

Chương 3

BÀI TOÁN VẬN TẢI

1. CÁC KHÁI NIỆM VÀ TÍNH CHẤT CỦA BÀI TOÁN VẬN TẢI

1.1. Nội dung kinh tế và các dạng toán học của bài toán vận tải

1.1.1. Nội dung kinh tế của bài toán

Giả sử cần vận chuyển một loại hàng hóa từ m trạm phát, ký hiệu là A_i ($i = \overline{1, m}$). Lượng hàng cần chuyển đi ở mỗi trạm A_i tương ứng là a_i (đơn vị hàng), tới n trạm cần thu hàng, ký hiệu B_j ($j = \overline{1, n}$), lượng hàng cần thu về ở mỗi trạm B_j tương ứng b_j (đơn vị hàng). Giả sử cước phí vận chuyển từ trạm phát hàng A_i tới trạm thu B_j là c_{ij} (đơn vị tùy theo qui ước).

Giả thiết $a_i > 0$, $b_j > 0$, $c_{ij} \geq 0$ ($i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$) và $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j = Q$ (bài toán cân bằng thu phát).

Hãy lập kế hoạch vận chuyển hàng hoá sao cho tổng chi phí vận chuyển nhỏ nhất đồng thời thoả mãn nhu cầu thu phát hàng (các trạm phát, phát hết hàng và các trạm thu, thu đủ hàng).

1.1.2. Mô hình toán học của bài toán

Xác định kế hoạch vận chuyển hàng nghĩa là xác định lượng hàng cần chuyển đi từ các trạm phát tới các trạm thu tương ứng. Gọi x_{ij} là lượng hàng hoá vận chuyển từ trạm phát A_i tới trạm thu B_j ($x_{ij} \geq 0$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$).

Mọi trạm phát, phát hết hàng nên ta có: $\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \forall i = \overline{1, m}$.

Mọi trạm thu, thu đủ hàng nên ta có: $\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \forall j = \overline{1, n}$.

Như vậy tổng chi phí vận chuyển là: $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$, và đòi hỏi phải cực tiểu.

Khi đó mô hình toán học của bài toán sẽ là:

$$f(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (3.1)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, (i = \overline{1, m}) \quad (3.2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, (j = \overline{1, n}) \quad (3.3)$$

$$x_{ij} \geq 0 (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}). \quad (3.4)$$

Trong đó ma trận $X = (x_{ij})_{m,n}$ được gọi là *ma trận phân phối hàng cần phải tìm*. Hàm $f(X)$ được gọi là *hàm mục tiêu* và là tổng chi phí vận chuyển. Hiển nhiên (3.1) (3.2) (3.3) (3.4) là mô hình toán học của một bài toán qui hoạch tuyến tính dạng chính tắc.

Chú ý: Bài toán vận tải (3.1) (3.2) (3.3) (3.4) được viết dưới dạng tường minh như sau:

$$\begin{aligned} & c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \dots + c_{2n}x_{2n} + \dots + \\ & \quad c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \dots + c_{mn}x_{mn} \rightarrow \min. \\ & x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} \quad \quad \quad = a_1 \\ & \quad \quad \quad x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} \quad \quad \quad = a_2 \\ & \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \dots \\ & \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} = a_m \\ & x_{11} \quad \quad \quad + x_{21} + \dots \quad \quad \quad + x_{m1} \quad \quad \quad = b_1 \\ & \quad \quad \quad x_{12} \quad \quad \quad + x_{22} + \dots \quad \quad \quad + x_{m2} \quad \quad \quad = b_2 \\ & \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \dots \\ & \quad \quad \quad \quad \quad \quad + x_{1n} \quad \quad \quad + x_{2n} + \dots \quad \quad \quad + x_{mn} = b_n \end{aligned}$$

Theo đó, ma trận ràng buộc A của bài toán (3.1) (3.2) (3.3) (3.4) là:

$$A = \left(\begin{array}{cccc} 11...1 & 00...0 & \dots & 00...0 \\ 00...0 & 11...1 & \dots & 00...0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 00...0 & 00...0 & \dots & 11...1 \\ 10...0 & 10...0 & \dots & 10...0 \\ 01...0 & 01...0 & \dots & 01...0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 00...1 & 00...1 & \dots & 00...1 \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} m \\ n \end{array}$$

$\begin{array}{cccc} n & n & n & n \end{array}$

Nhận thấy ma trận A được chia làm 2m khối: m khối của m dòng đầu thì ở mỗi khối là một ma trận cấp m.n có một dòng có các phần tử là 1, còn các dòng khác các phần tử đều là 0; khối thứ k có dòng thứ k là 1 với $k = \overline{1, m}$. Còn m khối của n dòng sau thì mỗi khối là một ma trận đơn vị cấp n.

Gọi A_{ij} là cột hệ số của ẩn x_{ij} , ta có A_{ij} là véc tơ cột thứ j trong nhóm cột thứ i của ma trận A, khi đó ta luôn có $A_{ij} = E_i + E_{m+j}, \forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$, trong đó E_k là ma trận cấp (m.n, 1) có phần tử ở hàng thứ k là 1, các phần tử khác là 0.

