

MỤC LỤC

BÀI 1: KHÁI QUÁT VỀ LOGIC.....	3
1. Giới thiệu:.....	3
2. Định nghĩa logic học:.....	3
3. Sự hình thành và phát triển của logic học:.....	3
4. Ứng dụng của logic học:.....	4
5. Đôi nét về logic mờ.....	5
BÀI 2: LOGIC MỆNH ĐỀ.....	9
1. Định nghĩa :.....	10
2. Phân tích :.....	10
3. Các phép toán logic cơ bản :.....	11
Bảng chân trị.....	12
4. Công thức trong đại số logic :.....	12
4.1/ Công thức :.....	12
4.2/ Công thức tương đương :.....	13
4.3/ Các qui tắc thay thế:.....	14
5. Hệ quả logic và tương đương logic:.....	17
6. Công thức đối ngẫu.....	17
7. Tính đầy đủ của một hệ các phép toán.....	17
7. Ứng dụng logic mệnh đề để vẽ mạch điện tử.....	18
BÀI 3: LOGIC TÍNH TOÁN.....	24
1. Khái niệm:.....	24
1.1/ Dạng tuyển chuẩn:.....	24
1.2/ Dạng hội chuẩn:.....	24
2. Số logic :.....	25
2.1/ Định nghĩa :.....	25
2.2 Hàm logic:.....	26
2.2 Tương đương logic:.....	28
3. Thuật toán biểu diễn một công thức logic dưới dạng tuyển chuẩn:.....	28
4. Thuật toán biểu diễn một công thức logic dưới dạng hội chuẩn:.....	30
Bài 4: CÀI ĐẶT MÃ H HOA.....	33
1. Thuật toán tính số logic của một công thức:.....	33
2. Chương trình minh họa việc kiểm tra 2 công thức tương đương:.....	39
BÀI 5: SUY DIỄN LOGIC VÀ VỊ TỪ.....	42
1. Giới thiệu:.....	42
2. Định nghĩa qui tắc suy diễn:.....	42
3. Kiểm tra một qui tắc suy diễn:.....	44
4. Các qui tắc suy diễn cơ bản:.....	45
5. Các ví dụ áp dụng trong suy luận và chứng minh.....	48
6. Định nghĩa vị từ và ví dụ.....	50
6.1/ Định nghĩa:.....	50
6.2/ Các phép toán trên các vị từ.....	50

6.3/ Qui tắc phủ định mệnh đề có lượng từ	51
6.4/ Một số qui tắc dùng trong suy luận:	53
BÀI 6: Ị GỒỊ Ị GỮ PROLOG	58
1. Tư duy lập trình và định nghĩa vấn đề trên Prolog	58
2. Các clause, cách giải thích các vấn đề trên Prolog	60
3. Thực thi chương trình. - Đặt câu hỏi và nhận câu trả lời	62
4. Phép hợp nhất - Cơ chế tìm câu trả lời của Prolog.	65
4.1/ Phép hợp nhất	65
4.2/ Cơ chế tìm câu trả lời của Prolog	66
5. Sự quay lui - Không chế số lượng lời giải -Vị từ nhất cắt và fail	68
6. Lập trình đệ quy với Prolog	72
7. Danh sách trên Prolog	74
8. Lập trình đệ quy với danh sách trên Prolog	75
9. Danh sách hai chiều	78
BÀI 7: LOGIC MỜ	81
1. Một số khái niệm	81
1.1/ Tập mờ (Fuzzy Sets)	81
1.2/ Số mờ (Fuzzy I umbers)	85
1.3/ Số logic dạng hình khối	86
1.4/ Số logic dạng tam giác	87
1.5/ Số logic dạng hình thang	89
2. Áp dụng của logic mờ trong dự đoán	90
2.1/ Giá trị trung bình trong thống kê	90
2.2/ Các phép toán với số tam giác và số hình thang	91
2.3/ Trung bình trong logic mờ	93
2.4/ Dự đoán bằng phương pháp Delphi kết hợp logic mờ	95
2.5/ Phương pháp Fuzzy Delphi có trọng số:	99
2.6/ Ứng dụng Fuzzy Pert trong việc quản lý các đề án	100
ĐỀ TÀI CỘI G ĐIỀM CUỐI KỲ	110
TÀI LIỆU THAM KHẢO	111

BÀI 1: KHÁI QUÁT VỀ LOGIC

1. Giới thiệu:

Logic là khoa học xuất hiện rất sớm trong lịch sử. Nó xuất hiện vào thế kỷ thứ IV trước công nguyên khi sự phát triển của khoa học nói riêng và tư duy nói chung đã đòi hỏi phải trả lời câu hỏi: làm thế nào để đảm bảo suy ra được kết luận đúng đắn, chân thực từ các tiền đề chân thực?

2. Định nghĩa logic học:

Từ “Logic” có nguồn gốc từ Hy Lạp là từ “Logos”, từ này có rất nhiều nghĩa trong đó có hai nghĩa thường dùng nhất là:

- ❖ Chỉ tính qui luật của sự tồn tại và phát triển của thế giới khách quan.
- ❖ Chỉ những qui luật đặc thù của tư duy.

