

ỦY BAN NHÂN DÂN TỈNH NGHỆ AN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KINH TẾ

GIÁO TRÌNH
TOÁN KINH TẾ

(Dùng cho hệ Đại học và Cao đẳng)

Lưu hành nội bộ

Vinh, năm 2014

UỶ BAN NHÂN DÂN TỈNH NGHỆ AN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KINH TẾ

GIÁO TRÌNH
TOÁN KINH TẾ

(Dùng cho hệ Đại học và Cao đẳng)

Lưu hành nội bộ

Th.S Nguyễn Thị Hà (Chủ biên)

Th.S Trần Hà Lan

Vinh, năm 2014

MỤC LỤC

Chương 1: BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH.....	- 2 -
1. MỘT SỐ VÍ DỤ VỀ BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH.....	- 2 -
1.1. Bài toán lập kế hoạch sản xuất.....	- 2 -
1.2. Bài toán phân công lao động.....	- 3 -
1.3. Bài toán vận tải.....	- 4 -
2. BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH (QHTT).....	- 5 -
2.1. Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng tổng quát.....	- 5 -
2.2. Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc và chuẩn tắc.....	- 7 -
2.3. Chuyển đổi dạng bài toán quy hoạch tuyến tính.....	- 9 -
3. THUẬT TOÁN ĐỒ THỊ GIẢI BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH HAI BIẾN....	- 11 -
3.1. Nhận xét.....	- 11 -
3.2. Thuật toán đồ thị giải bài toán quy hoạch tuyến tính.....	- 11 -
4. MỘT SỐ YẾU TỐ HÌNH HỌC TRONG KHÔNG GIAN i^n	- 14 -
4.1. Tập hợp lồi.....	- 14 -
4.2. Tính chất của tập hợp lồi.....	- 15 -
5. TÍNH CHẤT CỦA BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH.....	- 15 -
5.1. Các giả thiết ban đầu.....	- 15 -
5.2. Các tính chất cơ bản của bài toán quy hoạch tuyến tính.....	- 16 -
6. PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH.....	- 25 -
6.1. Cơ sở lý luận của phương pháp đơn hình.....	- 25 -
6.2. Công thức đổi tọa độ và bảng đơn hình.....	- 30 -
6.3. Bài toán suy biến.....	- 35 -
7. PHƯƠNG PHÁP TÌM PHƯƠNG ÁN CỰC BIÊN XUẤT PHÁT.....	- 37 -
7.1. Bài toán giả tạo.....	- 37 -
7.2. Mối quan hệ về phương án tối ưu của bài toán giả tạo và bài toán chính tắc tương ứng..	- 39 -
Chương 2.....	- 42 -
BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH ĐỐI NGẪU.....	- 42 -
1. KHÁI NIỆM BÀI TOÁN QHTT ĐỐI NGẪU.....	- 42 -
1.1. Bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu không đối xứng.....	- 42 -
1.2. Quy tắc thành lập bài toán đối ngẫu.....	- 44 -
LƯỢC ĐỒ TỔNG QUÁT.....	- 45 -
Dạng 1.....	- 45 -
Dạng 2.....	- 45 -
1.3. Bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu đối xứng.....	- 46 -
2. CÁC ĐỊNH LÝ ĐỐI NGẪU.....	- 48 -
3. PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH ĐỐI NGẪU.....	- 52 -
3.1. Nội dung phương pháp.....	- 52 -
3.2. Thuật toán đơn hình đối ngẫu.....	- 53 -
Chương 3.....	- 56 -
BÀI TOÁN VẬN TẢI.....	- 56 -
1. CÁC KHÁI NIỆM VÀ TÍNH CHẤT CỦA BÀI TOÁN VẬN TẢI.....	- 56 -
1.1. Nội dung kinh tế và các dạng toán học của bài toán vận tải.....	- 56 -
1.2. Mô hình bảng của bài toán vận tải.....	- 60 -
1.3. Tính chất của bài toán vận tải cân bằng thu phát.....	- 62 -
2. THUẬT TOÁN THỂ VỊ GIẢI BÀI TOÁN VẬN TẢI CÂN BẰNG THU PHÁT.....	- 64 -
2.1. Phương pháp tìm phương án cực biên xuất phát.....	- 64 -
2.2. Tiêu chuẩn tối ưu cho một phương án của bài toán vận tải cân bằng thu phát.....	- 68 -
2.3. Phương pháp cải tiến phương án.....	- 70 -