Định nghĩa 3.1. Mọi bài toán qui hoạch tuyến tính có dạng toán học (3.1) (3.2)

(3.3) (3.4) với giả thiết $a_i > 0, b_j > 0, c_{ij} \geq 0 (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$; $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j = Q$ được

gọi là *bài toán vận tải cân bằng thu phát*.

Ngoài bài toán vận tải cân bằng thu phát hay bài toán dạng *đóng* ta có hai bài toán vận tải không cân bằng thu phát hay bài toán dạng *mở* như sau:

$$+) \sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j :$$

$$f(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, (i = \overline{1, m})$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, (j = \overline{1, n})$$

$$x_{ij} \geq 0 (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}).$$

$$+) \sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j :$$

$$f(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, (i = \overline{1, m})$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j, (j = \overline{1, n})$$

$$x_{ij} \geq 0 (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}).$$

Định nghĩa 3.2. Ma trận $X = (x_{ij})_{m,n}$ thỏa mãn hệ các điều kiện (3.2) (3.3) (3.4) của bài toán vận tải cân bằng thu phát được gọi là một *phương án của bài toán hay một phương án phân phối hàng*.

Ký hiệu tập hợp các phương án của bài toán là D.

Định nghĩa 3.3. Phương án X thỏa mãn yêu cầu (3.1) của hàm mục tiêu $f(X)$ được gọi là một *phương án tối ưu*.

Đặt: $\overline{X}$ là ma trận cột gồm m.n thành phần:

$$\overline{X} = (x_{11} \ x_{12} \ \dots \ x_{1n} \ x_{21} \ x_{22} \ \dots \ x_{2n} \ \dots \ x_{m1} \ x_{m2} \ \dots \ x_{mn})^c,$$

C là ma trận dòng gồm m.n thành phần:

$$C = (c_{11} \ c_{12} \ \dots \ c_{1n} \ c_{21} \ c_{22} \ \dots \ c_{2n} \ \dots \ c_{m1} \ c_{m2} \ \dots \ c_{mn}),$$

B là ma trận cột gồm m + n thành phần:

$$B = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m \ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n)$$

$A = (a_{ij})_{(m+n)(m,n)}$ ma trận hệ số các ẩn của (3.2) (3.3). Khi đó dạng (3.1) (3.2) (3.3) (3.4) có dạng ma trận sau:

$$f(\overline{X}) = C\overline{X} \rightarrow \min$$

$$A\overline{X} = B$$

$$\overline{X} \geq 0$$

1.2. Mô hình bảng của bài toán vận tải

1.2.1. Bảng vận tải

Ngoài cách mô tả bài toán dưới dạng tổng quát, do đặc thù của lớp bài toán vận tải, ta có thể mô tả bài toán dưới dạng bảng để thuận lợi cho việc tìm lời giải của bài toán.

Bảng 3.1

$\begin{array}{c} T \\ \backslash \\ P \end{array}$	$B_1: b_1$	$B_2: b_2$	...	$B_n: b_n$
$A_1: a_1$	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}
$A_2: a_2$	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}
...	...	...	...	...
$A_m: a_m$	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}

Bảng 3.1 trên được gọi là *bảng vận tải*. Không tính dòng đầu (ghi lượng hàng của các trạm thu), cột đầu (ghi lượng hàng của các trạm phát) thì bảng có m dòng, n cột và m.n ô. Mỗi cột tương ứng cho một trạm phát, mỗi dòng tương ứng cho một trạm thu.

Ô nằm trên dòng i, cột j ký hiệu là ô (i, j). Góc trên bên trái ô (i, j) ta ghi giá cước c_{ij} , góc dưới bên phải ghi giá trị x_{ij} là lượng hàng vận chuyển từ trạm A_i đến trạm B_j , chú ý rằng ta chỉ ghi giá trị của x_{ij} vào ô (i, j) nếu $x_{ij} > 0$ và gọi ô đó là một *ô chọn*; nếu $x_{ij} = 0$ thì ta bỏ trống vị trí đó (trừ trường hợp đặc biệt) và gọi ô đó là *ô loại*.

Ký hiệu $C(X) = \{(i, j): x_{ij} > 0\}$.

1.2.2. Vòng và các tính chất

Định nghĩa 4. Một tập hợp gồm k ô ($k \geq 4$) trên bảng vận tải được đánh số thứ tự 1, 2, ..., k (xem ô đầu tiên là ô tiếp theo của ô cuối cùng) được gọi là một *vòng* nếu

chúng thỏa mãn điều kiện: hai ô liên tiếp phải cùng nằm trên một dòng hay một cột và không có ba ô liên tiếp cùng nằm trên một dòng hay một cột.

Vòng thường được ký hiệu là V và được biểu diễn:

$$V = \{(i_1, j_1), (i_1, j_2), (i_2, j_2), \dots, (i_p, j_p)(i_p, j_1)\}$$

hoặc

$$V = \{(i_1, j_1), (i_2, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_p, j_p)(i_1, j_p)\},$$

$$\text{với } i_k \neq i_{k+1}, j_k \neq j_{k+1}, \forall k = 1, 2, \dots, p.$$

Ví dụ 1: Ta có một vòng như Bảng 3.2 sau:

$$V = \{(1,2), (3, 2), (3, 3), (5, 3), (5, 5), (1, 5)\}$$

Bảng 3.2

	(1) ←			(6)
	↓			↑
	(2) →	(3)		
		↓		
		(4) →		(5)

Nhận xét: Từ định nghĩa ta nhận thấy số ô của mỗi hàng hoặc mỗi cột mà vòng đi qua là hai ô, do đó tổng số các ô có mặt trên vòng luôn là một số chẵn và ít nhất phải có bốn ô.