Khi ta nói “trái đất quay quanh mặt trời”, ta đã sử dụng nghĩa thứ nhất. Còn khi nói “anh ấy suy luận hợp logic”, ta đã sử dụng nghĩa thứ hai.

3. Sự hình thành và phát triển của logic học:

Người sáng lập ra logic học là nhà triết học Hy Lạp vĩ đại Aristote (384-322 Tr.CN).

Ở thời cổ đại, logic học của Aristote được các học trò của ông tiếp tục phát triển sau khi ông mất nhưng học chỉ nêu ra một số qui tắc suy luận với tiền đề là phán đoán điều kiện và phán đoán lựa chọn nghiêm ngặt mà thôi. Các nhà triết học thuộc trường phái Megat và trường phái khác kỹ đi xa hơn: họ nghiên cứu các quan hệ suy diễn. Để nghiên cứu vấn đề này, họ đưa ra quan hệ **bao hàm** (implication) và họ cũng đưa ra hình thức đầu tiên của định lý diễn dịch - định lý làm cơ sở cho các phép chứng minh trong các hệ thống hình thức hóa: một suy luận được gọi là hợp logic khi và chỉ khi công thức biểu thị nó là một công thức hằng đúng.

Các thành tựu quan trọng nhất ở thời La Mã cổ đại là: hệ thống các thuật ngữ logic được sử dụng đến ngày nay: hình vuông logic (sau này được Boethius hoàn thiện); lý thuyết về tam đoạn luận phức hợp và tam đoạn luận với tiền đề là phán đoán quan hệ.

Vào thời phục hưng, logic học truyền thống bị chỉ trích mạnh mẽ. Một số nhà tư tưởng tiền bộ của thời kỳ này buộc tội logic là chỗ dựa cho tư tưởng kinh viện. Người

Anh F. Bacon (1561-1626) cho rằng tam đoạn luận của Aristote hoàn toàn vô ích vì nó không cho phép tìm ra các thông tin mới từ các tiền đề đã có. Vậy nên khoa học sử dụng nó không thể phát hiện các qui luật mới thông qua việc nghiên cứu các sự kiện thực nghiệm đã biết. Ông xây dựng nên logic qui nạp mà về sau được một nhà triết học và logic học Anh khác là S.Mill (1806 – 1873) phát triển.

Về phần logic diễn dịch thì mãi đến thế kỷ XVII mới được nhà toán học và triết học người Pháp R.Descartes (1596 – 1650) thanh minh và bảo vệ. Ông muốn xây dựng nó thành phương pháp nhận thức tổng hợp. Công lao rất lớn trong việc phát triển logic diễn dịch vẫn thuộc về nhà toán học và logic học người Đức Leibniz (1646 – 1716). Ông được coi là người đầu tiên đặt nền tảng cho logic kí hiệu. Ông đưa ra tư tưởng sử dụng các kí hiệu và phương pháp toán học vào logic. Ông chỉ ra rằng khi sử dụng các kí hiệu thay cho lời nói, không những chúng ta làm cho tư tưởng được trở nên rõ ràng hơn, chính xác hơn mà còn làm cho tư tưởng trở nên đơn giản hơn. Ông muốn xây dựng logic học thành phép tính (calculus ratorator) – ngôn ngữ nhân tạo tổng quát trong đó các suy luận được hình thức hoá giống như các phép tính được hình thức hoá trong đại số. Tư tưởng của Leibniz về sau được các nhà toán học và logic học J. Boole (1815 – 1864) và De Morgan phát triển, họ đã xây dựng các hệ đại số logic.

Sự phát triển của logic hình thức trong thời hiện đại gắn liền với các tên tuổi của các nhà bác học lớn như G.Frege (1848 – 1925), Peano (1858 – 1932), B.Russel (1872 – 1970),.... Quá trình phát triển của logic học kể từ thời Leibniz và đặc biệt là từ Russel trở về sau liên quan rất chặt chẽ đến toán học. I gày nay, logic hình thức bao gồm nhiều nhánh khác nhau như logic cổ điển, logic tình thái, logic thời gian, logic kiến thiết, logic relevant, logic không đơn điệu, logic mờ,...

4. Ứng dụng của logic học:

Cùng với sự phát triển của khoa học và công nghệ, logic học ngày càng được ứng dụng rộng rãi. Logic giúp giải quyết các vấn đề nan giải của toán học, của điều khiển học, của nhiều vấn đề trong khoa học máy tính...I gười ta sử dụng logic vị từ để làm các ngôn ngữ lập trình cho trí tuệ nhân tạo (ví dụ ngôn ngữ PROLOG); ứng dụng logic mờ (Fuzzy logic) để phát triển công nghệ mờ...