4. BÀI TOÁN PHÂN PHỐI.....	- 88 -
4.1. Định nghĩa.	- 88 -
4.2. Phương pháp giải.....	- 88 -
5. BÀI TOÁN Ô CẮM.....	- 93 -
CHƯƠNG 4. MỘT SỐ BÀI TOÁN ỨNG DỤNG BÀI	- 97 -
TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH.....	- 97 -
I. BÀI TOÁN SẢN XUẤT ĐỒNG BỘ	- 97 -
1. CÁC KHÁI NIỆM VÀ TÍNH CHẤT CỦA BÀI TOÁN SẢN XUẤT ĐỒNG BỘ.....	- 97 -
1.1. Nội dung kinh tế và mô hình toán học của bài toán sản xuất đồng bộ.....	- 97 -
1.2. Tính chất của bài toán sản xuất đồng bộ	- 101 -
2. PHƯƠNG PHÁP NHÂN TỬ GIẢI BÀI TOÁN SẢN XUẤT ĐỒNG BỘ	- 105 -
2.1. Phương pháp tìm phương án cực biên suy rộng ban đầu	- 105 -
2.2. Xây dựng hệ thống số kiểm tra và tiêu chuẩn tối ưu.....	- 108 -
2.3. Điều chỉnh phương án	- 109 -
2.4. Thuật toán nhân tử giải bài toán sản xuất đồng bộ.....	- 111 -
II. BÀI TOÁN TRÒ CHƠI MA TRẬN	- 115 -
1. MỘT SỐ KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU.....	- 115 -
1.1. Ví dụ về trò chơi ma trận.....	- 115 -
1.2. Bài toán trò chơi ma trận.....	- 115 -
1.3. Hàm thu hoạch của P.....	- 117 -
2. ĐIỂM YÊN NGỰA VÀ CHIẾN LƯỢC TỐI ƯU	- 118 -
2.1. Điểm yên ngựa	- 118 -
2.2. Chiến lược tối ưu.....	- 119 -
2.3. Trò chơi đối xứng.....	- 120 -
3. PHƯƠNG PHÁP TÌM CHIẾN LƯỢC TỐI ƯU CHO BÀI TOÁN TRÒ CHƠI MA TRẬN.....	- 121 -
3.1. Đưa trò chơi ma trận về bài toán quy hoạch tuyến tính	- 121 -
3.2. Phương pháp tìm chiến lược tối ưu cho bài toán trò chơi ma trận.....	- 123 -
TÀI LIỆU THAM KHẢO.....	- 126 -

LỜI NÓI ĐẦU

Toán học và kinh tế là hai lĩnh vực có mối quan hệ gắn bó với nhau. Kinh tế là nguồn cảm hứng cho toán học thực hiện khả năng tiềm năng của mình, còn toán học là công cụ giúp cho việc phân tích, giải quyết các vấn đề kinh tế một cách chặt chẽ, hợp lý và hiệu quả. Toán kinh tế là việc nghiên cứu để mô tả các vấn đề kinh tế dưới dạng mô hình toán học thích hợp và từ góc độ toán học sẽ tìm ra lời giải cho mô hình đó, từ đó giúp các nhà kinh tế tìm ra các giải pháp tối ưu cho bài toán kinh tế.

Để đáp ứng nhu cầu giảng dạy và học tập môn Toán kinh tế cho sinh viên hệ đại học và cao đẳng, chúng tôi đã biên soạn cuốn giáo trình này. Giáo trình không đi sâu vào các vấn đề lý luận và các kỹ thuật toán học phức tạp mà chỉ tập trung trình bày những nội dung cơ bản và các thuật toán chính của lý thuyết tối ưu tuyến tính. Nhằm giúp sinh viên rèn luyện kỹ năng trong giáo trình có đầy đủ các ví dụ cụ thể mô tả từng tình huống, hướng dẫn tỉ mỉ toàn bộ quá trình giải quyết vấn đề.

Nội dung giáo trình gồm 4 chương:

Chương 1. Bài toán quy hoạch tuyến tính

Chương 2. Bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu

Chương 3. Bài toán vận tải

Chương 4. Một số bài toán ứng dụng của bài toán quy hoạch tuyến tính

Mặc dù có nhiều cố gắng, nhưng giáo trình này chắc chắn không tránh khỏi những thiếu sót. Chúng tôi rất mong được bạn đọc góp ý để cuốn sách ngày càng hoàn thiện.

Các tác giả

Chương 1: BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

1. MỘT SỐ VÍ DỤ VỀ BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

1.1. Bài toán lập kế hoạch sản xuất

1.1.1. Nội dung bài toán

Một cơ sở sản xuất có thể sản xuất được hai loại sản phẩm A và B, từ các nguyên liệu I, II, III. Chi phí từng loại nguyên liệu và tiền lãi của một đơn vị sản phẩm, cũng như dự trữ nguyên liệu cho trong Bảng 1.1.

Bảng 1.1

Nguyên liệu Sản phẩm	I	II	III	Lãi (đơn vị tiền)
A	2	0	1	3
B	1	1	0	5
Dự trữ	8	4	3	

Hãy lập bài toán thể hiện kế hoạch sản xuất sao cho có tổng số lãi lớn nhất và phù hợp với điều kiện dự trữ nguyên liệu.