Định nghĩa 3.5. Một tập hợp các ô mà từ đó có thể lấy ra được một số ô để tạo thành vòng thì tập hợp các ô đó được gọi là *có chứa vòng*.

Định lý 3.1. Cho K là một tập hợp các ô trên bảng vận tải

$$\{(A_{ij}): (i, j) \in K\} \quad (3.5)$$

Tập hợp K có chứa vòng khi và chỉ khi họ (3.5) là một họ véc tơ phụ thuộc tuyến tính.

Chứng minh: Cần: Giả sử K chứa vòng V có dạng:

$$V = (i_1, j_1), (i_1, j_2), (i_2, j_2), \dots, (i_p, j_p)(i_p, j_1).$$

Vì $A_{ij} = E_i + E_{m+j}$ nên rõ ràng ta có:

$$A_{i_1 j_1} - A_{i_1 j_2} + A_{i_2 j_2} - \dots + A_{i_p j_p} - A_{i_p j_1} = 0,$$

đẳng thức này chứng tỏ họ (3.5) là họ véc tơ phụ thuộc tuyến tính.

Đủ: Giả sử họ (3.5) phụ thuộc tuyến tính, khi đó ta có:

$$\sum_{(i,j) \in K} \alpha_{ij} A_{ij} = 0, \quad (3.6)$$

với ít nhất một hệ số $\alpha_{ij} \neq 0$. Từ (3.6) ta có:

$$\sum_{(i,j) \in K} \alpha_{ij} (E_i + E_{m+j}) = 0 \quad (3.7)$$

Giả sử $\alpha_{i_1 j_1} \neq 0$. Khi đó số hạng $\alpha_{i_1 j_1} A_{i_1 j_1} = \alpha_{i_1 j_1} (E_{i_1} + E_{m+j_1})$ có hai thành phần thứ i_1 và $m + j_1$ là $\alpha_{i_1 j_1} \neq 0$. Để làm triệt tiêu thành phần thứ i_1 của số hạng này thì vế trái của (3.6) phải chứa ít nhất một số hạng có thành phần thứ i_1 khác không. Giả sử đó là số hạng thứ $i_1 j_2$: $\alpha_{i_1 j_2} A_{i_1 j_2} \neq 0$. Lại xuất hiện thành phần thứ $m + j_2$ khác 0. Để làm triệt tiêu thành phần này thì vế trái của (3.6) phải chứa ít nhất một số hạng có thành phần thứ $m + j_2$ khác 0. Giả sử đó là số hạng: $\alpha_{i_2 j_2} A_{i_2 j_2} \neq 0$. Lại xuất hiện thành phần thứ $i_2 \neq 0$ v.v... Vì vế trái của (3.6) là một tổng hữu hạn nên cuối cùng để làm triệt tiêu thành phần thứ $m + i_1$ (xuất hiện lúc đầu) thì vế trái của (3.6) phải chứa ít nhất một số hạng có thành phần thứ $m + i_1$ khác 0. Giả sử đó là số hạng $\alpha_{i_p j_1} A_{i_p j_1} \neq 0$. Đồng thời với việc chọn các số hạng khác không thì ta đã chọn ra được tập hợp các ô tương ứng là: $(i_1, j_1); (i_1, j_2); (i_2, j_2); \dots; (i_p, j_p); (i_p, j_1)$ tập hợp các ô này chính là một vòng và nó là một tập con của (3.5). Vậy (3.5) chứa vòng.

1.3. Tính chất của bài toán vận tải cân bằng thu phát

Định lý 3.2. Bài toán vận tải cân bằng thu phát (3.1) (3.2) (3.3) (3.4) luôn có phương án tối ưu.

Chứng minh: Áp dụng định lý 1.8, ta cần chỉ ra rằng bài toán có phương án và hàm mục tiêu $f(X)$ bị chặn dưới trên tập các phương án. Thật vậy:

Giả sử $X = (x_{ij}) \in D$, do $c_{ij} \geq 0$, $x_{ij} \geq 0 \forall i, j$ nên $f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \geq 0$. Như

vậy với mọi $X \in D$, hàm $f(x)$ bị chặn dưới trên D .

Đặt $x_{ij}^0 = \frac{a_i b_j}{Q}$, $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$ ($\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j = Q$). Đặt $X_0 = (x_{ij}^0)_{m,n}$. Khi đó ta có:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij}^0 = a_i, i = \overline{1, m}; \sum_{i=1}^m x_{ij}^0 = b_j, j = \overline{1, n}; x_{ij}^0 \geq 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}.$$

Vậy X_0 là một phương án của bài toán. Ta có điều phải chứng minh.

Định lý 3. Trong bài toán vận tải với dạng ma trận hạng của ma trận ràng buộc A là $\text{rank} A = m + n - 1$.