5. Đôi nét về logic mờ

Í gày nay khi nhìn lại lịch sử của logic mờ, người ta nhận thấy người đầu tiên đề cập tới logic mờ chính là Đức Phật (500 năm trước C.I.). Triết lý Phật giáo dựa trên tư tưởng rằng thế giới đầy những mâu thuẫn, "sắc không không sắc", mọi thứ đều chứa một phần đối lập của nó. Bước chân vào mỗi ngôi chùa chúng ta đều thấy ở ngay gian trước là hai vị Thiện — Ác, là hình ảnh hai mặt tốt và xấu trong mỗi con người. Í ới theo lý thuyết logic mờ nghĩa là sự vật có thể đồng thời là A và không-A. Ở đây ta thấy có một mối liên hệ rõ ràng giữa triết lý Phật giáo và logic mờ hiện đại. Thuyết âm dương của người Trung Quốc cũng hàm chứa logic mờ! "Logo" bát quái thể hiện tư tưởng cốt yếu của thuyết: hình tròn thể hiện sự toàn vẹn của sự vật, trời đất; mỗi sự vật hiện tượng đều có hai mặt âm và dương đối lập nhau, cùng tồn tại, mặt này thịnh thì mặt kia suy (phần âm to ra thì phần dương nhỏ đi và ngược lại); dấu trắng trong phần đen và dấu đen trong phần trắng thể hiện trong âm có dương, trong dương có âm; dấu đen trong đầu to của phần trắng thể hiện khi dương cực thịnh thì chính là lúc trong lòng nó xuất hiện âm (và ngược lại).

Sau đức Phật 200 năm, nhà bác học Hy-lạp là Aristote phát triển logic nhị phân. Trái ngược với triết lý nhà Phật, Aristote cho rằng thế giới tạo bởi các đối nghịch, thí dụ nam-nữ, nóng-lạnh, khô-ướt. Mọi thứ hoặc là A hoặc là không-A, không thể cả hai. Logic nhị phân của Aristote trở thành nền tảng cho khoa học, nếu một thứ được chứng minh về mặt logic (nhị phân) thì nó được và vẫn sẽ được khoa học công nhận. Cho tới cuối thế kỷ 19, khi một nhà văn-nhà toán học người Anh, Russel, phát hiện ra một nghịch lý của logic nhị phân . . .

Russel (1872-1970), người khai sinh logic mờ

Bá tước Bertrand Arthur William Russel sinh ra trong một gia đình quý tộc Anh năm 1872. Ông có một cuộc đời dài và đầy biến động. Thời trẻ tuổi, ông nghiên cứu toán học và sau đó, cùng với một nhà toán học khác, viết một cuốn sách về những cơ sở của toán học. Trong sách, họ dành cả một trang chỉ để chứng minh $1 + 1 = 2$. Trong quá trình nghiên cứu, ông đã phát hiện ra một nghịch lý mà ngày nay gọi là nghịch lý tập của Russell :

Trước hết chúng ta phân biệt hai loại tập: tập chứa chính nó và tập không chứa chính nó.

Xét thí dụ: một quả lê thuộc tập các quả lê, nhưng tập các quả lê không thuộc về tập các quả lê do bản thân nó không phải là một quả lê! I ghĩa là tập các quả lê không phải là một thành viên của chính nó.

Bây giờ ta xét một tập khác, tập mọi thứ không phải quả lê, gồm sách, chuột cống, hay cả tổng thống Bush nữa! Do trong tập này bạn tìm thấy mọi thứ không phải quả lê, nên bạn cũng có thể tìm thấy trong đó tập các quả lê và tập mọi thứ không phải quả lê! I ghĩa là tập mọi thứ không phải quả lê là thành viên của chính nó.

Russel đi sâu hơn và xem xét tập của mọi tập mà không chứa chính nó. Trong tập này, bạn sẽ tìm thấy tập các quả lê, tập các tổng thống, và nhiều tập khác nữa. I hưng bạn sẽ không tìm thấy tập mọi thứ không phải quả lê, do tập đó chứa chính nó và do vậy không thoả mãn tiêu chuẩn đặt ra. Trong khi xem xét tập các tập không chứa chính nó này, Russell băn khoăn liệu nó có phải là một thành viên của chính nó?

I ếu nó là một thành viên của chính nó, thì không thoả mãn định nghĩa. Mặt khác, nếu nó không phải là thành viên của chính nó, thì theo định nghĩa về tập đó, thì nó lại thoả mãn và như vậy nó là thành viên của chính nó!

Vì vậy khi tìm ra nghịch lý này, Russell ngẫu nhiên chứng minh rằng logic nhị phân, mà ông nghĩ là cơ sở của toán học, không thể tự chứng minh nó. Tất nhiên ngày nay, chúng ta biết nghịch lý của Russell không phải là một trường hợp không giải được, nếu dùng logic mờ thì ta có câu trả lời ngay. Tuy nhiên, Russell không hề biết gì về logic mờ và đã vô cùng thất vọng với toán học. Ông từ bỏ toán học, những như thế không có nghĩa là ông đã dừng lại việc làm đảo lộn thế giới này. Trong suốt cuộc đời 97 năm, ông luôn truyền bá tư tưởng của mình; ông viết hàng tá sách, sách toán, triết luận, tiểu thuyết, thậm chí cả thứ sách lá cải nữa. Khi mất năm 1970, ông đã không chỉ khởi đầu một trang mới của logic học, mà còn đoạt cả một giải I obel văn học. Ông là một thí dụ điển hình cho thấy những người có tài năng lớn về toán học cũng có thể là những nhà văn lớn.

