

CHƯƠNG 3: QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

Bài 1: MỞ ĐẦU

1. Bài toán tối ưu.

Tối ưu hóa là một lĩnh vực toán học nghiên cứu lý thuyết và các thuật toán giải bài toán cực trị .

Nhiều vấn đề thực tế khác nhau dẫn đến việc giải bài toán cực trị sau :

$$f(x) \rightarrow \min \quad (1)$$

Với các điều kiện

$$\begin{cases} g_i(x) \leq 0, & i = 1, 2, \dots, m_1 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} h_j(x) = 0, & j = 1, 2, \dots, m_2 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x \in X \subset \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (4)$$

Trong đó $f, g_i, h_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, m_1; j = 1, 2, \dots, m_2$)

Bài toán (1) ... (4) được gọi là bài toán quy hoạch toán học . Hàm $f(x)$ được gọi là hàm mục tiêu , còn các hàm g_i, h_j gọi là các hàm ràng buộc . Tập hợp các véc tơ $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ thoả mãn các ràng buộc (2), (3) gọi là tập phương án hay miền chấp nhận được của bài toán trên . Phương án x^* thoả mãn $f(x^*) \leq f(x)$ với phương án x gọi là phương án tối ưu hay lời giải của bài toán $f(x^*)$ gọi là phương án tối ưu .

Nếu hàm mục tiêu $f(x)$ và các hàm ràng buộc g_i, h_j đều là các hàm tuyến tính và $X \subset \mathbb{R}_n^+$, ta có bài toán quy hoạch tuyến tính , ngược lại ta có bài toán quy hoạch phi tuyến tính .

Chuyên đề của chúng ta chỉ xét bài toán quy hoạch tuyến tính

2. Bài toán vận tải

Giả sử có m kho kí hiệu là $A_1, A_2, \dots, A_m$ (các điểm phát) cung cấp cùng một loại mặt hàng nào đó với khối lượng tương ứng $a_1, a_2, \dots, a_m$ và n cửa hàng tiêu thụ (các điểm thu) ký hiệu là $B_1, B_2, \dots, B_n$ với khối lượng nhu cầu tương ứng $b_1, b_2, \dots, b_n$. Để thoả mãn nhu cầu của các điểm thu thì tổng số lượng hàng ở các

điểm phát ít nhất phải bằng tổng yêu cầu ở các điểm thu: $\sum_{i=1}^m a_i \geq \sum_{j=1}^n b_j$

Biết rằng cước phí vận chuyển một đơn vị hàng (chiếc, tấn ...) từ điểm phát A_i đến điểm thu B_j là c_{ij} đơn vị tiền. Ma trận $C = (c_{ij})_{m \times n}$ gọi là ma trận cước phí.

Hãy lập phương án vận chuyển sao cho các điểm thu đều nhận đủ hàng và cước phí vận chuyển là ít nhất.

Lập bài toán: Gọi x_{ij} là số đơn vị hàng chuyển từ A_i đến B_j . Tất nhiên $x_{ij} \geq 0$ ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$).

Tổng lượng hàng chuyển từ A_i đến mọi B_j là $\sum_{j=1}^n x_{ij}$ ($i = \overline{1, m}$)

Tổng lượng hàng điểm B_j nhận được từ mọi A_i là $\sum_{i=1}^m x_{ij}$ ($j = \overline{1, n}$)

Tổng cước phí phải trả là $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$. Bài toán đặt ra là:

Tìm véc tơ $x = (x_{ij})$ ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$) sao cho:

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

và thoả mãn các điều kiện

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i & (i = \overline{1, m}) \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j & (j = \overline{1, n}) \\ x_{ij} \geq 0 & (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}) \end{cases}$$

3. Bài toán quy hoạch tuyến tính

a, Dạng tổng quát :

Tìm véc tơ $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$ sao cho :

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min \text{ (max)}$$

Với các điều kiện :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \quad (j = \overline{1, m}) \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \\ \text{với các ràng buộc về dấu:} \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n_1}) \\ x_j \leq 0 \quad (j = \overline{n_1 + 1, n_2}) \\ x_j \text{ dấu tự do} \quad (j = \overline{n_2 + 1, n}) \end{array} \right.$$

Để thấy rằng :

$$1) f(x^*) = \min \{ f(x), x \in D \} \Leftrightarrow -f(x^*) = \max \{ -f(x), x \in D \}$$

$$2) \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_j \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n (-a_{ij})x_j \leq b_j$$

$$3) \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_j \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_j \end{cases}$$

$$4) \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_j \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_j; \quad x_{n+i} \geq 0$$

$$5) \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_j \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_j; \quad x_{n+i} \geq 0$$

Các biến $x_{n+i} \geq 0$ gọi là các biến bù .

Từ các nhận xét trên ta thấy bất kỳ bài toán quy hoạch tuyến tính nào cũng có thể đưa về một trong hai dạng sau đây:

b. Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j & \rightarrow \min \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i & (i = \overline{1, m}) \\ x_j \geq 0 & (j = \overline{1, n}) \end{cases}$$

hay dưới dạng ma trận:

$$\begin{cases} f(x) = c^t x & \rightarrow \min \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Trong đó: $c, x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, A là ma trận cấp $m \times n$.

c. Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn tắc.