1.1.2. Mô hình toán học của bài toán

Gọi x_1 , x_2 lần lượt là số sản phẩm A và B được sản xuất. Khi đó:

Tổng số lãi là: $3x_1 + 5x_2$

Tổng số nguyên liệu I cần sử dụng là: $2x_1 + x_2$

Tổng số nguyên liệu II cần sử dụng là: x_2

Tổng số nguyên liệu III cần sử dụng là: x_1

Theo bài ra, ta có mô hình toán học: Tìm $X(x_1, x_2)$ sao cho

$$f(X) = 3x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1 \leq 3 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2} \end{cases}.$$

1.2. Bài toán phân công lao động

1.2.1. Nội dung bài toán

Một phân xưởng có 4 dây chuyền sản xuất khác nhau có thể sản xuất 3 loại sản phẩm. Lượng sản phẩm mỗi loại sản xuất ra được khi sử dụng một dây chuyền sản xuất mỗi loại trong một giờ và chi phí sản xuất ở dây chuyền đó sau một giờ hoạt động cùng với nhu cầu tối thiểu về các sản phẩm được cho bởi Bảng 1.2.

Bảng 1.2

Sản phẩm (SP)	Dây chuyền sản xuất				Nhu cầu tối thiểu
	I	II	III	IV	
SP 1	2	3	1	1	1600
SP 2	1	2	3	4	2200
SP 3	3	1	4	5	2000
Chi phí (1000đ)	10	5	13	16	

Hãy lập bài toán để bố trí thời gian cho các dây chuyền sản xuất sao cho thỏa mãn nhu cầu tối thiểu về các sản phẩm đồng thời tổng chi phí sản xuất thấp nhất.

1.2.2. Mô hình toán học của bài toán

Gọi x_j là thời gian (giờ) áp dụng dây chuyền sản xuất thứ j ($j = \overline{1,4}$) khi đó:

Tổng chi phí sản xuất là: $10x_1 + 5x_2 + 13x_3 + 16x_4$ (1000đ)

Tổng lượng sản phẩm 1 sản xuất ra là: $2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4$

Tổng lượng sản phẩm 2 sản xuất ra là: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$

Tổng lượng sản phẩm 3 sản xuất ra là: $3x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4$

Theo bài ra, ta có mô hình toán học: Tìm $X(x_1, x_2, x_3, x_4)$ sao cho

$$f(X) = 10x_1 + 5x_2 + 13x_3 + 16x_4 \rightarrow \min$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \geq 1600 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \geq 2200 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 \geq 2000 \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4} \end{cases}$$

1.3. Bài toán vận tải

1.3.1. Nội dung bài toán

Một đơn vị vận tải cần vận chuyển xi măng từ 3 kho K_1, K_2, K_3 tới 4 công trường xây dựng T_1, T_2, T_3, T_4 . Cho biết lượng xi măng có ở mỗi kho, lượng xi măng cần ở mỗi công trường và giá cước vận chuyển (ngàn đồng) 1 tấn xi măng từ mỗi kho tới mỗi công trường như Bảng 1.3.

Bảng 1.3

Kho xi măng	Công trường xây dựng			
	T_1 : 130 tấn	T_2 : 160 tấn	T_3 : 120 tấn	T_4 : 140 tấn
K_1 : 170 tấn	20	18	22	25
K_2 : 200 tấn	15	25	30	15
K_3 : 180 tấn	45	30	40	35

Hãy lập bài toán tìm kế hoạch vận chuyển xi măng từ các kho tới các công trường sao cho tổng chi phí vận chuyển là nhỏ nhất và mọi kho đều phát hết lượng xi măng có, mọi công trường nhận đủ lượng xi măng cần?

1.3.2. Mô hình toán học của bài toán

Gọi x_{ij} là lượng xi măng cần vận chuyển từ kho i ($i = 1, 2, 3$) tới công trường j ($j = 1, 2, 3, 4$). Khi đó:

Kho K_1 phát hết lượng xi măng có: $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 170$

Kho K_2 phát hết lượng xi măng có: $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 200$

Kho K_3 phát hết lượng xi măng có: $x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 180$

Công trường T_1 nhận đủ số xi măng cần: $x_{11} + x_{21} + x_{31} = 130$

Công trường T_2 nhận đủ số xi măng cần: $x_{12} + x_{22} + x_{32} = 160$

Công trường T_3 nhận đủ số xi măng cần: $x_{13} + x_{23} + x_{33} = 120$

Công trường T_4 nhận đủ số xi măng cần: $x_{14} + x_{24} + x_{34} = 130$

Lượng hàng vận chuyển không âm: $x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,3}, j = \overline{1,4}$

Tổng chi phí vận chuyển: $f(X) = 20x_{11} + 18x_{12} + 22x_{13} + 25x_{14} + 15x_{21} + 25x_{22} + 30x_{23} + 15x_{24} + 45x_{31} + 30x_{32} + 40x_{33} + 35x_{34}$.