Zadeh, cha đẻ của logic mờ hiện đại.

I ăm 1964, giáo sư Zadeh bắt đầu suy nghĩ liệu có thứ logic tốt hơn nào dùng trong máy móc. Ông có ý tưởng liệu ta có thể bảo máy điều hoà làm việc nhanh hơn khi trời nóng lên, hay những vấn đề tương tự như thế, sẽ hiệu quả hơn việc đặt ra từng luật cho từng nhiệt

độ. Đây chính là bước đi đầu tiên của logic mờ hiện đại như chúng ta hiểu và ứng dụng ngày nay.

Phải mất một thời gian dài logic mờ mới được chấp nhận, mặc dù ngay từ đầu một số người đã rất quan tâm. Bên cạnh các kỹ sư, những nhà triết học, tâm lý học và xã hội học nhanh chóng áp dụng logic mờ vào ngành khoa học của mình.

Ít năm 1987, Ít hật Bản đã xây dựng hệ thống tàu điện ngầm đầu tiên làm việc với hệ thống điều khiển hoạt động tàu tự động dựa trên logic mờ. Đây là một thành công lớn và dẫn tới sự phát triển bùng nổ của logic mờ. Các trường đại học và các hãng công nghiệp đua nhau phát triển những ý tưởng mới. Đầu tiên là ở Ít hật Bản, do tôn giáo ở Ít hật thừa nhận rằng mọi thứ có thể chứa phần đối lập của chính nó, chứ không coi là một thứ "kinh khủng" như hầu hết những nơi khác trên thế giới. Và logic mờ cũng hứa hẹn đem lại nhiều tiền bạc cho các hãng công nghiệp, tất nhiên là điều này được đón chào.

Logic mờ được công bố lần đầu tiên tại Mỹ vào năm 1965 do giáo sư Lotfi Zadeh. Kể từ đó, logic mờ đã có nhiều phát triển qua các chặng đường sau : phát minh ở Mỹ, áp dụng ở Châu Âu và đưa vào các sản phẩm thương mại ở Ít hật.

Ứng dụng đầu tiên của logic mờ vào công nghiệp được thực hiện ở Châu Âu, khoảng sau năm 1970. Tại trường Queen Mary ở Luân Đôn – Anh, Ebrahim Mamdani dùng logic mờ để điều khiển một máy hơi nước mà trước đây ông ấy không thể điều khiển được bằng các kỹ thuật cổ điển. Và tại Đức, Hans Zimmermann dùng logic mờ cho các hệ ra quyết định. Liên tiếp sau đó, logic mờ được áp dụng vào các lĩnh vực khác như điều khiển lò xi măng, ... nhưng vẫn không được chấp nhận rộng rãi trong công nghiệp.

Kể từ năm 1980, logic mờ đạt được nhiều thành công trong các ứng dụng ra quyết định và phân tích dữ liệu ở Châu Âu. Ít hật kỹ thuật logic mờ cao cấp được nghiên cứu và phát triển trong lĩnh vực này.

Cảm hứng từ những ứng dụng của Châu Âu, các công ty của Ít hật bắt đầu dùng logic mờ vào kỹ thuật điều khiển từ năm 1980. Ít hật hưng do các phần cứng chuẩn tính toán theo giải thuật logic mờ rất kém nên hầu hết các ứng dụng đều dùng các phần cứng chuyên về logic mờ. Một trong những ứng dụng dùng logic mờ đầu tiên tại đây là nhà máy xử lý nước của Fuji Electric vào năm 1983, hệ thống xe điện ngầm của Hitachi vào năm 1987.

I hững thành công đầu tiên đã tạo ra nhiều quan tâm ở I hật. Có nhiều lý do để giải thích tại sao logic mờ được ưa chuộng. Thứ nhất, các kỹ sư I hật thường bắt đầu từ những giải pháp đơn giản, sau đó mới đi sâu vào vấn đề. Phù hợp với việc logic mờ cho phép tạo nhanh các bản mẫu rồi tiến đến việc tối ưu. Thứ hai, các hệ dùng logic mờ đơn giản và dễ hiểu. Sự “thông minh” của hệ không nằm trong các hệ phương trình vi phân hay mã nguồn. Cũng như việc các kỹ sư I hật thường làm việc theo tổ, đòi hỏi phải có một giải pháp để mọi người trong tổ đều hiểu được hành vi của hệ thống, cùng chia sẻ ý tưởng để tạo ra hệ. Logic mờ cung cấp cho họ một phương tiện rất minh bạch để thiết kế hệ thống. Và cũng do nền văn hóa, người I hật không quan tâm đến logic Boolean hay logic mờ; cũng như trong tiếng I hật, từ “mờ” không mang nghĩa tiêu cực.