Chứng minh: Ta có tổng của m dòng đầu của ma trận A bằng tổng của n dòng sau của ma trận A và bằng $(1, 1, \dots, 1)$. Suy ra $m + n$ dòng của A phụ thuộc tuyến tính, do vậy $\text{rank} A \leq m + n - 1$. Ta sẽ chứng minh rằng $m + n - 1$ dòng của A kể từ dòng thứ hai là độc lập tuyến tính. Thật vậy: Gọi D_i là dòng thứ i của ma trận A , xét đẳng thức sau:

$$\sum_{i=2}^{m+n} \alpha_i D_i = 0. \quad (3.8)$$

Vế trái của (3.8) là một véc tơ gồm $m.n$ thành phần, ta xét n cột đầu. Khi đó từ (3.8) ta có $\sum_{i=m+1}^{m+n} \alpha_i d_{ij} = 0$, $\forall j = \overline{1, n}$; mà $d_{ij} = 1$ nếu $i = m + j$; $d_{ij} = 0$ nếu $i \neq m + j$.

Do vậy $\alpha_i = 0, \forall i = m + j, j = \overline{1, n}$. Hay $\alpha_{m+j} = 0, \forall j = \overline{1, n}$. Khi đó ta có

$$(3.8) \Leftrightarrow \sum_{i=2}^m \alpha_i D_i = 0.$$

$$\Leftrightarrow (\alpha_2, \alpha_2, \dots, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_3, \dots, \alpha_3, \dots, \alpha_m, \alpha_m, \dots, \alpha_m) = 0.$$

$$\Rightarrow \alpha_k = 0, \forall k = \overline{2, m}.$$

$$\Rightarrow \alpha_k = 0, \forall k = \overline{2, m+n}.$$

Vậy $m + n - 1$ dòng sau của A độc lập tuyến tính, hay $\text{rank} A = m + n - 1$.

Từ kết quả này, ta thấy rằng khi giải bài toán vận tải bằng phương pháp đơn hình thì có thể bỏ đi một dòng bất kỳ của hệ ràng buộc.

Định lý 3.4. *Giả sử $X = (x_{ij})_{m,n}$ là một phương án của bài toán vận tải cân bằng thu phát (3.1) (3.2) (3.3) (3.4). Khi đó điều kiện cần và đủ để X là một phương án cực biên là $C(X)$ không chứa vòng.*

Chứng minh: Theo định lý 1.6 phương án X của bài toán chính tắc là phương án cực biên khi và chỉ khi $\{A_{ij} : x_{ij} > 0\}$ độc lập tuyến tính, mà

$$\{A_{ij} : x_{ij} > 0\} = \{A_{ij} : (i, j) \in C(X)\},$$

theo định lý 2.1 họ này độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $C(X)$ không chứa vòng.

Từ các định lý trên ta có các hệ quả sau:

Hệ quả 3.1. *Mọi tập hợp gồm nhiều hơn $m + n - 1$ ô trên bảng vận tải $m.n$ đều có chứa vòng.*

Hệ quả 3.2. *Điều kiện cần để phương án X là phương án cực biên là số thành phần dương thực sự của nó không vượt quá $m + n - 1$.*

Định nghĩa 3.6. Phương án cực biên X của bài toán vận tải (3.1) (3.2) (3.3) (3.4) được gọi là *phương án không suy biến* nếu nó có đủ $m + n - 1$ thành phần dương thực sự, nếu không thì phương án cơ bản đó gọi là *suy biến*.

Định nghĩa 3.7. Giả sử X là một phương án cực biên và J là một tập hợp gồm $m + n - 1$ ô không chứa vòng đồng thời J chứa các ô ứng với các thành phần dương thực sự của X . Khi đó J được gọi là *hệ ô chọn cơ sở* của phương án cực biên X .

Từ định nghĩa ta có, nếu phương án cực biên X không suy biến thì $C(X) \equiv J$ là hệ ô cơ sở duy nhất của X . Nếu X suy biến thì $C(X) \neq J$ và X có thể có nhiều hệ cơ sở khác nhau.

2. THUẬT TOÁN THỂ VỊ GIẢI BÀI TOÁN VẬN TẢI CÂN BẰNG THU PHÁT

2.1. Phương pháp tìm phương án cực biên xuất phát

2.1.1. Phương pháp cước phí bé nhất

Phương pháp này luôn ưu tiên phân phối cho ô có cước phí nhỏ nhất trên bảng. Nội dung phương pháp như sau:

Trên bảng vận tải, ta tìm ô có cước phí nhỏ nhất, phân vào ô đó một lượng hàng lớn nhất có thể được. Khi đó sẽ có ít nhất một dòng hay một cột thỏa mãn nhu cầu (nghĩa là trạm phát đã tiêu thụ hết hàng hoặc trạm thu đã nhận đủ số hàng so với nhu cầu), xóa bỏ dòng hay cột đó đi và lặp lại công việc này đối với các ô còn lại, sau một số hữu hạn bước lặp ta thu được ma trận $X = (x_{ij})_{m,n}$.

Tập hợp các giá trị $\{x_{ij}\}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ thu được từ cách tìm như trên là một phương án của bài toán, vì chúng thỏa mãn mọi ràng buộc. Hơn nữa nó còn là một phương án cực biên.