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j & \rightarrow \min \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i & (i = \overline{1, m}) \\ x_j \geq 0 & (j = \overline{1, n}) \end{cases}$$

hay dưới dạng ma trận:

$$\begin{cases} f(x) = c^t x & \rightarrow \min \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Ví dụ: Có bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 \rightarrow \max \\ \begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 6 \\ -2x_2 + 9x_3 + 3x_4 \geq 4 \\ 5x_1 + x_2 - 7x_3 \leq 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Hãy viết bài toán trên dưới dạng chính tắc và chuẩn tắc.

- Dạng chính tắc:

$$f(x) = -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 6 \\ -2x_2 + 9x_3 + 3x_4 - x_5 = 4 \\ 5x_1 + x_2 - 7x_3 + x_6 = 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

- Dạng chuẩn tắc:

$$f(x) = -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 6 \\ -x_1 - x_2 + x_4 \geq -6 \\ -2x_2 + 9x_3 + 3x_4 \geq 4 \\ -5x_1 - x_2 + 7x_3 \geq -2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

4. Điều kiện cần và đủ để một phương án là cực biên

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc (I)

$$f(x) = c^T x \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Ký hiệu $a^1, a^2, \dots, a^n$ là các cột của:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Không mất tính tổng quát, luôn có thể giả thiết :

$$R(A) = R(a^1, a^2, \dots, a^n) = m$$

Vì nếu có phương trình nào trong hệ $Ax = b$ biểu diễn được dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các phương trình khác thì có thể bỏ nó đi.

Định lý: Điều kiện cần và đủ để $x \in D$ là một phương án cực biên là hệ các véc tơ cột ứng với các thành phần dương của x độc lập tuyến tính.

Tức là: Ký hiệu $J^+(x) = \{j : x_j > 0\}$ thì

$x \in D$ là cực biên $\Leftrightarrow \{a^j, j \in J^+(x)\}$ độc lập tuyến tính.

Chứng minh: Điều kiện cần $x \in D$ là điểm cực biên. Cần chứng minh hệ véc tơ $\{a^j, j \in J^+(x)\}$ độc lập tuyến tính.

Để đơn giản, giả sử $J^+(x) = \{1, 2, \dots, k\}$

Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử hệ $\{a^1, a^2, \dots, a^k\}$ phụ thuộc tuyến tính, suy ra tồn tại các số $z_1, z_2, \dots, z_k$ không đồng thời bằng 0 để $\sum_{aj=1}^k z_j a^j = 0$. Đặt

$z = (z_1, z_2, \dots, z_k, 0, \dots, 0)^t$ thì $Az = 0$.

Lập các véc tơ:

$$x' = x + \lambda z; x'' = x - \lambda z \Rightarrow Ax' = Ax'' = Ax = b \text{ (vì } Az = 0)$$

Lấy $\lambda > 0$ đủ bé sao cho $x' \geq 0$ thì $x', x'' \in D$ mà từ $x' = x + \lambda z; x'' = x - \lambda z \Rightarrow x = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}x''$ suy ra trái với giả thiết x là phương án cực biên.

Điều kiện đủ: Giả sử hệ véc tơ $\{a^j, j \in J^+(x)\}$ độc lập tuyến tính. Cần chứng minh rằng x là một phương án cực biên.

Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử x không phải là phương án cực biên, suy ra $\exists x', x'' \in D, x' \neq x''$ sao cho $x = \frac{x' + x''}{2}$. Ta có $(n-k)$ thành phần của chúng đều không âm, không xảy ra tình huống $n - k$ thành phần cuối của x', x'' đối nhau.

$$\text{Vậy } \sum_{aj=1}^k x_j a^j = \sum_{aj=1}^k x'_j a^j = \sum_{aj=1}^k x''_j a^j$$

Vì $Ax' = Ax'' = Ax = b$

Nhưng hệ $\{a^j, j \in J^+(x)\}$ độc lập tuyến tính nên suy ra:

$$x_j = x'_j = x''_j \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

$$x_j = x'_j = x''_j = 0 \quad (j = k+1, \dots, n)$$

hay $x = x' = x''$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $x' \neq x''$.

-----o0o-----

Bài 2: PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH

I. TƯ TƯỞNG CỦA PHƯƠNG ÁN ĐƠN HÌNH

1. Biểu diễn qua cơ sở. Dấu hiệu tối ưu.

Giả sử có phương án cực biên x^0 với cơ sở J (tức là hệ vectơ cột độc lập tuyến tính $\{a^j, j \in J\}$; $J \supset J^+(x) = \{j, x_j > 0\}$). Ta có:

$$Ax^0 = b \text{ hay } b = \sum_{j=1}^n x_j^0 a^j = \sum_{j \in J} x_j^0 a^j \quad (1)$$

(vì $x_j^0 = 0; \forall j \notin J$). Với mỗi $k \notin J$, ta biểu diễn vectơ a^k qua các vectơ cơ sở $\{a^j, j \in J\}$.

$$a^k = \sum_{j \in J} z_{jk} a^j \quad (\forall k \notin J)$$

Giả sử $x \in D$ là một phương án bất kỳ. Ta có.