Do đó, logic mờ được dùng nhiều trong các ứng dụng thuộc lĩnh vực điều khiển thông minh hay xử lý dữ liệu. Máy quay phim và máy chụp hình dùng logic mờ để chứa đựng sự chuyên môn của người nghệ sĩ nhiếp ảnh. Misubishi thông báo về chiếc xe đầu tiên trên thế giới dùng logic mờ trong điều khiển, cũng như nhiều hãng chế tạo xe khác của I hật dùng logic mờ trong một số thành phần. Trong lĩnh vực tự động hóa, Omron Corp. có khoảng 350 bằng phát minh về logic mờ. I goài ra, logic mờ cũng được dùng để tối ưu nhiều quá trình hóa học và sinh học.

I ăm năm trôi qua, các tổ hợp Châu âu nhận ra rằng mình đã mất một kỹ thuật chủ chốt vào tay người I hật và từ đó họ đã nỗ lực hơn trong việc dùng logic mờ vào các ứng dụng của mình. Đến nay, có khoảng 200 sản phẩm bán trên thị trường và vô số ứng dụng trong điều khiển quá trình – tự động hóa dùng logic mờ.

BÀI 2: LOGIC MỆNH ĐỀ

Trong đời sống hàng ngày, người ta cần có những lý luận để từ các điều kiện được biết hay được giả định (các tiền đề - premises) có thể suy ra các kết luận (conclusion) đúng. Hãy xét 2 lý luận sau :

❖ **Lý luận (1)** : Các tiền đề :

+ I ếu hôm nay trời đẹp thì tôi đi chơi.

+ I ếu tôi đi chơi thì hôm nay về trễ .

Giả thiết : Hôm nay trời đẹp .

Kết luận : Hôm nay tôi sẽ về trễ .

❖ **Lý luận (2)** : Các tiền đề :

+ I ếu hôm nay rạp hát không đóng cửa thì tôi sẽ xem phim.

+ I ếu tôi xem phim thì tôi sẽ không soạn kịp bài .

Giả thiết : Hôm nay rạp hát không đóng cửa .

Kết luận : Hôm nay tôi sẽ không soạn kịp bài.

Hai lý luận trên là đúng và có cùng dạng lý luận. Chúng đúng vì có dạng lý luận đúng, bất kể ý nghĩa mà chúng đề cập đến.

Còn lý luận sau :

❖ **Lý luận (3)** : Các tiền đề :

+ I ếu trời đẹp thì tôi đi chơi.

+ I ếu tôi đi chơi thì tôi sẽ về trễ.

Giả thiết : Hôm nay tôi về trễ.

Kết luận : Hôm nay trời đẹp .

Là lý luận sai và mọi lý luận dạng như vậy đều sai .

Logic toán học quan tâm đến việc phân tích các câu (sentences), các mệnh đề (propositions) và chứng minh với sự chú ý đến dạng (form) lược bỏ đi sự việc cụ thể.

1. Định nghĩa :

- Một phán đoán là một suy nghĩ muốn khẳng định hay phủ định một điều gì đó có tính chính đúng hoặc sai mà không thể vừa đúng lại vừa sai.
- Mệnh đề toán học là diễn đạt phán đoán bằng một câu ngữ pháp.
- Mệnh đề đúng có giá trị chân lý là 1, mệnh đề sai có giá trị chân lý là 0.

✚ Ví dụ :

$4+3 > 2$ là một mệnh đề có giá trị chân lý là 1

$3+5 = 7$ là một mệnh đề có giá trị chân lý là 0.

Các phát biểu sau đây không phải là các mệnh đề (toán học) vì tính đúng sai của chúng không xác định:

Ai đang đọc sách? (một câu hỏi)

Cho n là một số nguyên dương.

a là một số chính phương.

2. Phân tích :

Phân tích lý luận (1) ta thấy nó sử dụng các mệnh đề cơ sở sau :

- Hôm nay trời đẹp
- Tôi đi chơi
- Tôi sẽ về trễ.

Mỗi mệnh đề (proposition) là một phát biểu đúng (true) hay sai (false).

Biểu thị tượng trưng lần lượt các mệnh đề trên bởi các tên A, B, C , ta ghi lại dạng lý luận của (1) như sau :

I ếu A thì B (4)

I ếu B thì C

Có A kết luận được : C

Đây cũng là dạng lý luận của (2) .

- ❖ Thường một phát biểu sẽ gồm nhiều phát biểu nhỏ nối kết với nhau bằng các liên
- ❖ từ "và" , "hay" , "vì vậy" , "kết quả là" ...
- ❖ Một mệnh đề đơn (simple proposition) là mệnh đề không chứa mệnh đề khác.

- ❖ Một mệnh đề phức (compound proposition) là mệnh đề được tạo thành từ hai hay nhiều mệnh đề đơn. Việc nối kết này được thực hiện bởi các liên từ logic.

✚ **Ví dụ :** Xét các mệnh đề sau đây.