Thật vậy, theo cách phân phối, các ô chọn đều có $x_{ij} > 0$. Giả sử tập các ô chọn có một số ô tạo thành vòng có dạng:

$$V = \{(i_1, j_1), (i_1, j_2), (i_2, j_2), \dots, (i_p, j_p), (i_p, j_1)\}.$$

Khi đó có các trường hợp sau xảy ra:

- Hoặc yêu cầu của trạm phát A_{i_1} thỏa mãn, hàng i_1 bị loại khỏi bảng, ô (i_1, j_2) không thể được phân phối.
- Hoặc yêu cầu của trạm thu B_{j_1} thỏa mãn, hàng j_1 bị loại khỏi bảng, ô (i_k, j_1) không thể được phân phối.
- Hoặc yêu cầu của cả trạm phát A_{i_1} và trạm thu B_{j_1} thỏa mãn, khi đó hàng i_1 và cột j_1 bị loại khỏi bảng, ô (i_1, j_2) và ô (i_k, j_1) không thể được phân phối.

Vậy X là phương án cực biên của bài toán vận tải cân bằng thu phát.

Ví dụ 3.1: Tìm phương án cực biên của bài toán vận tải sau (Bảng 3.1) bằng phương pháp cước phí nhỏ nhất.

Bảng 3.3

P \ T	30	20	25	35	40
30	13	7	6	2	12
20	5	1	10	5	11
40	10	5	3	7	14
60	6	3	2	11	10

Giải: Trên bảng vận tải 3.3, ta thấy ô (2, 2) có cước phí nhỏ nhất $c_{22} = 5$. Phân vào ô đó lượng hàng lớn nhất có thể được là $x_{22} = 20$. Khi đó trạm phát A_2 hết hàng và trạm thu B_2 nhận đủ hàng, trạm phát A_1 còn 80 đơn vị hàng. Xóa bỏ hàng 2, cột 2, lặp lại công việc trên sau một số hữu hạn bước, ta thu được phương án cực biên của bài toán như bảng (3.4).

Bảng 3.4

P \ T	30	20	25	35	40
30	13	7	6	2	12
20	5	1	10	5	11
40	10	5	3	7	14
60	6	3	2	11	10

Như vậy, phương án cực biên thu được là: $X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 35 \\ 30 & 0 & 25 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Phương án X_0 có 7 ô chọn, thiếu một ô so với hạng của bài toán cân bằng thu phát. Ta lấy thêm một ô loại bổ sung thêm vào tập hợp 7 ô chọn để đủ 8 ô không chứa vòng. Chẳng hạn ô (1, 2), ta được tập ô cơ sở

$$J_0 = \{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (3, 4), (3, 5), (4, 1), (4, 3), (4, 5)\}.$$

2.1.2. Phương pháp Fogsels

Nội dung phương pháp: Trên bảng vận tải, ta tính chênh lệch cước phí giữa hai ô có cước phí nhỏ nhất của mỗi dòng và mỗi cột. Xét dòng hay cột có chênh lệch lớn nhất và phân vào ô có cước phí nhỏ nhất của dòng hay cột đó một lượng hàng lớn nhất có thể được, bỏ đi các ô nằm trên các trạm đã được thỏa mãn. Sau đó tính lại chênh lệch cước phí của các cột hay dòng còn lại, lặp lại công việc trên sau một số hữu hạn lần, ta thu được ma trận $X = (x_{ij})_{m,n}$ là một phương án cực biên của bài toán vận tải cân bằng thu phát.

Ví dụ 3.2: Tìm phương án cực biên theo phương pháp Fogsels của bài toán vận tải ở ví dụ 3.1.

Giải: Bằng phương pháp Fogsels ta tìm được phương án cực biên như bảng 3.5.

Bảng 3.5

T \ P	30	20	25	35	40	
30	13	7	6	2	12	4,4x
20	5	1	10	5	11	4x
40	10	5	3	7	14	2,4,3,7
60	6	3	2	11	10	1,4,4,1
	1,4,4x	2x	1,1,1x	3,5,4,7x	1,2,4,4	

Phương án cực biên tìm được theo phương pháp Fogsels:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 5 & 10 \\ 30 & 0 & 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}$$

2.2. Tiêu chuẩn tối ưu cho một phương án của bài toán vận tải cân bằng thu phát

2.2.1. Bài toán đối ngẫu của bài toán vận tải

Xét bài toán vận tải :

$$f(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (3.1)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, (i = \overline{1, m}) \quad (3.2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, (j = \overline{1, n}) \quad (3.3)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}). \quad (3.4)$$

Ký hiệu u_i là các biến đối ngẫu ứng với hệ ràng buộc (3.2), v_j là các biến đối ngẫu ứng với hệ ràng buộc (3.3). Khi đó bài toán đối ngẫu của bài toán vận tải có dạng:

$$\sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j \rightarrow \max \quad (3.9)$$

$$u_i + v_j \leq c_{ij} \quad (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}). \quad (3.10)$$

Các cặp điều kiện đối ngẫu:

$$x_{ij} \geq 0 \Leftrightarrow u_i + v_j \leq c_{ij} \quad (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}) \quad (3.11)$$

