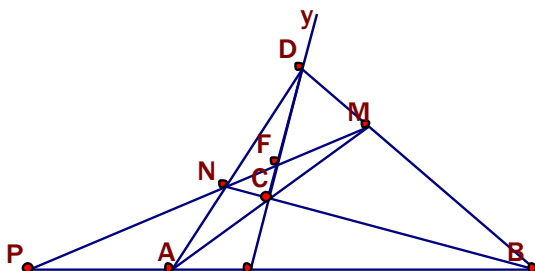
$$\begin{aligned} \text{Vậy } \frac{S_{\square PQR}}{S_{\square ABC}} &= 1 - \left(\frac{S_{\square BRC}}{S_{\square ABC}} + \frac{S_{\square ACP}}{S_{\square ABC}} + \frac{S_{\square ABQ}}{S_{\square ABC}} \right) = \\ &= 1 - \left[\frac{(p+1).q+1}{p.(q+1)} + \frac{(p+1).r+1}{q.(r+1)} + \frac{(r+1).p+1}{r.(p+1)} \right] \end{aligned}$$

5. Cho tia Ax và một điểm E khác A ($E \in Ax$). Từ E, vẽ tia Ey. Hai điểm C và D phân biệt, khác điểm E, cho trước trên tia Ey. Một điểm B chạy trên tia Ex. Các đường thẳng AC và BD cắt nhau ở M, AD và BC cắt nhau ở N.

a) Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn cắt tia Ey tại một điểm F cố định.

b) Hãy xác định một vị trí của điểm B trên tia Ex sao cho các tam giác MCD và NCD tương ứng có diện tích bằng nhau.

BÀI GIẢI



a) Dùng định lý Menelaus cho tam giác CDA ta có:

$$\frac{\overline{FC}}{\overline{FD}} \cdot \frac{\overline{ND}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{MA}}{\overline{MC}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{FC}}{\overline{FD}} = \frac{\overline{NA} \cdot \overline{MC}}{\overline{ND} \cdot \overline{MA}} = \alpha > 0$$

Với tam giác CDM ta có:

$$\frac{\overline{EC}}{\overline{ED}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{BM}} \cdot \frac{\overline{AM}}{\overline{AC}} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{EC}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{BM} \cdot \overline{AC}}{\overline{BD} \cdot \overline{AM}} = \beta > 0$$

$$\text{Nên } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\overline{NA} \cdot \overline{MC} \cdot \overline{BD}}{\overline{BM} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD}} = \frac{\overline{NA}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{BM}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{CA}} = 1 \text{ (theo định lý Menelaus trong tam giác ADM)}$$

$$\text{Do đó } \alpha = \beta \text{ hay } \frac{\overline{EC}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{FC}}{\overline{FD}} \Rightarrow F \text{ cố định (đpcm).}$$

b) Khi $AE = BE$ thì MN song song với AB . Thật vậy, nếu MN cắt AB ở P . Áp dụng định lý Xeva trong tam giác ABD với cát tuyến PNM ta có:

$$\frac{\overline{EA}}{\overline{EB}} \cdot \frac{\overline{MB}}{\overline{MD}} \cdot \frac{\overline{ND}}{\overline{NA}} = 1 = \frac{\overline{MB}}{\overline{MD}} \cdot \frac{\overline{ND}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$$

$$\frac{\overline{EA}}{\overline{EB}} = 1 \Rightarrow PA = PB \text{ mà } \frac{\overline{EA}}{\overline{EB}} = 1 \Rightarrow PA = PB \text{ (vô lý) } \emptyset$$

Vậy $MN \parallel AB \Rightarrow FM = FN \Rightarrow S_{\square MCD} = S_{\square NCD}$.

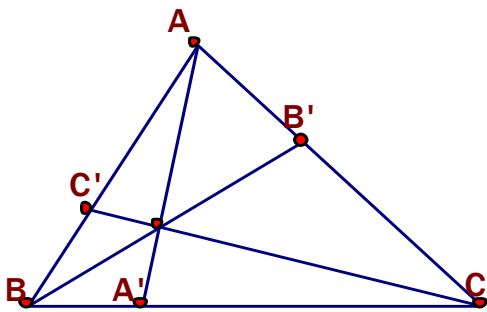
Vậy một vị trí thích hợp của B là $EB = EA$.