$$b = \sum_{j=1}^k x_j a^j = \sum_{j \in J} x_j a^j + \sum_{k \notin J} x_k a^k = \sum_{j \in J} x_j a^j + \sum_{k \notin J} x_k \sum_{j \in J} z_{jk} a^j \quad (2)$$

Vì $\{a^j, j \in J\}$ là độc lập tuyến tính nên từ (1) và (2) ta có:

$$x_j^0 = x_j + \sum_{k \notin J} z_{jk} x_k \quad (\forall j \in J)$$

hay

$$x_j = x_j^0 - \sum_{k \notin J} z_{jk} x_k \quad (\forall j \in J) \quad (3)$$

Ta gọi (3) là khai triển của một phương án bất kỳ qua cơ sở J . Lại có :

$$f(x) = c^t x = \sum_{j=1}^n c_j x_j = \sum_{j \in J} c_j x_j + \sum_{k \notin J} c_k x_k$$

Thay (3) vào ta được:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j \in J} \left(x_j^0 - \sum_{k \notin J} z_{jk} x_k \right) c_j + \sum_{k \notin J} c_k x_k \\ &= \sum_{j \in J} c_j x_j^0 - \sum_{k \notin J} \left(\sum_{j \in J} z_{jk} c_j - c_k \right) x_k \end{aligned}$$

Ký hiệu:

$$\Delta_k = \sum_{j \in J} z_{jk} c_j - c_k \quad (k \notin J)$$

Gọi là ước lượng của véc tơ cột a_k theo cơ sở J và:

$$f(x) = f(x^0) - \sum_{j \in J} \Delta_k x_k$$

Nhận xét: do $x \geq 0$ nên nếu $\forall k \notin J, \Delta_k < 0$ thì $f(x) \geq f(x^0), \forall x \in D$ do đó ta có dấu hiệu tối ưu sau đây:

Phương án cực biên x^0 với cơ sở J là phương án tối ưu thì $\Delta_k \leq 0, \forall k \notin J$.

2. Tìm phương án cực biên mới tốt hơn - Công thức đổi cơ sở.

Giả sử x^0 với cơ sở J là một phương án cực biên nhưng chưa phải là phương án tối ưu, khi đó $\exists k \notin J$ sao cho $\Delta_k > 0$. Giả sử s là một chỉ số trong các chỉ số nói trên: $s \notin J, \Delta_s > 0$.

Theo thuật toán đơn hình ta cần cải tiến x^0 để nhận được một phương án cực biên mới x^1 tốt hơn. Nhằm mục đích kế thừa tận dụng những kết quả ở bước trước ta sẽ tìm phương án cực biên mới x^1 với cơ sở J^1 chỉ khác J một véc tơ: $J^1 = (J \setminus r) \cup s$, nghĩa là ta sẽ đưa véc tơ a^s vào cơ sở thay thế cho véc tơ a^r khác bị loại khỏi cơ sở J . Các véc tơ a^r và a^s được lựa chọn sao cho x^1 tốt hơn x^0 .

Tóm lại:

$$x_j^1 = \begin{cases} 0 & \text{Nếu } j \notin J, j \neq s \\ \theta & \text{Nếu } j = s \\ x_j^0 - \theta z_{js} & \text{Nếu } j \in J \end{cases} \quad (*)$$

Nếu $\exists k \notin J, \Delta_k > 0$ mà $z_{js} \leq 0 \forall j \in J$ thì $f(x) \rightarrow -\infty$

Nếu $\exists j \in J$ để $z_{js} > 0$, khi đó số θ không thể lớn tùy ý, nó phải thỏa mãn

$$x_j^0 - \theta z_{js} \geq 0 \quad \forall j \in J \text{ mà } z_{js} > 0.$$

Giả sử cực tiểu trên đạt tại $j = r$. Lấy $\theta = \frac{x_r^0}{z_{rs}}$, thay vào (*) ta được:

$$x_j^1 = \begin{cases} 0 & \text{Nếu } j \notin J, j \neq s \\ \frac{x_r^0}{z_{rs}} & \text{Nếu } j = s \\ x_j^0 - \frac{x_r^0}{z_{rs}} & \text{Nếu } j \in J \end{cases} \quad (**)$$

$$f(x^1) = f(x^0) - \Delta_s \cdot \frac{x_r^0}{z_{rs}} \quad (***)$$

Phương án x^1 nhận được ở (**) thực sự tốt hơn x^0 nếu $\frac{x_r^0}{z_{rs}} > 0$. Điều này thấy rõ từ (***).

Định lý: Phương án x^1 được xác định theo công thức (**) là phương án cực biên với cơ sở $J^1 = (J \setminus r) \cup s$.