2.2.2. Tiêu chuẩn tối ưu cho một phương án của bài toán vận tải

Định lý 3.5. Giả sử $X = (x_{ij})_{m,n}$ là phương án của bài toán vận tải cân bằng thu phát (3.1) (3.2) (3.3) (3.4). Khi đó điều kiện cần và đủ để phương án X là phương án tối ưu là tồn tại một hệ thống gồm $m + n$ thế vị $(u_1, u_2, \dots, u_m, v_1, v_2, \dots, v_n) = (U, V)$ sao cho:

$$u_i + v_j \leq c_{ij} \quad (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}), \quad (3.12)$$

$$u_i + v_j = c_{ij} \quad \text{nếu } x_{ij} > 0. \quad (3.13)$$

Chứng minh. Cần: Giả sử $X = (x_{ij})_{m,n}$ là phương án tối ưu của bài toán vận tải cân bằng thu phát (3.1) (3.2) (3.3) (3.4). Theo định lý đối ngẫu thứ nhất, bài toán đối ngẫu (3.9) (3.10) cũng có phương án tối ưu. Giả sử phương án tối ưu đó là $(U, V) = (u_i, v_j), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$. Khi đó điều kiện (3.12) được thỏa mãn. Mặt khác theo định lý đối ngẫu thứ hai giữa (U, V) và X thì điều kiện (3.13) được thỏa mãn. Vậy phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu (U, V) chính là hệ thống thế vị phải tìm.

Đủ: Giả sử tìm được hệ thống thế vị $(U, V) = \{(u_i, v_j): i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}\}$ thỏa mãn (3.12) (3.13). Vì thỏa mãn (3.12) nên (U, V) là phương án của bài toán đối ngẫu. Vì thỏa mãn (3.13) nên cặp phương án $X, (U, V)$ thỏa mãn giả thiết của định lý đối ngẫu thứ hai. Vậy X là phương án tối ưu của bài toán vận tải và hệ thống thế vị (U, V) là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

2.2.3. Phương pháp xây hệ thống toán thế vị

Giả sử $X_0 = (x_{ij}^0)_{m,n}$ là một phương án cực biên và J_0 là một hệ thống ô chọn cơ sở của X_0 . Ta sẽ xây dựng hệ thống thế vị $(U, V) = (u_i, v_j), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$. Lấy (3.13) làm điều kiện xuất phát để tìm hệ thống thế vị sau đó sẽ kiểm tra điều kiện (3.12). Xét hệ phương trình tuyến tính:

$$u_i + v_j = c_{ij} \quad (i, j) \in J_0. \quad (3.14)$$

Vì J_0 gồm $m + n - 1$ ô không chứa vòng nên hệ (3.14) gồm $m + n - 1$ phương trình độc lập tuyến tính, xác định $m + n$ ẩn. Do vậy hệ (3.14) có vô số nghiệm phụ thuộc một tham số. Lấy bất kỳ một ẩn làm tham số, và cho tham số nhận một giá trị cụ thể, chẳng hạn là số 0, ta được một nghiệm riêng của hệ phương trình. Đó chính là hệ thống thế vị đối với tập ô cơ sở J_0 .

Định lý 2. Giả sử (U, V) và (U', V') là hai nghiệm riêng của hệ (3.14) khi đó ta có:

$$u_i + v_j = u_i' + v_j', \quad \forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}.$$

Từ kết quả của định lý ta nhận thấy việc phương án X_0 có tối ưu hay không nghĩa là hệ thống thế vị (U, V) tìm được có thỏa mãn điều kiện (3.12) hay không, nó hoàn toàn không phụ thuộc vào việc ta chọn ẩn tự do và cho nó giá trị là bao nhiêu khi đi tìm nghiệm riêng của hệ phương trình (3.14).

Tóm lại, để tìm hệ thống thế vị ứng với một phương án cực biên X_0 cho trước và kiểm tra X_0 đã tối ưu chưa ta thực hiện các bước sau:

- Xác định hệ ô chọn cơ sở của X_0 . Nếu X_0 không suy biến thì $J_0 = C(X_0)$. Nếu X_0 suy biến thì ta cần bổ sung thêm một số ô loại (làm ô chọn giả) để cùng với tập $C(X_0)$ tạo thành $m + n - 1$ ô không chứa vòng. Lượng hàng tại các ô chọn giả là 0.

- Tìm một hệ thống thế vị, hay là tìm một nghiệm riêng của hệ (3.14).

Đặt $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$, Δ_{ij} được gọi là số kiểm tra hay ước lượng của ô (i, j) .

Rõ ràng $\Delta_{ij} = 0 \forall (i, j) \in J$ và

- nếu $\Delta_{ij} \leq 0 \forall (i, j)$ thì X_0 là phương án tối ưu,

- nếu tồn tại $\Delta_{ij} > 0$ thì X_0 chưa phải là phương án tối ưu.

2.3. Phương pháp cải tiến phương án

Bổ đề 3.1. Xét phương án cực biên X_0 với hệ ô chọn cơ sở J_0 . Giả sử (i_0, j_0) là một ô bất kỳ không thuộc J_0 , khi đó tập hợp $\{J_0 + (i_0, j_0)\}$ sẽ chứa một vòng duy nhất.