6. Giả sử ba đường thẳng AA' , BB' , CC' đồng quy tại điểm O trong tam giác ABC

($A' \in BC$, $B' \in CA$, $C' \in AB$). Chứng minh rằng: $\frac{OA}{OA'} = \frac{B'A}{B'C} + \frac{C'A}{C'B}$.

BÀI GIẢI

Áp dụng định lý Menelaus vào $\square ABA'$ ta có:



$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} \cdot \frac{\overline{CA'}}{\overline{CB}} \cdot \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} \cdot \frac{\overline{CA'}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} \quad (1)$$

Tương tự ta có:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} \cdot \frac{\overline{BA'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} \quad (2)$$

Cộng từng vế các đẳng thức (1) và (2), ta

co:ù

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} \cdot \frac{(\overline{CA'} + \overline{A'B})}{\overline{CB}} = \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} + \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} \quad \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} \cdot \frac{\overline{BA'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}}$$

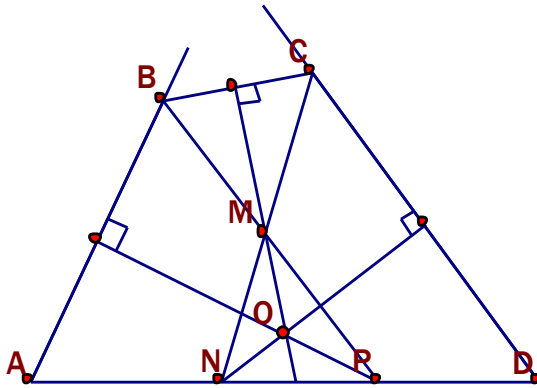
$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\overline{NA} \cdot \overline{MC} \cdot \overline{BD}}{\overline{BM} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD}} = \frac{\overline{NA}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{BM}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{CA}} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} + \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} \text{ (đpcm).}$$

Bây giờ, chúng ta tiếp tục xét về đường tròn, mối liên hệ giữa đường tròn và tam giác. Khi đã được học các kiến thức về đường tròn (góc nội tiếp; tam giác nội tiếp, ngoại tiếp; tứ giác nội tiếp, ngoại tiếp; ...) thì việc giải một lớp các bài toán trở nên dễ dàng. Còn nếu chưa học về chúng thì các bài toán như vậy có giải quyết được không? Chúng ta hãy kiểm chứng điều đó qua các bài toán sau.

7. Chứng minh rằng một tứ giác lồi có hai góc đối bù nhau khi và chỉ khi tồn tại một điểm cách đều bốn đỉnh của tứ giác. (Đó chính là một tứ giác nội tiếp).

BÀI GIẢI

a) Giả sử tứ giác ABCD có $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$



Không mất tính tổng quát giả sử $B \geq A$. Nếu $\angle B > \angle A$ thì $\angle C > \angle D$, ta lấy điểm M sao cho $\angle MAB = \angle A$, $\angle MCD = \angle D$, các tia BM và CM cắt AD lần lượt tại P và N, suy ra $\angle MBC = \angle MCB$ nên tam giác MBC cân tại M.

Từ các tam giác cân BMC, ABP, CDN suy ra các trung trực của tam giác AB, BC, CD chính là các đường phân giác của tam giác MNP nên chúng đồng quy tại O và rõ ràng $OA = OB = OC = OD$.