Vậy mô hình toán học của bài toán là: Tìm $X = [x_{ij}]_{3 \times 4}$ sao cho $f(X) \rightarrow \min$ với X thỏa mãn các điều kiện trên.

Tổng quát: Gọi m là số kho chứa hàng (điểm phát), n là số nơi tiêu thụ hàng (điểm thu).

a_i là lượng hàng có (cung) ở điểm phát thứ i ($i = \overline{1, m}$)

b_j là lượng hàng cần (cầu) ở điểm thu thứ j ($j = \overline{1, n}$)

c_{ij} là chi phí vận chuyển một đơn vị hàng từ điểm phát i tới điểm thu j

x_{ij} là lượng hàng vận chuyển cần tìm từ điểm phát i tới điểm thu j .

Mô hình toán học của bài toán vận tải có dạng:

$$f(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = \overline{1, m} \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = \overline{1, n} \\ x_{ij} \geq 0, i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n} \end{cases}$$

2. BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH (QHTT)

2.1. Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng tổng quát

Định nghĩa 1.1. Từ các bài toán thực tế đã nêu cùng rất nhiều bài toán khác, ta có thể thấy bài toán QHTT dạng tổng quát có dạng sau:

Tìm vectơ $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sao cho hàm số

$$f(X) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min \text{ (max)} \quad (1.1)$$

$$\text{với điều kiện: } \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, i = \overline{1, p} & (1.2) \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i, i = \overline{p+1, q} & (1.3) \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, i = \overline{q+1, m} & (1.4) \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, k}; \quad x_j \leq 0, j = \overline{k+1, r}; & (1.5) \end{cases}$$

trong đó: p, q, m, k, n, r là các số nguyên thỏa mãn: $0 \leq p \leq q \leq m; 0 \leq k \leq r \leq n$.

x_j là biến số, các hệ số c_j, a_{ij}, b_i ($j = \overline{1, n}; i = \overline{1, m}$).

Khi đó: ▪ Hàm số $f(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ được gọi là *hàm mục tiêu*.

▪ Các bất phương trình (1.2) - (1.5) được gọi là *hệ ràng buộc* của bài toán. Các ràng buộc (1.2) - (1.4) được gọi là các *ràng buộc chính* (hay *ràng buộc cưỡng bức*). Các ràng buộc (1.5) gọi là *ràng buộc về dấu* (hay *ràng buộc tự nhiên*) của bài toán.

Định nghĩa 1.2. Véc tơ $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ thỏa mãn hệ ràng buộc (1.2) - (1.5) được gọi là *phương án* của bài toán..

Ký hiệu tập hợp các phương án của bài toán QHTT là Ω . Ta có 3 khả năng:

- Bài toán (1.2) — (1.5) có vô số phương án, tức là tập Ω có vô số phần tử.
- Bài toán (1.2) — (1.5) chỉ có 1 phương án, tức là tập Ω chỉ có 1 phần tử.
- Bài toán (1.2) — (1.5) không có phương án nào, tức là tập $\Omega = \emptyset$.

Định nghĩa 1.3. Phương án $X^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ của bài toán (1.2) — (1.5) được gọi là *phương án tối ưu* (PATU) của bài toán nếu:

$$f(X^*) \leq f(X), \forall X \in \Omega \text{ (đối với bài toán } f(X) \rightarrow \min)$$

$$f(X^*) \geq f(X), \forall X \in \Omega \text{ (đối với bài toán } f(X) \rightarrow \max)$$

Chú ý: Tập PATU của bài toán QHTT hoặc một điểm hoặc vô số điểm hoặc không có điểm nào.

Định nghĩa 1.4. Nếu bài toán QHTT có phương án tối ưu thì bài toán được gọi là *giải được* (hay *bài toán có lời giải*) và phương án tối ưu của bài toán còn gọi là *lời giải* của bài toán.

Nếu bài toán QHTT không có phương án tối ưu thì bài toán được gọi là *không giải được* (hay *bài toán không có lời giải*).

Định nghĩa 1.5. Nếu phương án $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ của một bài toán QHTT làm thỏa mãn $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$ thì phương án X được gọi là *thỏa mãn chặt ràng buộc i* tương ứng (1.2), hoặc (1.3) hoặc (1.4).

Nếu phương án $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ có $x_j = 0$ thì phương án X được gọi là *thỏa mãn chặt ràng buộc về dấu* tương ứng (nếu có ràng buộc loại $x_j \geq 0$ hoặc $x_j \leq 0$).

Nếu phương án $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ thỏa mãn $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j < b_i$ (hoặc $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j < b_i$ hoặc $x_j > 0$ hoặc $x_j < 0$) thì phương án X được gọi là *thỏa mãn lỏng ràng buộc* tương ứng (nếu có).