Chứng minh: Do $\{J + (i_0, j_0)\}$ gồm $m + n$ ô nên nó chứa một vòng V nào đó và hiển nhiên V đi qua (i_0, j_0) , Giả sử vòng V có dạng:

$$V = \{(i_0, j_0), (i_0, j_1), (i_1, j_1), \dots, (i_k, j_k), (i_k, j_0)\}.$$

Giả sử tồn tại vòng $V' \neq V$, dĩ nhiên V' cũng đi qua (i_0, j_0) và giả sử V' có dạng:

$$V' = \{(i_0, j_0), (i_0, q_1), (p_1, q_1), \dots, (p_k, q_k), (p_k, j_0)\}.$$

Từ V và V' ta lập vòng mới:

$$V'' = \{(i_0, j_1), (i_1, j_1), \dots, (i_k, j_k), (i_k, j_0), (p_k, j_0), (p_k, q_k), \dots, (i_0, q_1)\}.$$

Vòng này không đi qua (i_0, j_0) , trái với giả thiết J_0 không chứa vòng. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bổ đề 3.2. Gọi V là vòng duy nhất tạo bởi (i_0, j_0) và một số ô của J_0 . Đánh số thứ tự $1, 2, 3, \dots$ các ô trên V bắt đầu từ (i_0, j_0) .

Ký hiệu: $V_c = \{(i, j) \in V \text{ có số thứ tự chẵn}\},$

$V_l = \{(i, j) \in V \text{ có số thứ tự lẻ}\}.$

Ta có công thức $\sum_{(i,j) \in V_c} c_{ij} - \sum_{(i,j) \in V_l} c_{ij} = \Delta_{i_0 j_0}.$

Chứng minh: Giả sử $V = \{(i_0, j_0), (i_0, j_1), (i_1, j_1), \dots, (i_k, j_k), (i_k, j_0)\}.$ Khi đó:

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in V_c} c_{ij} - \sum_{(i,j) \in V_l} c_{ij} &= -c_{i_0 j_0} + c_{i_0 j_1} - c_{i_1 j_1} + \dots - c_{i_k j_k} + c_{i_k j_0} \\ &= -c_{i_0 j_0} + u_{i_0} + v_{j_1} - u_{i_1} - v_{j_1} + \dots - u_{i_k} - v_{j_k} + u_{i_k} + v_{j_0} \\ &= -c_{i_0 j_0} + u_{i_0} + v_{j_0} = \Delta_{i_0 j_0}. \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh.

Dựa vào hai kết quả trên ta đưa ra thuật toán cải tiến phương án như sau:

Giả sử phương án cực biên X_0 với hệ ô chọn cơ sở J_0 chưa thỏa mãn tiêu chuẩn tối ưu, nghĩa là còn tồn tại số kiểm tra $\Delta_{ij} > 0$.

- Chọn ô điều chỉnh (thường chọn ô có số kiểm tra dương lớn nhất). Giả sử $\Delta_{i_0 j_0} = \max\{\Delta_{ij} > 0\}$, khi đó ô (i_0, j_0) là ô điều chỉnh.

- Lập vòng điều chỉnh V tạo bởi (i_0, j_0) và một số ô chọn khác của J_0 . Sau đó đánh số thứ tự và chia V thành V_c, V_l .

- Xác định phương án mới X_1 theo công thức:

$$x_{ij}^1 = \begin{cases} x_{ij}^0 & (ij) \notin V \\ x_{ij}^0 - q & (ij) \in V_c \\ x_{ij}^0 + q & (ij) \in V_l \end{cases} \quad (3.15)$$

với q là lượng điều chỉnh được xác định theo công thức:

$$q = \min \{x_{ij}^0 : (ij) \in V_c\} \bigwedge x_{i_r j_r}^0. \quad (3.16)$$

Định lý 3.7. Giả sử X_0 là phương án cực biên không suy biến, ma trận X_1 được xác định theo công thức (3.15) (3.16) là một phương án cực biên với hệ ô chọn cơ sở $J_0 = J \cup \{i_0, j_0\} \setminus \{i_r, j_r\}$, và tốt hơn hẳn X_0 .

Chứng minh: Vì số ô của vòng V nằm trên một dòng hay một cột bằng 0 hoặc là một số chẵn nên từ công thức (3.15) ta có:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij}^1 = \sum_{j=1}^n x_{ij}^0 = a_i, \forall i = \overline{1, m}, \quad \sum_{i=1}^m x_{ij}^1 = \sum_{i=1}^m x_{ij}^0 = b_j, \forall j = \overline{1, m}.$$

Vì X_0 là phương án cực biên không suy biến nên $x_{ij}^0 > 0$ với mọi $(i, j) \in J_0$. Do vậy $q > 0$, mặt khác theo (3.15) và (3.16) thì $x_{ij}^1 \geq 0, \forall (i, j)$. Như vậy chứng tỏ X_1 là phương án của bài toán. Tập hợp J_1 vẫn đảm bảo $m + n - 1$ ô chọn và không chứa vòng. Vậy phương án X_1 thu được là phương án cực biên với cơ sở J_1 , đồng thời $f(X_0) - f(X_1) = q \Delta_{i_0 j_0} > 0$, chứng tỏ phương án X_1 tốt hơn phương án X_0 .