Trường hợp điểm M trùng với N và P thì có $MA = MB = MC = MD$. Nếu $\angle B = \angle A$ thì $\angle C = \angle D$, tứ giác ABCD là hình thang cân, kết luận hiển nhiên đúng.

b) Ngược lại, nếu tứ giác ABCD có điểm O thỏa mãn $OA = OB = OC = OD$. Giả sử O nằm trong tứ giác (các trường hợp còn lại chứng minh tương tự) i

Khi đó ta có:

$$\angle OBA = 90^\circ - \angle AOB/2$$

$$\angle OBC = 90^\circ - \angle BOC/2$$

$$\angle ODC = 90^\circ - \angle COD/2$$

$$\angle ODA = 90^\circ - \angle DOA/2$$

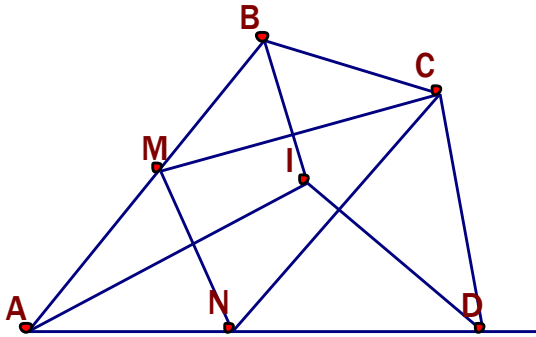
Nên:

$$\begin{aligned} \angle B + \angle D &= 360^\circ - \frac{\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOA}{2} \\ &= 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ = \angle A + \angle C. \end{aligned}$$

8. Chứng minh rằng một tứ giác lồi có tổng hai cạnh đối bằng nhau khi và chỉ khi tồn tại một điểm cách đều bốn cạnh của tứ giác. (đó chính là tứ giác ngoại tiếp).

BÀI GIẢI

a) Giả sử tứ giác ABCD có:



$$AB + CD = AD + BC$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $AB \geq BC$.

Nếu $AB > CD$ thì $AD > CD$, lấy điểm M trên AD sao cho $BM = BC$, N thuộc cạnh AD sao cho $DN = DC$, suy ra $AM = AN$. Từ các tam giác cân AMN, BMC, DCN suy ra phân giác các góc A, B, D là các trung trực của tam giác CMN nên chúng đồng quy tại I. Rõ ràng I cách đều bốn cạnh của tứ giác. Trường hợp $AB = BC$, $AD = CD$ thì I là giao điểm của BD

và phân giác góc A.

b) Ngược lại, nếu tứ giác ABCD có điểm I cách đều bốn cạnh của tứ giác thì dễ thấy I là giao điểm của bốn đường phân giác. Do đó việc chứng minh $AB + CD = AD + BC$ hoàn toàn đơn giản.

9. Cho tứ giác lồi ABCD. Chứng minh rằng tứ giác có hai góc đối bù nhau khi và chỉ khi $\angle ACB = \angle ADB$.

BÀI GIẢI

Trường hợp BC song song với AD dễ thấy hai điều kiện trên tương đương với tứ giác ABCD là hình thang cân, nên điều chứng minh càng hiển nhiên đúng.

Giả sử hai đường thẳng BC và CD cắt nhau tại O sao cho B nằm giữa O và C.

Ta có góc ABC bù với ADC $\Leftrightarrow OBA = ADC$

$\Leftrightarrow$ Tam giác: $OAB \sim OCD$ (g-g)

$\Leftrightarrow OA/OC = OB/OD \Leftrightarrow$ Tam giác OAC OBD $\Leftrightarrow$ Góc: $ACB = ADB$.

* Chú ý: từ $ACD = ABD$ ta dễ dàng suy ra được $\angle BAC = \angle BDC$, $\angle CBD = \angle CAD$, $\angle ABD = \angle ACD$.

10. (Định lý Ptolêmê) Chứng minh rằng nếu tứ giác ABCD có hai góc đối bù nhau thì: $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$.

BÀI GIẢI

Theo bài toán 9 ta có: $\angle BAC = \angle BDC$,
và $\angle BCA = \angle BDA$.