2.2. Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc và chuẩn tắc

2.2.1. Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

Bài toán QHTT chính tắc có dạng: Tìm $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sao cho

$$f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = \sum_{j=1}^n c_jx_j \rightarrow \min \quad (1.6)$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, n} \end{cases} \quad (1.7)$$

$$\text{Nếu ký hiệu } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ là ma trận cấp } m \times n, \text{ gọi là } \textit{ma trận}$$

ràng buộc của bài toán;

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1}; \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}_{m \times 1}; \quad O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

Khi đó bài toán QHTT chính tắc (1.6) – (1.8) viết được dưới dạng ma trận sau:

$$f(X) = CX \rightarrow \min$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} AX = B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

Nếu ký hiệu: $A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ là véc tơ cột thứ j ($j = \overline{1, n}$) của ma trận A . Khi đó bài

toán QHTT chính tắc (1.6) – (1.8) viết được dưới dạng véc tơ sau đây:

$$f(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} \sum_{j=1}^n x_j A_j = B \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, n} \end{cases}$$

Ma trận $\tilde{A} = A \mid B$ được gọi là *ma trận bổ sung* (hay còn gọi là *ma trận mở rộng*) của bài toán QHTT dạng chính tắc (1.6) – (1.8).

2.2.2. Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn tắc.

Bài toán QHTT chuẩn tắc có dạng: Tìm $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sao cho

$$f(X) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min \quad (1.9)$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, n} \end{cases} \quad (1.10)$$

$$(1.11)$$

Bài toán QHTT dạng chuẩn tắc (1.9) – (1.11) viết được dưới dạng ma trận như sau:

$$f(X) = CX \rightarrow \min$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} AX \geq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

Bài toán QHTT dạng chuẩn tắc (1.9) – (1.11) viết được dưới dạng vectơ sau đây:

$$f(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} \sum_{j=1}^n x_j A_j \geq B \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, n} \end{cases}$$

2.3. Chuyển đổi dạng bài toán quy hoạch tuyến tính

Bằng cách thực hiện các phép biến đổi nêu dưới đây, ta có thể chuyển bài toán QHTT bất kỳ về bài toán QHTT chính tắc, chuẩn tắc.

a) Nếu ràng buộc có dạng $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i$ thì ta thêm biến phụ $x_{n+i} \geq 0$ để có

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i.$$

b) Nếu ràng buộc có dạng $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$ thì ta thêm biến phụ $x_{n+i} \geq 0$ để có

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i.$$

c) Nếu có ẩn x_j nào đó không có ràng buộc về dấu thì ta thay x_j bởi hai biến phụ không âm $x_j^+ \geq 0$ và $x_j^- \geq 0$ sao cho: $x_j = x_j^+ - x_j^-$.

d) Mỗi ràng buộc đẳng thức $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$ có thể thay bằng 2 ràng buộc bất đẳng

thức $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i$ và $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i$.

e) Một ràng buộc $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i$ có thể viết lại thành $-\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq -b_i$ hoặc ngược lại.

f) Bài toán tìm cực đại $f \rightarrow \max$ có thể đưa về bài toán tìm cực tiểu $g = -f \rightarrow \min$.

Nhận xét: i) Khi đưa biến phụ x_{n+i} vào thì hệ số của nó trong hàm mục tiêu $f(X)$ là $C_{n+i} = 0$.

ii) Khi đưa biến phụ x_j^+, x_j^- vào thì hệ số của nó trong hàm mục $f(X)$ tương ứng là $C_j^+ = C_j, C_j^- = -C_j$.

iii) Mọi bài toán QHTT đều đưa được về dạng chính tắc và việc giải bài toán QHTT đã cho tương đương với việc giải bài toán QHTT chính tắc tương ứng với nó, theo nghĩa là nếu bài toán dạng chính tắc có PATU' thì từ đó suy ra được PATU' của bài toán ban đầu, còn nếu bài toán chính tắc không có PATU' thì bài toán ban đầu cũng không có PATU'. Nói cách khác: Bài toán ban đầu có PATU' khi và chỉ khi bài toán dạng chính tắc tương ứng với nó có PATU'.

Như vậy, ta chỉ cần tìm cách giải bài toán QHTT chính tắc.