Chứng minh: Theo (**) suy ra $x_r^1 = 0$ nên $J^+(x^1) \subseteq J^1$. Ta cần chứng minh hệ véc tơ $\{a^j, j \in J^1\}$ độc lập tuyến tính. Thật vậy, giả sử $\sum_{j \in J^1} \alpha_j x^j = 0$ ta cần chứng minh $\alpha_j = 0 \forall j \in J^1$. Ta có:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j \in J^1} \alpha_j x^j = \sum_{j \in J, j \neq r} \alpha_j a^j + \alpha_s a^s = \sum_{j \in J, j \neq r} \alpha_j a^j + \alpha_s \sum_{j \in J} z_{js} a^j \\ &= \sum_{j \in J, j \neq r} (\alpha_j - \alpha_s z_{js}) a^j + \alpha_s z_{rs} a^r \end{aligned}$$

Vì hệ véc tơ $\{a^j, j \in J\}$ là độc lập tuyến tính, nên suy ra:

$$\begin{cases} \alpha_j - \alpha_s z_{js} = 0 & \forall j \in J, j \neq r \\ \alpha_s z_{rs} = 0 \end{cases}$$

Vì $z_{rs} > 0$ nên suy ra $\alpha_s = 0$, do đó $\alpha_j = 0$ ($j \in J, j \neq r$). Vậy $\alpha_j = 0$

$\forall j \in J^1 = \{J \setminus r\} \cup \{s\}$.

Vì $J^+(x^1) \subset J^1$ nên hệ véc tơ $\{a^j, j \in J^+(x^1)\}$ độc lập tuyến tính, do đó x^1 là phương án cực biên và J^1 là cơ sở của phương án cực biên x^1 .

Định lý được chứng minh.

Các công thức (**) và (***) cho ta cách tìm các thành phần của phương án cực biên mới x^1 cùng với giá trị hàm mục tiêu $f(x^1)$ thông qua các hệ số khai triển z_{jk} và các ước lượng Δ_k trong cơ sở J . Để có thể tiến hành các bước tiếp theo ta cần xác định các đại lượng tương ứng z_{jk}^1 và Δ_k^1 trong cơ sở mới J^1 . Theo định nghĩa z_{jk} và z_{jk}^1 là các hệ số khai triển của vectơ a^k tương ứng với cơ sở J, J^1 .

$$a^k = \sum_{j \in J} z_{jk} a^j = \sum_{j \in J^1} z_{jk}^1 a^j \quad (J^1 = \{J \setminus r\} \cup \{s\}) \quad (1)$$

$$\sum_{j \in J} z_{jk} a^j = \sum_{j \in J^1, j \neq r} z_{jk} a^j + z_{jk} a^r \quad (2)$$

$$\text{Từ } a^s = \sum_{j \in J} z_{js} a^j = \sum_{j \in J^1, j \neq r} z_{js} a^j + z_{rs} a^r \text{ vì } z_{rs} > 0$$

$$\text{Ta có } a^r = \frac{1}{z_{rs}} \left(a^s - \sum_{j \in J, j \neq r} z_{js} a^j \right) \text{ thay vào (2) ta được :}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} z_{jk} a^j &= \sum_{j \in J, j \neq r} z_{jk} a^j + \frac{z_{rk}}{z_{rs}} \left(a^s - \sum_{j \in J, j \neq r} z_{js} a^j \right) \\ &= \sum_{j \in J, j \neq r} \left(z_{jk} - \frac{z_{rk}}{z_{rs}} z_{js} \right) a^j + \frac{z_{rk}}{z_{rs}} a^s \end{aligned}$$

Vì $\{a^j, j \in J^1\}$ độc lập tuyến tính nên từ (1) và (2) suy ra:

$$z_{jk}^1 = \begin{cases} \frac{z_{rk}}{z_{rs}} & \text{nếu } j=s \\ z_{jk} - \frac{z_{rk}}{z_{rs}} z_{js} & \text{nếu } j \in J, j \neq r \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Delta_k^1 &= \sum_{j \in J^1} z_{jk}^1 c_j - c_k = \sum_{j \in J, j \neq r} \left(z_{jk} - \frac{z_{rk}}{z_{rs}} z_{js} \right) c_j + \frac{z_{rk}}{z_{rs}} c_s - c_k \\ &= \sum_{j \in J^1} \left(z_{jk} - \frac{z_{rk}}{z_{rs}} z_{js} \right) c_j + \frac{z_{rk}}{z_{rs}} c_s - c_k \end{aligned}$$

$$\left(\text{Vì với } j=r \text{ thì } \left(z_{jk} - \frac{z_{rk}}{z_{rs}} z_{js} \right) = 0 \right)$$

$$\left(\sum_{j \in J^1} z_{jk}^1 c_j - c_k \right) - \frac{z_{rk}}{z_{rs}} \sum_{j \in J} (z_{js} c_j - c_s) = \Delta_k - \frac{z_{rk}}{z_{rs}} \Delta_s$$

Vậy
$$\Delta_k^1 = \Delta_k - \frac{z_{rk}}{z_{rs}} \Delta_s$$

II. THỦ TỤC ĐƠN HÌNH - BẢNG ĐƠN HÌNH.

1. Các bước của thủ tục đơn hình.

+ Bước xuất phát: Tìm một phương án cực biên x^0 và cơ sở J tương ứng. Tính các hệ số khai triển z_{jk} và các ước lượng Δ_k .

+ Bước 1: Kiểm tra dấu hiệu tối ưu:

a. Nếu $\Delta_k \leq 0 \forall k \notin J$ thì x^0 là phương án tối ưu. Thuật toán kết thúc.

b. Nếu $\exists \Delta_k > 0$ thì chuyển sang bước hai.