Thuật toán thế vị giải bài toán vận tải cân bằng thu phát (bài toán không suy biến) gồm các bước sau:

Bước 1: Tìm phương án cực biên xuất phát X_0 và hệ ô chọn cơ sở J_0 .

Bước 2: Xây dựng hệ thống thế vị, kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu.

+ Nếu thỏa mãn tiêu chuẩn tối ưu, kết luận bài toán;

+ Nếu chưa thỏa mãn tiêu chuẩn tối ưu, chuyển sang bước 3.

Bước 3: Cải tiến phương án:

- Chọn ô điều chỉnh, lập vòng điều chỉnh, xác định lượng điều chỉnh q .

- Xác định phương án cực biên mới X_1 : Giữ nguyên lượng hàng tại các ô không nằm trên vòng điều chỉnh V . Trên vòng điều chỉnh V ta thêm lượng hàng q ở các ô lẻ, bớt đi lượng hàng q ở các ô chẵn đồng thời xác định hệ ô chọn cơ sở mới J_1 .

Gán $X_1 := X_0$, quay về bước 2.

Chú ý rằng, do số phương án cực biên là hữu hạn nên thuật toán thế vị cũng sẽ kết thúc sau một số hữu hạn bước.

Ví dụ 3.3: Tìm phương án tối ưu của bài toán vận tải cân bằng thu phát cho ở bảng 3.6.

Bảng 3.6

P \ T	30	25	40	25
20	4	2	10	6
45	1	3	8	12
55	5	3	9	7

Giải: - Bằng phương pháp cước phí bé nhất, ta tìm được phương án cực biên xuất phát X_0 như bảng 3.7.

Bảng 3.7

P \ T	30	25	40	25
20	4	2	10	6
45	1	3	8	12
55	5	3	9	7

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 & 0 \\ 30 & 5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 25 \end{pmatrix}$$

Phương án cực biên X_0 có cơ sở J_0 là tập các ô chọn.

Bảng 3.8

4	2	10	6	$u_1 = 0$
-	20	-	-	
1	3	8	12	$u_2 = 1$
30	5	10	-	
5	3	9	7	$u_3 = 2$
-	(1)	30	25	
$v_1 = 0$	$V_2 = 2$	$v_3 = 7$	$v_4 = 5$	

- Xây dựng hệ thống thế vị: từ công thức $u_i + v_j = c_{ij} \forall (i, j) \in J_0$, cho $u_1 = 0$, ta được hệ thống thế vị như ở bảng 3.8.

- Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu: tính $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ đối với các ô loại, thấy ô (3,2) vi phạm tiêu chuẩn tối ưu.

- Điều chỉnh phương án: lấy ô (3,2) làm ô điều chỉnh, ta được vòng điều chỉnh $V = \{(3, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$.

$$\Rightarrow q = \min\{5, 30\} = 5.$$

Điều chỉnh 5 đơn vị hàng từ ô thuộc V_c sang ô thuộc V_l , ta được phương án cực biên X_1 như bảng 3.9: khi đó ô (2, 2) hết hàng trở thành ô loại, ô (3, 2) có hàng trở thành ô chọn. Ta có cơ sở mới J_1 là tập các ô chọn như bảng 3.9.

Bảng 3.9

4	2	10	6	$u_1 = -1$
-	20	-	(0)	
1	3	8	12	$u_2 = -1$
30	-	15	-	
5	3	9	7	$u_3 = 0$
-	5	25	25	
$v_1 = 2$	$v_2 = 3$	$V_3 = 9$	$v_4 = 7$	

- Xây dựng hệ thống thế vị: từ công thức $u_i + v_j = c_{ij} \forall (i, j) \in J_1$, cho $u_3 = 0$, ta được hệ thống thế vị như ở bảng 3.9.

Tính Δ_{ij} , ta thấy $\Delta_{ij} \leq 0, \forall (i, j)$. Vậy phương án cực biên X_1 là phương án tối ưu của bài toán.

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 & 0 \\ 30 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 5 & 25 & 25 \end{pmatrix},$$

tổng cước phí vận chuyển nhỏ nhất là:

$$f(x) = 2.20 + 1.30 + 8.15 + 3.5 + 9.25 + 7.25 = 605.$$

Chú ý: Nếu gặp trường hợp phương án cực biên suy biến thì q có thể bằng 0. Khi $q = 0$, ta vẫn tiến hành thuật toán bình thường. Thực chất của quá trình này là thay đổi một ô cơ sở thành một ô không thuộc cơ sở, còn ô điều chỉnh sẽ trở thành ô cơ sở. Kết quả của quá trình là chuyển từ tập ô cơ sở này sang tập ô cơ sở khác mà không làm thay đổi phương án cực biên.

Nếu $q = \min_{(i,j) \in V_c} x_{ij}$ đạt tại nhiều ô khác nhau, đó là dấu hiệu của phương án

cực biên suy biến. Ta loại một ô bất kỳ một cách ngẫu nhiên trong các ô đó, các ô khác giữ nguyên trong tập cơ sở mới (chúng có vai trò như ô bổ sung).

Ví dụ 3.4: Cho bài toán vận tải như bảng 3.10.

Bảng 3.10

T \ P	51	54	60	45	80
50	10	11	10	9	8
90	12	12	5	13	11
70	19	18	6	14	15
80	18	17	7	15	12