Ví dụ 1.1: Đưa bài toán QHTT sau về dạng chính tắc, dạng chuẩn tắc.

$$f(X) = 2x_1 - x_2 \rightarrow \min$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 2 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 \geq 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 \geq 0; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Giải: * Dạng chính tắc: Bằng cách thay $x_1 = x_4 - x_5$ với $x_4, x_5 \geq 0$ và thêm hai biến phụ $x_6, x_7 \geq 0$, ta đi đến bài toán:

$$f(X) = -x_2 + 2x_4 - 2x_5 \rightarrow \min$$

$$\text{với điều kiện} \begin{cases} -2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + x_6 = 2 \\ -2x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 - x_7 = 3 \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 4 \\ x_j \geq 0; j = \overline{2,7} \end{cases}$$

* Dạng chuẩn tắc: Bằng cách thay $x_1 = x_4 - x_5$ với $x_4, x_5 \geq 0$, đổi dấu hai vế bất đẳng thức đầu và thay bất đẳng thức cuối bằng hai bất đẳng thức $\geq$, ta đi đến bài toán:

$$f(X) = -x_2 + 2x_4 - 2x_5 \rightarrow \min$$

$$\text{với điều kiện} \begin{cases} 2x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \geq 2 \\ -2x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 \geq 3 \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 \geq 4 \\ -x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \geq -4 \\ x_j \geq 0, j = \overline{2,5} \end{cases}$$

3. THUẬT TOÁN ĐỒ THỊ GIẢI BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH HAI BIẾN

3.1. Nhận xét

Trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ với hệ trục tọa độ vuông góc xOy ta có:

* Phương trình $ax + by = c$, biểu diễn một đường thẳng vuông góc với vectơ pháp tuyến $\vec{n}(a, b)$.

* Các điểm (x, y) thỏa mãn $ax + by \leq c$ nằm trên nửa mặt phẳng giới hạn bởi đường thẳng $ax + by = c$.

* Phương trình $ax + by = f$, khi f thay đổi sẽ cho ta họ đường thẳng song song với vectơ chỉ phương $\vec{v}(-b, a)$. Giá trị f càng lớn khi dịch chuyển các đường của họ theo hướng $\vec{n}(a, b)$.

Vì vậy hình ảnh hình học của bài toán QHTT trong $\mathbb{R}^2$ được mô tả theo thuật toán đồ thị như sau.

3.2. Thuật toán đồ thị giải bài toán quy hoạch tuyến tính

Xét bài toán QHTT với hai biến số

$$\min(\max)\{f(X) = c_1x + c_2y: X = (x, y) \in \Omega\},$$

trong đó Ω là tập phương án của bài toán.

Bước 1. Biểu diễn các điều kiện buộc của lên mặt phẳng tọa độ vuông góc xOy.

Tìm tập phương án Ω .

Bước 2. Biểu diễn phương của hàm mục tiêu $c_1x + c_2y = f$, bằng cách cho f một giá trị f_0 nào đó. Đường thẳng $c_1x + c_2y = f_0$ được gọi là *đường mức*.

Bước 3. Tịnh tiến song song đường mức trên tập phương án để tìm phương án tối ưu.

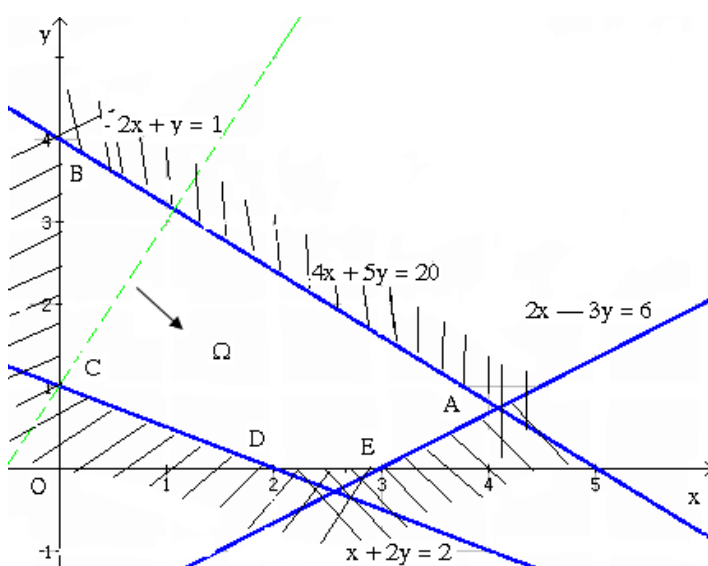
Chú ý: Thay vì xác định vectơ $\vec{n}(c_1, c_2)$ để tìm hướng tăng, ta có thể kiểm tra giá trị hàm mục tiêu ở góc tọa độ $O(0, 0)$.

Ví dụ 1.2: Giải bài toán QHTT

$$\min\{f(X) = -2x + y\}$$

$$\text{với điều kiện} \begin{cases} x + 2y \geq 2 \\ 2x - 3y \leq 6 \\ 4x + 5y \leq 20 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Giải:



Hình 1.1

Biểu diễn điều kiện buộc của bài toán lên mặt phẳng tọa độ xOy ta được tập phương án Ω là hình ngũ giác ABCDE (Hình 1.1).