Phương án cực biên mới tốt hơn với cơ sở $J^1 = (J \setminus r) \cup s$ theo quy tắc sau:

+ Bước 3: + Bước 2: Kiểm tra dấu hiệu hàm mục tiêu giảm vô hạn: Với mỗi $k \notin J$ mà $\Delta_k > 0$ thì kiểm tra các hệ số khai triển z_{jk} của cột a^k tương ứng.

a. Nếu có một $\Delta_k > 0$ mà tất cả $z_{jk} \leq 0 \forall j \in J$ thì kết luận hàm mục tiêu giảm vô hạn trên miền ràng buộc. Bài toán không có lời giải hữu hạn. Thuật toán kết thúc.

b. Trái lại nếu với mọi $k \notin J$ mà $\Delta_k > 0$ đều tồn tại ít nhất một hệ số $z_{jk} > 0$ thì tiến hành tìm phương

Chọn a^s đưa vào cơ sở: có thể chọn bất kỳ $s \notin J$ mà ước lượng $\Delta_s > 0$. Thông thường chọn $s \notin J$ theo quy tắc:

$$\Delta_s = \max \{ \Delta_k > 0, k \notin J \}$$

(vì khi đó hàm số giảm nhanh nhất)

Chọn véc tơ a^r đưa ra khỏi cơ sở theo quy tắc:

$$\theta = \frac{x_r^0}{x_{rs}} = \min \left\{ \frac{x_j^0}{z_{js}}, z_{js} > 0 \right\}$$

+ Bước 4: Tính các $x_j^1, f(x^1), \Delta_k^1, z_{jk}^1$ trong cơ sở mới $J^1 = (J \setminus r) \cup s$ các công thức trên. Quay trở lại bước 1.

2. Bảng đơn hình

Để thuận tiện cho việc tính toán theo thủ tục đơn hình người ta sắp xếp các số liệu thành 1 bảng đơn hình như dưới đây:

Cơ sở J	c_j	Phương án x_j	1 c_1	2 c_2	...	k c_k	...	n c_n
J_1	c_{j1}	x_{j1}	$z_{j1}1$	$z_{j1}2$	...	$z_{j1}k$	...	$z_{j1}n$
J_2	c_{j2}	x_{j2}	$z_{j2}1$	$z_{j2}2$	...	$z_{j2}k$	...	$z_{j2}n$
...	...	...	...	...	...	...	...	...
J_m	c_{jm}	x_{jm}	$z_{jm}1$	$z_{jm}2$	...	$z_{jm}k$	...	$z_{jm}n$
		$f(x)$	Δ_1	Δ_2	...	Δ_k	...	Δ_n

3. Thủ tục đơn hình trên bảng.

+ Bước 1: Kiểm tra điều kiện tối ưu: $\Delta_k < 0 \forall k$

- Nếu $\Delta_k \leq 0 \forall k \Rightarrow$ phương án x^0 đang xét là phương án tối ưu.

- Nếu $\exists \Delta_k > 0$ thì chuyển sang bước 2.

+ Bước 2: (Kiểm tra dấu hiệu hàm mục tiêu giảm vô hạn: có $\Delta_k > 0$ và cột tương ứng gồm toàn các phần tử không dương $z_{jk} \leq 0 \forall j \in J$)

- Nếu có $\Delta_k > 0$ và $z_{jk} \leq 0 \forall j \in J$ thì bài toán không có phương án tối ưu (hữu hạn) vì hàm mục tiêu giảm vô hạn trên miền ràng buộc.

- Nếu $\forall \Delta_k > 0, \exists j \in J$ để $z_{jk} > 0$ thì chuyển sang bước 3.

+ Bước 3: (Xác định cột xoay, dòng xoay, phần tử trục)

- Chọn chỉ số s: $\Delta_s = \max \{ \Delta_k, \Delta_k > 0 \}$, đánh dấu cột s là cột xoay.

- Tìm chỉ số r đạt min.

$$\theta = \frac{x_r^0}{z_{rs}} = \min \left\{ \frac{x_j^0}{z_{js}}, z_{js} > 0 \right\}$$

Ví dụ 1:

$$f(x) = x_1 - x_2 - 2x_4 + 2x_5 - 3x_6 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + x_5 - x_6 = 2 \\ x_2 + x_4 + x_6 = 12 \\ x_3 + 2x_4 + 4x_5 + 3x_6 = 9 \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,6}) \end{cases}$$

Chọn cơ sở xuất phát $J = \{1, 2, 3\}$. A_j là ma trận đơn vị, do đó ta có ngay bảng đơn hình xuất phát sau:

J	c_j	x_j	1	2	3	4	5	6
			1	-1	0	-2	2	-3
1	1	2	1	0	0	⁰ 1	1	-1
2	-1	12	0	1	0	1	0	1
3	0	9	0	0	1	2	4	3
		-10	0	0	0	2	-1	1

Các bước của thủ tục đơn hình:

+ Có $\Delta_4 > 0$, $\Delta_6 > 0$. Dấu hiệu tối ưu chưa thỏa mãn, chuyển sang bước 2.

Trên các cột 4 và cột 6 (có $\Delta_k > 0$) không phải tất cả $z_{jk} \leq 0$ ($\forall j \in J$) trường hợp 2a) không xảy ra.