$p = "15 \text{ chia hết cho } 3"$.

$q = "2 \text{ là một số nguyên tố và là một số lẻ}"$.

Ta có p là một mệnh đề sơ cấp. I hưng q là một mệnh đề phức hợp, vì mệnh đề q được tạo thành từ hai mệnh đề "2 là một số nguyên tố" và "2 là một số lẻ" nhờ vào liên kết logic "và".

3. Các phép toán logic cơ bản :

Các phép toán logic được định nghĩa bằng **bảng chân trị** (truth table). Bảng chân trị chỉ ra rõ ràng chân trị của mệnh đề phức hợp theo từng trường hợp của các chân trị của các mệnh đề sơ cấp tạo thành mệnh đề phức hợp. Bảng chân trị của các phép toán logic tất nhiên là phản ánh ngữ nghĩa tự nhiên của các từ liên kết tương ứng. Về mặt tự nhiên của ngôn ngữ, trong nhiều trường hợp cùng một từ nhưng có thể có nghĩa khác nhau trong những ngữ cảnh khác nhau. Do đó, bảng chân trị không thể diễn đạt mọi nghĩa có thể có của từ tương ứng với ký hiệu phép toán. Điều này cho thấy rằng đại số logic là rõ ràng hoàn chỉnh theo nghĩa là nó cho ta một hệ thống logic đáng tin cậy. Đại số logic còn đặc biệt quan trọng trong việc thiết kế mạch cho máy tính.

Bảng chân trị không chỉ dùng để kê ra sự liên hệ chân trị giữa mệnh đề phức hợp với chân trị của các mệnh đề sơ cấp cấu thành nó, mà bảng chân trị còn được dùng với mục đích rộng hơn: liệt kê sự liên hệ chân trị giữa các mệnh đề với các mệnh đề đơn giản hơn cấu thành chúng.

Phép phủ định: $\neg$ (không)	Độ ưu tiên của các toán tử logic.
Phép hội: $\wedge$ (và)	$\neg$
Phép tuyển: $\vee$ (hay)	$\wedge, \vee$
Phép kéo theo: $\rightarrow$ (kéo theo)	$\rightarrow, \leftrightarrow$
Phép kéo theo 2 chiều: $\leftrightarrow$ (tương đương)	Các toán tử cùng dòng có cùng độ ưu tiên.

✚ **Ví dụ :** $\neg p \vee q$ có nghĩa là $((\neg p) \vee q)$.

$\neg p \vee q \rightarrow r \wedge s$ có nghĩa là $((\neg p) \vee q) \rightarrow (r \wedge s)$.

$\neg p \vee q \wedge r$ là không rõ ràng cần phải dùng các dấu ngoặc để chỉ rõ nghĩa.

Xét hai mệnh đề x và y , khi đó ta có:

Bảng chân trị của các phép toán mệnh đề

<u>Mệnh đề p</u>	<u>Phủ định p</u>	<u>Mệnh đề p</u>	<u>Phép tuyển</u>	<u>Phép hội</u>	<u>Kéo theo</u>	<u>Tương đương</u>
x	$\neg x$	y	$x \vee y$	$x \wedge y$	$x \rightarrow y$	$x \leftrightarrow y$
1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1	1

! ngoài ra ta còn có thêm một phép toán logic khác là “phép tuyển chọn” ứng với 2 mệnh đề sơ cấp p và q khác với phép tuyển đã cho ở trên được viết là $p + q$, hay $p \oplus q$ hay có thể biểu diễn như sau:

Bảng chân trị

x	y	$x \underline{\vee} y$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

4. Công thức trong đại số logic :

4.1/ Công thức :

Từ các biến mệnh đề sơ cấp, nhờ các phép toán logic cơ bản, ta lập được các mệnh đề phức hợp, chúng được gọi là các công thức . Ta thường ký hiệu công thức bởi các chữ $F, G, H, R, \dots$

⊕ Ví dụ :

$$F = ((x \wedge y) \rightarrow z)$$

$$G = (x \rightarrow (y \rightarrow z))$$

$$R = (x \wedge y) \vee z$$

4.2/ Công thức tương đương :

Hai công thức F và G gọi là tương đương logic nếu chúng nhận cùng giá trị chân lý với mọi giá trị của các biến mệnh đề sơ cấp. Ký hiệu $F = G$

✦ Ví dụ :

$$F = (x \wedge y) \rightarrow z$$

$$G = (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \quad (\text{chứng minh như bài tập})$$

thì $F = G$

❖ Các luật về phép phủ định:

$$\neg \neg p \Leftrightarrow p \quad (\text{luật phủ định của phủ định})$$

$$\neg 1 \Leftrightarrow 0$$

$$\neg 0 \Leftrightarrow 1$$

❖ Luật giao hoán

$$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$$

$$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$$

❖ Luật kết hợp

$$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$$

$$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$$

❖ Luật phân bố

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

❖ Luật De Morgan

$$\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

$$\neg (p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

❖ Luật về phần tử bù

$$p \vee \neg p \Leftrightarrow 1$$

$$p \wedge \neg p \Leftrightarrow 0$$

❖ Luật kéo theo

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$$

❖ Luật tương đương

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

❖ Các luật đơn giản của phép tuyển

- ◆ $p \vee p \Leftrightarrow p$ (tính lũy đẳng của phép tuyển)
- ◆ $p \vee 1 \Leftrightarrow 1$ (luật này còn được gọi là luật thống trị)
- ◆ $p \vee 0 \Leftrightarrow p$ (luật này còn được gọi là luật trung hòa)
- ◆ $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ (luật này còn được gọi là luật hấp thụ)