Chọn $f_0 = 1$, ta có đường mức $-2x + y = 1$ (d). Chọn $D(2, 0) \Rightarrow f(D) = -4 < f_0$. Suy ra dịch chuyển đường mức (d) theo chiều mũi tên thì giá trị của hàm là

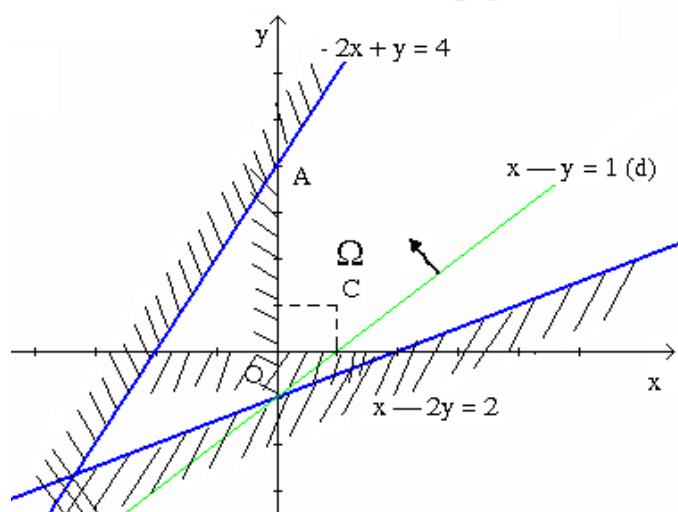
giảm. Do đó tịnh tiến (d) theo chiều mũi tên, ta có PATƯ là $A(\frac{45}{11}, \frac{11}{8})$ và $f_{\min} = -\frac{599}{88}$.

Ví dụ 1.3: Giải bài toán QHTT

$$\min\{f(X) = x - y\}$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} -2x + y \leq 4 \\ x - 2y \leq 2 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Giải:



Hình 1.2

Biểu diễn các điều kiện buộc của bài toán lên mặt phẳng xOy ta được tập phương án Ω (Hình 1.2).

Chọn $f_0 = 1$, ta có đường mức (d): $x - y = 1$. Chọn $C(1, 1)$ suy ra $f(C) = 0 < f_0 = 1$. Vì vậy dịch chuyển (d) theo chiều mũi tên thì giá trị của hàm mục tiêu $f(X)$ giảm.

Ta thấy $f(X)$ không bị chặn trên tập phương án nên bài toán không có phương án tối ưu.

Bạn đọc có thể kiểm tra thêm với ví dụ 2, nhưng chỉ xét với hàm mục tiêu $f(X) = -2x + y$ và $\max(-2x + y)$ thì phương án tối ưu lúc này là điểm $A(4, 0)$, $f(A) = 4$.

Cũng cách làm như vậy với ví dụ 2, nhưng thêm điều kiện $x - 2y \geq 5$ thì tập phương án rỗng. Bài toán không có phương án tối ưu.

Ở ví dụ 1, nếu thay $f(X) = 2x - 3y$ thì bài toán có vô số phương án tối ưu.

Nhận xét: i) Tập PA của bài toán QHTT là một miền lồi bị chặn hoặc không bị chặn.

ii) Bài toán có thể có PATU' là một đỉnh hoặc có vô số PATU'.

iii) Bài toán có thể không có PATU' nếu hàm mục tiêu không bị chặn trên tập PA hoặc tập PA rỗng.

4. MỘT SỐ YẾU TỐ HÌNH HỌC TRONG KHÔNG GIAN $\mathbb{R}^n$

4.1. Tập hợp lồi

4.1.1. Tổ hợp lồi. Cho hệ hữu hạn điểm $X_1, X_2, \dots, X_k$ của không gian vectơ $\mathbb{R}^n$.

Điểm $X = \sum_{i=1}^k \lambda_i X_i$ trong đó $\lambda_i \geq 0$ ($i = \overline{1, k}$), $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ được gọi là *tổ hợp lồi*

của hệ điểm đã cho.

4.1.2. Đoạn thẳng. Cho $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n$. Tập hợp các điểm là tổ hợp lồi của hai điểm đã cho gọi là đoạn thẳng nối hai điểm ấy.

Tập hợp $\overline{X_1 X_2} = \{X \in \mathbb{R}^n \mid X = \lambda X_1 + (1 - \lambda) X_2; 0 \leq \lambda \leq 1\}$ gọi là *đoạn thẳng* nối hai điểm X_1, X_2 .

4.1.3. Tập hợp lồi. Tập $M \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là *tập hợp lồi* nếu mọi đoạn thẳng nối hai điểm của tập hợp thì nằm trọn trong tập hợp đó.

Nghĩa là: Với mọi $X_1, X_2 \in M$, $X = \lambda X_1 + (1 - \lambda) X_2; 0 \leq \lambda \leq 1$ thì $X \in M$.