+ Tiến hành đổi cơ sở:

Chọn chỉ số s: $\Delta_4 = \max \{ \Delta_4 = 2; \Delta_6 = 1 \}$. Chọn cột 4 làm cột xoay (đưa a^4 vào cơ sở).

Chọn chỉ số r: $\theta = \min \left\{ \frac{2}{1}, \frac{12}{1}, \frac{9}{1} \right\} = \frac{2}{1} = \frac{x_1}{z_{14}} \Rightarrow r = 1$ chọn hàng 1 làm hàng

xoay (đưa a^1 ra khỏi cơ sở). Phần tử trục là $z_{14} = 1$ (được đánh dấu "o" bên cạnh). Tiến hành tính toán theo các công thức đổi cơ sở ta được bảng đơn hình sau:

J	c_j	x_j	1	2	3	4	5	6
			1	-1	0	-2	2	-3
4	-2	2	1	0	0	1	1	-1
2	-1	10	-1	1	0	0	-1	2
3	0	5	-2	0	1	0	2	5
		-14	-2	0	0	0	-3	3
Cột xoay: 6, dòng xoay: 3, phần tử trục $z_{36} = 5$								
4	-2	3	$3/5$	0	$1/5$	1	$7/5$	0
2	-1	8	$-1/5$	1	$-2/5$	0	$-9/5$	0
6	-3	1	$-2/5$	0	$1/5$	0	$2/5$	1
		-17	$-4/5$	0	$-3/5$	0	$-21/5$	0

Tất cả $\square_k < 0$ ($k = 1, 2 \dots 6$). Phương án tối ưu là :

$x^* = (0, 8, 0, 3, 0, 1)$ và giá trị tối ưu $f(x^*) = -17$

Ví dụ 2:

$f(x) = 6x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 - 7x_6 + 7 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 & -x_4 & +x_6 & = 15 \\ 2x_1 & -x_3 & & + 2x_6 = -9 \\ 4x_1 & & + 2x_4 + x_5 & - 3x_6 = 2 \\ x_j \geq 0 (j=1, \dots, 6) \end{cases} \quad (1)$$

Đổi dấu để có vec tơ đơn vị :

Xét bài toán :

$$g(x) = 6x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 - 7x_6 \rightarrow \min.$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 & -x_4 & +x_6 & = 15 \\ -2x_1 & +x_3 & & - 2x_6 = 9 \\ 4x_1 & & + 2x_4 + x_5 & - 3x_6 = 2 \\ x_j \geq 0 (j=1, \dots, 6) \end{cases} \quad (2)$$

Nghiệm x^* của (2) cũng là nghiệm của (1) và $f(x^*) = g(x^*) + 7$

Nếu (2) không có phương án tối ưu thì (1) cũng không có phương án tối ưu .

Bài toán (2) có $J = \{2, 3, 5\}$ là cơ sở .

Ta có bảng đơn hình :

J	C_j	x_j	1	2	3	4	5	6
			6	1	1	3	1	-7
2	1	15	-1	1	0	-1	0	1
3	1	9	-2	0	1	0	0	-2
5	1	2	4	0	0	2	1	-3
		26	-5	0	0	-2	0	3
J	C_j	x_j	1	2	3	4	5	6
			6	1	1	3	1	-7
6	-7	15	-1	1	0	-1	0	1
3	1	39	-4	2	1	-2	0	0
5	1	47	1	3	0	-1	1	0
		-19	-2	-3	0	1	0	0

Tồn tại $\Delta_4 > 0$ và mọi phần tử trên cột 4 đều nhỏ hơn 0 . Bài toán không có phương án tối ưu hữu hạn . Nên (1) không có phương án tối ưu .

III. TÌM CƠ SỞ XUẤT PHÁT

Để có thể bắt đầu thủ tục đơn hình , ta giả thiết có sẵn một phương án xuất phát và có cơ sở tương ứng của nó là J . Hơn nữa , ta luôn giả thiết hạng của ma

trận A là m , nghĩa là các dòng của ma trận A là độc lập tuyến tính . Trong thực tế không có gì đảm bảo điều này cả , thậm chí miền ràng buộc có thể rỗng , tức là bài toán đã cho không có phương án chấp nhận được .

Phần này nhằm giải quyết hai vấn đề còn gác lại ở trên . Cho bài toán quy hoạch tuyến tính bất kỳ , cần chỉ ra cách tìm một phương án cực biên và cơ sở tương ứng hoặc chứng tỏ bài toán không có phương án .

1. Phương pháp hai pha.

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc :

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min$$

$$D: \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \quad (I)$$

Không giảm tổng quát coi $b_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$. Nếu trái lại thì ta có $b_i < 0$, ta nhân hai vế ràng buộc thứ i với -1 .

Xét bài toán phụ sau :

$$f(x) = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots + u_{n+m} \rightarrow \min$$

$$D': \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + u_{n+i} = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\ u_{n+i} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{cases} \quad (P)$$

Các biến u_{n+i} gọi là các biến giả .