❖ Các luật đơn giản của phép hội

- ◆ $p \wedge p \Leftrightarrow p$ (tính lũy đẳng của phép hội)
- ◆ $p \wedge 1 \Leftrightarrow p$ (luật này còn được gọi là luật trung hòa)
- ◆ $p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$ (luật này còn được gọi là luật thống trị)
- ◆ $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ (luật này còn được gọi là luật hấp thụ)

Một số luật trong các luật trình bày ở trên có thể được suy ra từ các luật khác. Các công thức tương đương logic khác:

$$\begin{aligned} x \oplus y &= (\neg x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y) \\ x \oplus y &= y \oplus x \\ (x \oplus y) \oplus z &= x \oplus (y \oplus z) \\ x(y \oplus z) &= xy \oplus xz \\ \neg x \oplus 1 &= x \\ x \oplus 1 &= \neg x \\ x \oplus x &= 0 \end{aligned}$$

4.3/ Các qui tắc thay thế:

Dưới đây là các qui tắc để cho ta có thể suy ra những biểu thức logic mới hay tìm ra các biểu thức logic tương đương với một biểu thức logic cho trước.

⊕ Qui tắc 1:

Trong một biểu thức logic E , nếu ta thay thế một biểu thức con bởi một biểu thức logic tương đương với biểu thức con đó thì ta sẽ được một biểu thức mới E' tương đương với biểu thức E .

✚ **Ví dụ :** Cho biểu thức logic $E = q \vee \neg p$. Thay thế q trong biểu thức E bởi biểu thức $\neg \neg q$ (tương đương với q) ta được một biểu thức mới $E' = \neg \neg q \vee \neg p$. Theo qui tắc thay thế 1 ta có:

$$q \vee \neg p \Leftrightarrow \neg \neg q \vee \neg p$$

✚ **Qui tắc 2:**

Giả sử biểu thức logic E là một hằng đúng. Nếu ta thay thế một biến mệnh đề p bởi một biểu thức logic tùy ý thì ta sẽ được một biểu thức logic mới E' cũng là một hằng đúng.

✚ **Ví dụ :** Ta có biểu thức $E(p,q) = (p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$ là một hằng đúng. Thay thế biến q trong biểu thức E bởi biểu thức $q \wedge r$ ta được biểu thức logic mới:

$$E'(p,q,r) = (p \rightarrow (q \wedge r)) \Leftrightarrow (\neg p \vee (q \wedge r))$$

Theo qui tắc thay thế 2 ta có biểu thức $E'(p,q,r)$ cũng là một hằng đúng.

✚ **Ví dụ áp dụng:**

- **Ví dụ 1:** Chứng minh rằng

$$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p).$$

Chứng minh :

$$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q \text{ (luật kéo theo)}$$

$$\Leftrightarrow q \vee \neg p \text{ (luật giao hoán)}$$

$$\Leftrightarrow \neg q \vee \neg p \text{ (luật phủ định)}$$

$$\Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p \text{ (luật kéo theo)}$$

- **Ví dụ 2:** Chứng minh rằng biểu thức sau là một hằng đúng.

$$((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$$

Chứng minh.

$$((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$$

$$\Leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge p) \vee q \text{ (luật kéo theo)}$$

$$\Leftrightarrow (\neg(p \rightarrow q) \vee \neg p) \vee q \text{ (luật De Morgan)}$$

$$\Leftrightarrow \neg(p \rightarrow q) \vee (\neg p \vee q) \text{ (luật kết hợp)}$$

$$\Leftrightarrow \neg(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow q) \text{ (luật kéo theo)}$$

$$\Leftrightarrow 1 \text{ (luật về phần tử bù)}$$

Vậy biểu thức $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$ là hằng đúng.

- **Ví dụ 3:** Chứng minh rằng biểu thức sau là một hằng đúng.

$$p \wedge q \rightarrow p$$

Chứng minh.

$$p \wedge q \rightarrow p \Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee p \text{ (luật kéo theo)}$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee p \text{ (luật De Morgan)}$$

$$\Leftrightarrow (\neg q \vee \neg p) \vee p \text{ (luật giao hoán)}$$

$$\Leftrightarrow \neg q \vee (\neg p \vee p) \text{ (luật kết hợp)}$$

$$\Leftrightarrow \neg q \vee 1 \text{ (luật về phần tử bù)}$$

$$\Leftrightarrow 1 \text{ (luật đơn giản)}$$

Vậy mệnh đề $p \wedge q \rightarrow p$ là hằng đúng.