Trên AC lấy điểm K sao cho: $\angle ABK = \angle DBC$

$\Rightarrow \square ABK \sim \square DBC$ (g-g)

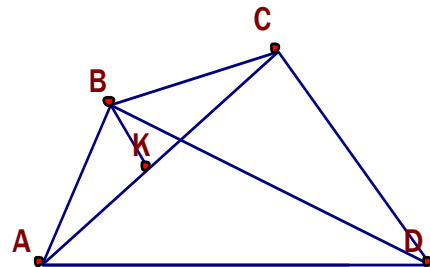
$$\Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{AK}{CD} \Rightarrow AB \cdot CD = AK \cdot BD \quad (1)$$

Tương tự ta cũng có:

$\square ABD \sim \square KBC$ (g-g)

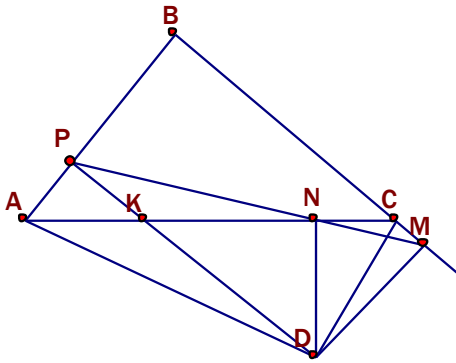
$$\Rightarrow AD \cdot BC = BD \cdot CK \quad (2).$$

Cộng (1) và (2) theo từng vế ta có được điều phải



chứng minh.

11. Cho tứ giác ABCD có hai góc đối bù nhau. Hạ DM, DN, DP theo thứ tự vuông góc với BC, CA, AB. Chứng minh rằng ba điểm M, N, P thẳng hàng (đường thẳng Simson).



BÀI GIẢI

Nếu $P \equiv A$ và $M \equiv C$ thì kết luận là hiển nhiên. Nếu P thuộc đoạn AB và các điểm được bố trí như hình vẽ (với các trường hợp khác chứng minh tương tự).

Ta nhận thấy A, N, M thẳng hàng và hai đoạn NP, NM nằm về hai phía khác nhau của đoạn AC. Vì vậy để chứng minh M, N, P thẳng hàng thì chỉ cần chứng minh hai góc ANP và CNM bằng nhau.

Xét tứ giác DNCM, có:

$$\angle DNC + \angle CMD = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

$\Rightarrow$ Tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \angle MNC = \angle CDM$ (theo kết quả bài 7 và 9)

Tương tự với tứ giác APND ta có $\angle ANP = \angle ADP$.

Bên cạnh đó: $\angle DCM = \angle DAP$ (cùng bù với góc DCB)

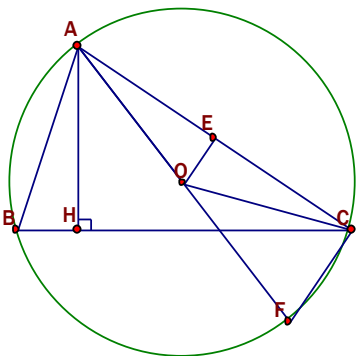
$$\angle DMC = \angle PDA = 90^\circ$$

$\Rightarrow$ Hai tam giác DMC và DPA bằng nhau (g-g)

$$\Rightarrow \angle ADB = \angle CDM \Rightarrow \angle MNC = \angle CDM = \angle ADP = \angle ANP \Rightarrow \angle ANP = \angle CNM$$

$\Rightarrow$ Điều phải chứng minh.

Ở phía trên là một số bài tập về đường tròn mà chúng ta có thể giải chúng chưa cần đến kiến thức về đường tròn. Trong đó chúng ta có nhắc đến hai công cụ được sử dụng nhiều trong hình học, đó là định lý Ptôlê và đường thẳng Simson. Ptôlê thì được sử dụng để chứng minh các bất đẳng thức hình học, còn Simson dùng để chứng minh sự thẳng hàng. Dựa vào chúng, ta có thể dễ dàng suy ra một số tính chất sau:



°Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Đường cao AH ($H \in BC$). Ta có $\angle BAH = \angle OAC$.

Bây giờ ta sẽ đi chứng minh nó mà chỉ sử dụng những tính chất về đường tròn mà chúng ta đã biết ở trên.

Chứng minh: Dựng đường kính AF và điểm E là trung điểm AC.