Bài toán (P) cũng là một bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc với $n+m$ biến . Đối với bài toán (P) ta có ngay phương án cực biên xuất phát $(x, u) = (0, b)$ tức là ta có $x_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$) , $u_{n+i} = b_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$) và cơ sở tương ứng là m cột cuối và ma trận cơ sở $A_j = I$ (là ma trận đơn vị) nghĩa là rất thuận lợi để bắt đầu thủ tục đơn hình . Bài toán phụ (P) giúp ta giải quyết vấn đề phương án cực biên và cơ sở xuất phát của bài toán ban đầu (I) như sẽ thấy dưới đây:

Định lí : *Bài toán ban đầu (I) có phương án chấp nhận được khi và chỉ khi bài toán phụ (P) có phương án tối ưu với tất cả các biến giả u_{n+i} đều bằng 0 ($i = 1, 2, \dots, m$).*

Chứng minh .

(Thuận) Giả sử (I) có phương án $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ thì rõ ràng (P) có phương án $(x, 0) = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, 0, 0, \dots, 0)$ và với mọi $(x, u) \in D'$ có $f(x, u) \geq 0 = f(x, 0) \Rightarrow$ mọi phương án dạng $(x, 0)$ ($x \in D$) đều là phương án tối ưu của bài toán (P).

(Nghịch) Ngược lại nếu (P) có phương án tối ưu (x^*, u^*) với $u^* = 0$ thì x^* là phương án của (I). Ta còn cần chứng minh nếu (P) có phương án tối ưu (x^*, u^*) với $u^* \neq 0$ thì (I) không có phương án. Thật vậy, giả sử ngược lại, bài toán (I) có phương án $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$. Khi đó $(x, 0)$ là phương án của bài toán (P), nhưng vì $u^* \neq 0$ nên $f(x^*, u^*) = e^1 \cdot u > 0 = f(x, 0)$ với

($e = (1, 1, 1, \dots, 1)$). Mâu thuẫn với giả thiết (x^*, u^*) là phương án tối ưu của bài toán (P).

Quá trình giải bài toán (P) gọi là pha thứ nhất trong phương pháp hai pha. Giả sử sau pha thứ nhất này ta nhận được phương án tối ưu (x^*, u^*) của bài toán phụ (P). Có 3 khả năng:

- Nếu $u^* \neq 0$ thì kết luận bài toán đầu (I) không có phương án.
- Nếu $u^* = 0$ và cơ sở tương ứng gồm các cột tương ứng với x_j , không chứa các cột nào của biến giả u_{n+i} . Đây chính là phương án cực biên và cơ sở xuất phát để bắt đầu pha thứ hai, tức là bắt đầu thủ tục đơn hình với bài toán ban đầu (I).
- Nếu $u^* = 0$ nhưng cơ sở tương ứng có chứa một số cột ứng với các biến giả u_{n+i} . ta cần xét kĩ trường hợp này. Kí hiệu J_x là tập các chỉ số trong cơ sở ứng với các biến x_j , J_u là tập các chỉ số ứng với biến giả u_{n+i} , khi đó $J = J_x \cup J_u$.

Trường hợp 1: Nếu trên dòng có chỉ số $(n+i)$ của bảng đơn hình cuối cùng của bài toán (P) ta tìm được một chỉ số k ngoài cơ sở ($1 \leq k \leq n$) sao cho $z_{n+i, k} \neq 0$ thì ta thực hiện phép đổi cơ sở với phần tử trục là $z_{n+i, k}$ để đưa $(n+i)$ ra ngoài và đưa k vào cơ sở, ta sẽ nhận được một cơ sở mới trong đó đã được bớt đi một cột ứng với các biến giả u và sẽ nhận được một cơ sở xuất phát cho bài toán ban đầu (I) gồm toàn các cột của ma trận A .

Trường hợp 2: Trên dòng chỉ số $(n+i)$ của bảng đơn hình cuối cùng của bài toán (P) không tìm được chỉ số k ngoài cơ sở ($1 \leq k \leq n$) mà $z_{n+i, k} \neq 0$ thì ta kết luận rằng dòng i của ma trận A là tổ hợp tuyến tính của các dòng còn lại. Thật vậy, vì ma trận xuất phát để giải bài toán (P) là ma trận E , nên phần hệ số z_{jk} trong bảng đơn hình là (A, E) . Các tính toán trên bảng đơn hình gồm việc nhân một dòng với một số hoặc nhân một dòng với một số rồi cộng vào dòng trước. Trường hợp 2 nghĩa là trên dòng chỉ số $(n+i)$ của bảng đơn hình phần tử tương ứng với x hoàn toàn bằng 0 sau các phép biến đổi trên. Điều này nói lên rằng dòng i của ma trận A là tổ hợp tuyến tính của các dòng còn lại. Ta có thể xoá đi dòng này và có thể loại bỏ luôn biến giả tương ứng.

Tóm lại , cả hai trường hợp ta đều loại được các cột ứng với biến giả u ra khỏi cơ sở để nhận được một cơ sở chỉ gồm các cột ứng với biến x . Đây là cơ sở xuất phát để giải quyết bài toán ban đầu (I).

Chú ý :

Nếu trong số các cột của ma trận A có một cột là một véc tơ của ma trận đơn vị với phần tử bằng 1 tại dòng i thì ta không cần thêm biến giả u_{n+i} tương ứng với dòng thứ i , số biến giả chỉ là $m - 1$ và cơ sở để xuất phát bài toán (P) sẽ gồm cột này và $m - 1$ cột ứng với các biến giả . Có bao nhiêu cột của A là véc tơ của ma trận đơn vị thì ta bớt được bấy nhiêu biến giả .