4.1.4. Điểm cực biên (Đỉnh). Điểm X thuộc tập lồi M được gọi là *điểm cực biên* nếu X không thể biểu diễn thành tổ hợp lồi thực sự của hai điểm khác nhau thuộc M . Nghĩa là không tồn tại $X_1, X_2 \in M$ ($X_1 \neq X_2$) sao cho:

$$X = \lambda X_1 + (1 - \lambda) X_2; 0 < \lambda < 1.$$

4.1.5. Siêu phẳng. Cho $t \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}$, Khi đó tập hợp các điểm $X \in \mathbb{R}^n$ thỏa mãn điều kiện $\langle T, X \rangle = a$ gọi là *siêu phẳng* thuộc không gian $\mathbb{R}^n$.

Tập $\{X \in \mathbb{R}^n : \langle T, X \rangle \leq a\}$ gọi là *nửa không gian đóng* giới hạn bởi siêu phẳng $\langle T, X \rangle = a$.

4.2. Tính chất của tập hợp lồi

4.2.1. Giao của các tập lồi là tập lồi

4.2.2. Cho D_1 và D_2 là các tập lồi. Khi đó hiệu $D = D_1 - D_2$ và tổng $D = D_1 + D_2$ là các tập hợp lồi (hiệu và tổng theo nghĩa hiệu và tổng các véc tơ tương ứng thuộc tập hợp).

4.2.3. Tập M lồi khi và chỉ khi tổ hợp lồi của hữu hạn điểm thuộc M cũng thuộc M .

4.2.4. Tập $M = \left\{ X \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m \right\}$ là tập lồi.

Trong trường hợp này, tập M được gọi là *tập lồi đa diện* thuộc không gian $\mathbb{R}^n$. Như vậy, *tập lồi đa diện* là giao của hữu hạn các *nửa không gian đóng*.

4.2.5. Đa diện lồi M có hữu hạn điểm cực biên $X_1, X_2, \dots, X_r$ và mọi điểm thuộc đa diện lồi là tổ hợp lồi của các điểm cực biên, nghĩa là mọi $X \in M$ thì

$$X = \sum_{i=1}^r \lambda_i X_i, \forall \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^r \lambda_i = 1.$$

5. TÍNH CHẤT CỦA BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

5.1. Các giả thiết ban đầu

Không mất tính tổng quát, ta giả thiết:

Xét bài toán dạng chính tắc

$$f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = \sum_{j=1}^n c_jx_j \rightarrow \min \quad (1.6)$$

$$\text{với điều kiện} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, n} \end{cases} \quad (1.7)$$

$$(1.8)$$

* Hệ phương trình (1.7) có đúng m phương trình độc lập tuyến tính.

* $\forall b_i \geq 0, i = \overline{1, m}$.

* $m < n$ (vì trong trường hợp $m \geq n$ thì tập phương án có nhiều nhất một điểm, do vậy việc xét phương án tối ưu là tầm thường).

Ký hiệu: Ω là tập các phương án của bài toán (1.6) – (1.8).

Với bài toán đã cho, để tiện cho việc chứng minh sau này chúng ta nhớ rằng: Phương án X^* là phương án tối ưu khi và chỉ khi $f(X^*) \leq f(X)$, $\forall X \in \Omega$.

5.2. Các tính chất cơ bản của bài toán quy hoạch tuyến tính

Định lý 1.1. Tập phương án của bài toán QHTT là tập lồi đa diện.

Định nghĩa 1.6

- Điểm cực biên của tập lồi các phương án gọi là *phương án cực biên* (PACB).
- Tập lồi đa diện M được gọi là *bị chặn* nếu với mọi $X = (x_j) \in M$, tồn tại số thực L sao cho $|x_j| \leq L$, $j = \overline{1, n}$.
- Tập lồi đa diện khác rỗng và bị chặn được gọi là *đa diện lồi*.

Định lý 1.2. Phương án $X \in \Omega$ của bài toán QHTT tổng quát là phương án cực biên khi và chỉ khi X thỏa mãn chặt n ràng buộc độc lập tuyến tính.

Phương án cực biên thỏa mãn chặt đúng n ràng buộc gọi là *phương án cực biên không suy biến*.

Phương án cực biên thỏa mãn chặt hơn n ràng buộc gọi là *phương án cực biên suy biến*.

Chú ý: i) Số n trong định nghĩa là số biến số của bài toán.

ii) Nếu phương án X thỏa mãn ít hơn n ràng buộc chặt (hoặc nếu nó thỏa mãn không ít hơn n ràng buộc chặt nhưng không có hệ n ràng buộc nào độc lập tuyến tính) thì phương án X không phải là phương án cực biên (hay gọi là phương án không cực biên).

Định nghĩa 1.7. Nếu một phương án của một bài toán QHTT vừa là PACB, vừa là PATU thì phương án đó được gọi là *phương án cực biên tối ưu*.

Ví dụ 1.4: Cho bài toán QHTT