Xét tam giác AFC, ta có:

$$\angle OAC = \angle OCA \text{ và } \angle OCF = \angle OFC \text{ (vì } OA = OC = OF)$$

$$\text{Mà } \angle OAC + \angle OCA + \angle OCF + \angle OFC = \angle OAB + \angle ACF + \angle OFC = 180^\circ$$

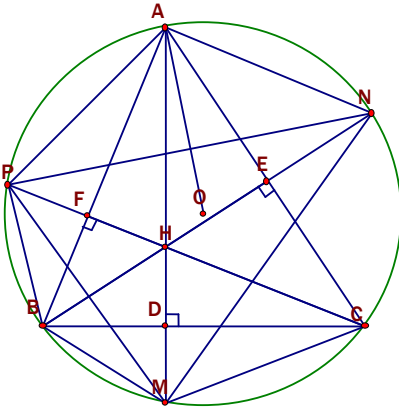
$$\text{Vậy } \angle ACF = \angle ACO + \angle OCF = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

$$\text{Mà } OE \parallel FC \Rightarrow \angle AOE = \angle ACF = 90^\circ \text{ (1) và } \angle AOE = \angle AFC \text{ (2) (đồng vị)}$$

$$\text{Bên cạnh đó } \angle ABC = \angle AFC \text{ (3)}$$

Phần 1: Một số bài toán hình học phẳng và tính chất của nó

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \square BAH = \square OAE \Rightarrow \angle BAH = \angle OAC$ (đpcm).



Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O.

Gọi H là trực tâm của tam giác và M, N, P lần lượt là giao của AH, BH, CH với đường tròn tâm O. Ta dễ dàng chứng minh được $HD = DM$ thông qua tam giác HCM cân tại C. Tương tự $HE = EN$, $HF = FP$. Từ đó ta có thể suy ra một số tính chất sau:

* H là giao điểm ba đường phân giác của tam giác MNP.

* $HA = PA = NA$, $HB = PB = MB$, $HC = NC = MC$.

* OA vuông góc với PN, tương tự với OB và PM, OC và MN...

Trong hình học sơ cấp còn có một hệ thức rất đẹp, đó là hệ thức Ole $d^2 = R^2 - 4Rr$ (trong đó d là khoảng cách từ tâm O đường tròn ngoại tiếp đến tâm I đường tròn nội tiếp tam giác ABC và R, r tương ứng là bán kính các đường tròn ấy). Tương tự, ta cũng có hệ thức $d'^2 = R^2 + 2Rr'$ (trong đó d' là khoảng cách từ O đến tâm I' đường tròn bàng tiếp góc A và r' là bán kính đường tròn này).

Để chứng minh hệ thức trên, ngoài việc sử dụng hệ thức lượng trong đường tròn (tính phương tích của I và I' với đường tròn (O)), ta còn dùng đến tính chất sau:

° Tính chất 1: đường tròn tâm O đi qua trung điểm đoạn $I_a I$.

Chứng minh: ta xét cả ba đường tròn bàng tiếp của tam giác ABC ta thấy ngay I chính là trực tâm của tam giác $I_a I_b I_c$, còn $I_a A$, $I_b B$, $I_c C$ là các đường cao của tam giác ấy. Vì vậy, đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC chính là đường tròn chín điểm Ole của tam giác $I_a I_b I_c$. Đường tròn này đi qua các trung điểm của $I_a I$, $I_b I$, $I_c I$ đồng thời đi qua trung điểm của $I_a I_b$, $I_b I_c$ và $I_c I_a$.

Gọi J là điểm đối xứng của I qua O, khi đó J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $I_a I_b I_c$. Mặt khác, vì I là trực tâm và $I_a A$, $I_b B$, $I_c C$ là các đường cao của tam giác $I_a I_b I_c$, nên để chứng minh:

$$\frac{IA}{I_a A} + \frac{IB}{I_b B} + \frac{IC}{I_c C} = 1 \Rightarrow \frac{r}{r_c} + \frac{r}{r_b} + \frac{r}{r_a} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}. \text{ Suy ra}$$

$$\text{° Tính chất 2: } \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

Sử dụng tính chất của các tứ giác nội tiếp $IBI_a C$, $ICI_b A$, $IAI_c B$ ta có:

$$\frac{r}{r_a} = \frac{IA}{I_a A} = \frac{IA}{I_b A} \cdot \frac{I_b A}{I_a A} = \tan \angle A I_b I \cdot \tan \angle C I_a I. \text{ Do đó ta có:}$$