Ví dụ 1: Giải bài toán quy hoạch tuyến tính :

$$\begin{aligned} f(x) &= -3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \min \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 6 \\ x_j \geq 0 (j=1,2,3,4) \end{cases} \end{aligned} \quad (I)$$

Ta thêm các biến giả u_5, u_6, u_7 ,

Pha 1 : Giải bài toán quy hoạch tuyến tính phụ

J	C_j	$(x,u)_j$	1	2	3	4	5	6	7
			0	0	0	0	1	1	1
5	1	2	⁰ 1	2	-1	1	1	0	0
6	1	9	2	-6	3	3	0	1	0
7	1	6	1	-1	1	-1	0	0	1
		17	4	-5	3	3	0	0	0

(P)

		$u)_j$	1	2	3	4	5	6	7
			0	0	0	0	1	1	1
			1	2	-1	1	1	0	0
			0	-10	⁰ 5	1	-2	1	0
			0	-3	2	-2	-1	0	1
			0	-13	7	-1	-4	0	0

J	C_j	$(x,u)_j$	1	2	3	4	5	6	7
			0	0	0	0	1	1	1
1	0	3	1	0	0	6/5	3/5	1/5	0
3	0	1	0	-2	1	1/5	-2/5	1/5	0
7	1	2	0	1	0	-12/5	-1/5	-2/5	1
		2	0	1	0	-12/5	-6/5	-7/5	0

J	C_j	$(x,u)_j$	1	2	3	4	5	6	7
			0	0	0	0	1	1	1
1	0	3	1	0	0	6/5	3/5	1/5	0
3	0	5	0	0	1	-23/5	-4/5	-3/5	2
3	0	2	0	1	0	-12/5	-1/5	-2/5	1
		0	0	0	0	0	-1	-1	-1

Kết thúc pha thứ nhất ta nhận được phương án tối ưu của bài toán (P) là:

$(x^*, u^*) = (3, 2, 5, 0, 0, 0, 0)$ với cơ sở tương ứng là: $J = \{1, 3, 2\} = \{a^1, a^3, a^5\}$.

Ta có trường hợp b) vì trong phương án tối ưu của bài toán (P) có $u^* = 0$ và cơ sở tương ứng chỉ gồm các cột tương ứng với x . Lấy $x^* = (3, 2, 5, 0)$ với cơ sở $\{1, 3, 2\}$ xuất phát để giải bài toán ban đầu.

Suy ra pha thứ hai có bảng đơn hình là:

J	C_j	x_j	1	2	3	4
			-3	1	3	-1
1	-3	3	1	0	0	6/5
3	3	5	0	0	1	-23/5
2	1	2	0	1	0	-12/5
		8	0	0	0	-94/5

Bảng trên nhận được từ bảng đơn hình cuối cùng của bài toán (P) bằng cách bỏ các cột tương ứng với các biến giả, thay cột C_j bằng các hệ số tương ứng của bài toán ban đầu và tính $\Delta_j(x)$ và Δ_k theo bài toán xuất phát.

Bảng đơn hình này đã cho ta thấy đã thoả mãn điều kiện tối ưu.

Vậy nghiệm cần tìm là : $x^* = (3, 2, 5, 0)$ và $f(x^*) = 8$

Ví dụ 2: Giải bài toán quy hoạch tuyến tính .

$$f(x) = 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 27 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 50 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 18 \\ x_j \geq 0 (j = 1, 2, 3, 4) \end{cases} \quad (I)$$

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính phụ sau :

$$f(x) = u_5 + u_6 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + u_5 = 27 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + u_6 = 50 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 18 \\ x_j \geq 0 (j = 1, 2, 3, 4); u_5, u_6 \geq 0. \end{cases}$$

Ta có bảng đơn hình sau :

J	C_j	x_j	1	2	3	4	5	6
			0	0	0	0	1	1
5	1	27	1	-2	1	0	1	0
6	1	50	2	1	0	0	0	1
4	0	18	1	-1	-1	1	0	0
		77	3	-1	3	0	0	0

J	C _J	x _j	1	2	3	4	5	6
5	1	2						
1	0	25						
4	0	-5						
			0	-5/2	0	0	0	-3/2

Điều kiện tối ưu đã thỏa mãn . Phương án tối ưu của (P) là

$$(x^*, u^*) = (25, 0, 0, -5, 2, 0) \text{ có } u_5^* = 2 \text{ khác } 0$$

Vậy bài toán ban đầu (I) không có phương án cực biên .

Ví dụ 3: Giải bài toán quy hoạch toán sau

$$f(x) = 3x_1 + x_2 - 3x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -10x_2 + 5x_3 = 5 \\ -3x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3}) \end{cases}$$

Lời giải

Chuyển về bài toán dạng chính tắc :

$$g(x) = -3x_1 - x_2 + 3x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -10x_2 + 5x_3 = 5 \\ -3x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3}) \end{cases}$$

Xét bài toán phụ :

$$g(x, u) = u_4 + u_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -10x_2 + 5x_3 + u_4 = 5 \\ -3x_2 + 2x_3 + u_5 = 4 \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3}), u_4, u_5 \geq 0 \end{cases}$$