° Tính chất 3: trong tam giác ABC, ta có: $\frac{r}{r_a} = \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2}$.

$$\text{Tương tự} \Rightarrow \frac{r}{r_b} = \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2}, \quad \frac{r}{r_c} = \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2}.$$

Thay vào tính chất 2 ta được hệ quả sau:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 1.$$

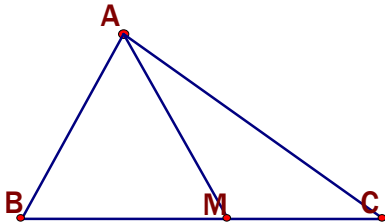
° Tính chất 4: **M là một điểm bất kì trên cạnh BC của tam giác ABC. Gọi r, r₁, r₂ là bán kính đường tròn nội tiếp và p, p₁, p₂ là bán kính đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC, ABM và ACM. Chứng minh hệ thức: $r/p = r_1/p_1 \cdot r_2/p_2$.**

Chứng minh:

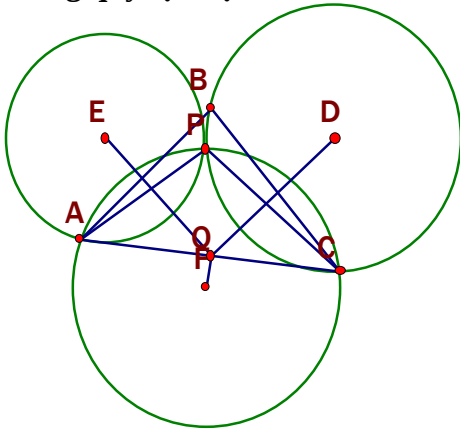
$$\text{vì } \angle AMB + \angle AMC = 180^\circ \Rightarrow \angle AMB/2 + \angle AMC/2 = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \angle AMB/2 = \cotg \angle AMC/2 \Rightarrow \operatorname{tg} \angle AMB/2 \cdot \operatorname{tg} \angle AMC/2 = 1$$

$$\text{Nên } r_1/p_1 \cdot r_2/p_2 = \operatorname{tg} B/2 \cdot \operatorname{tg} \angle AMB/2 \cdot \operatorname{tg} \angle AMC/2 \cdot \operatorname{tg} C/2 = \operatorname{tg} B/2 \cdot \operatorname{tg} C/2 = r/p.$$



12. (Định lí Macxoen). Bên trong tam giác ABC lấy một điểm P bất kì và nối nó với các đỉnh của tam giác. Chứng minh rằng, nếu dựng một tam giác với các cạnh song song với các đoạn thẳng đó và qua các đỉnh của nó dựng các đường thẳng song song với các cạnh của tam giác ABC thì các đường thẳng đó đồng quy tại một điểm.



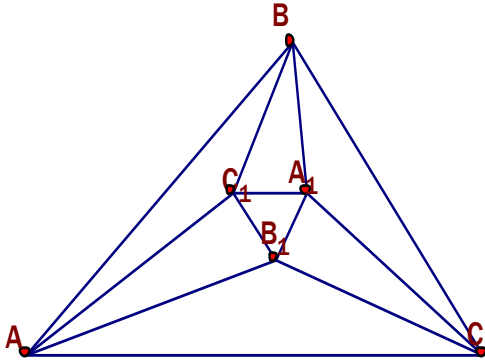
BÀI GIẢI

Rõ ràng thay cho tam giác có các cạnh song song với các đoạn thẳng AP, BP và CP, ta có thể xét một tam giác nào đó có các cạnh vuông góc với các đoạn thẳng đó, còn qua các đỉnh của nó kẻ qua các đỉnh của nó kẻ các đường thẳng không phải song song, mà vuông góc với các cạnh của tam giác ABC. Một tam giác như vậy có thể là tam giác DEF với các đỉnh là tâm của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABP, BCP và CAP. Khi đó các đường thẳng đi qua các đỉnh của tam giác DEF

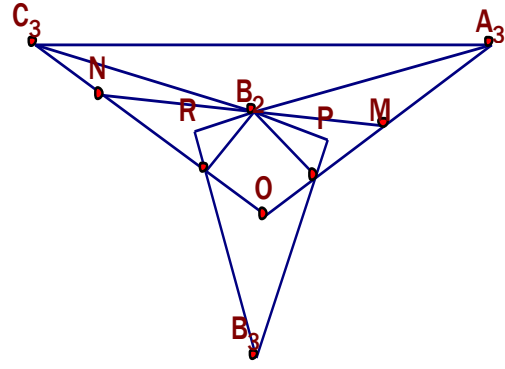
là đường trung trực của các cạnh tam giác ABC và vuông góc với chúng, do đó chúng đồng quy tại một điểm.

13. (Định lí Moocley) Bằng các tia xuất phát từ các đỉnh của tam giác ABC, mỗi góc của tam giác bị chia thành ba phần bằng nhau. Hai tia xuất phát từ các đỉnh B và C và gần với cạnh BC cắt nhau tại điểm A₁, tương tự như vậy ta xác định các đỉnh B₁ và C₁. Chứng minh rằng tam giác A₁B₁C₁ là tam giác đều.(h.1)

BÀI GIẢI



hình 1



hình 2

Giả sử trong tam giác ban đầu có các $\angle A = 3\alpha$, $\angle B = 3\beta$, $\angle C = 3\gamma$. Ta lấy một tam giác đều $A_2B_2C_2$. Dựng trên các cạnh của nó về phía ngoài như trên các đáy tam giác cân A_2B_2R , B_2C_2P và C_2A_2Q với các đáy tương ứng bằng $60^\circ - \gamma$, $60^\circ - \alpha$, $60^\circ - \beta$. Kéo dài các cạnh bên của tam giác đó về phía A_2 , B_2 , C_2 và kí hiệu các giao điểm của đường thẳng RB_2 và RA_2 , QA_2 và PB_2 tương ứng là A_3 , B_3 , C_3 . Kẻ qua B_2 đường thẳng song song với A_2B_2 cắt các đường thẳng QA_3 và QC_3 tương ứng tại M và N (h.2). B_2Q là đường cao của tam giác cân QMN , nên B_2 là trung điểm của đoạn MN . Tính các góc của tam giác B_2C_3N và B_2A_3M : $\angle C_3B_2N = \angle PB_2M = \angle C_2B_2M - \angle C_2B_2P = \alpha$; $\angle B_2NC_3 = 180^\circ - \angle C_2A_2Q = 120^\circ + \beta$, tức là $\angle A_3B_2M = 180^\circ - \alpha - (120^\circ + \beta) = \gamma$. Tương tự $\angle A_3B_2M = \gamma$, $\angle B_2A_3M = \alpha$. Suy ra: $\square B_2C_3N = \square A_3B_2M$. Từ đó $\frac{C_3B_2}{B_2A_3} = \frac{C_3N}{B_2M}$; vì $B_2M = B_2N$ và tam giác $C_3B_2A_3$ bằng tam giác C_3NB_2 , nên $\frac{C_3B_2}{B_2A_3} = \frac{C_3N}{B_2N}$, tức là: $\square C_3B_2A_3 = \square C_3NB_2$, suy ra $\angle B_2A_3A_3 = \gamma$. Tương tự γ , tức là $\angle A_2C_3B_3 = \gamma$, tức là $\angle A_3B_3C_3 = 3\gamma = \angle C$ và C_3B_2 , C_3A_2 là các đường chia góc C_3 của tam giác $A_3B_3C_3$ thành ba phần bằng nhau. Lập luận tương tự cho các đỉnh A_3 và B_3 ta được tam giác ABC đồng dạng với tam giác $A_3B_3C_3$, từ đó suy ra điều phải chứng minh.

TẬP HỢP ĐIỂM TRONG MẶT PHẪNG