- **Ví dụ 4:** Chứng minh rằng biểu thức sau là một hằng đúng.

$$p \rightarrow p \vee q$$

Chứng minh.

$$p \rightarrow p \vee q \Leftrightarrow \neg p \vee (p \vee q) \text{ (luật kéo theo)}$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee p) \vee q \text{ (luật kết hợp)}$$

$$\Leftrightarrow 1 \vee q \text{ (luật về phần tử bù)}$$

$\Leftrightarrow 1$ (luật đơn giản)

Vậy mệnh đề $p \rightarrow p \vee q$ là hằng đúng.

✚ **Nhận xét:** Các ví dụ trên cho ta thấy một quan hệ khác giữa các mệnh đề phức hợp hay các mệnh đề : quan hệ "**suy ra**". Khi mệnh đề $p \rightarrow q$ là hằng đúng, ta nói rằng p suy ra q (về mặt logic). Chúng ta sẽ dùng ký hiệu $\Rightarrow$ để chỉ quan hệ "suy ra". Quan hệ suy ra này có tính truyền (hay bắc cầu), nhưng không có tính chất đối xứng.

5. Hệ quả logic và tương đương logic:

Điều kiện công thức $x \rightarrow y = 1$ thì mệnh đề y được gọi là hệ quả logic của x .

Điều kiện x là hệ quả logic của y và y là hệ quả logic của x thì x và y là tương đương logic.

Ví dụ: Điều kiện $F_1 = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z)$

$$G_1 = (x \rightarrow z)$$

$$F_2 = (x \rightarrow z) \wedge (y \rightarrow z)$$

$$G_2 = (x \vee y) \rightarrow z$$

Khi đó G_1 là hệ quả logic của F_1 , G_2 và F_2 là tương đương logic

6. Công thức đối ngẫu

Các phép toán logic hội và tuyển được gọi là hai phép toán đối ngẫu của nhau.

Hai công thức F và G được gọi là đối ngẫu của nhau nếu công thức này suy ra từ công thức kia bằng cách thay mọi phép toán tuyển và hội bằng các phép toán đối ngẫu của nó. Ký hiệu công thức đối ngẫu của công thức F là F^*

Ví dụ: Điều kiện $F = (x_1 \vee \overline{x_2}) \wedge x_3$ thì $F^* = (x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee x_3$

7. Tính đầy đủ của một hệ các phép toán

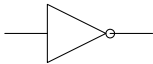
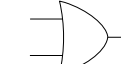
Một hệ thống Σ bao gồm các phép toán logic được gọi là một hệ đầy đủ nếu mọi công thức logic đều có thể biểu diễn chỉ gồm các biến mệnh đề với chỉ các phép toán logic trong hệ.

Các hệ sau là thể hiện tính đầy đủ của các phép toán:

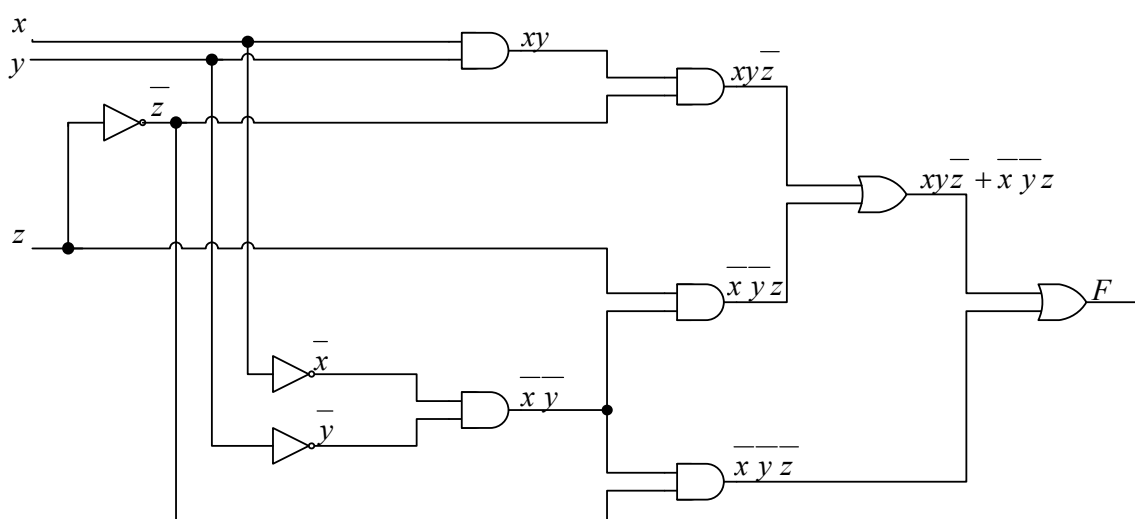
$$\Sigma_0 = \{\wedge, \vee, \neg\}, \Sigma_1 = \{\wedge, \neg\}, \Sigma_2 = \{\vee, \neg\}, \Sigma_3 = \{\wedge, \oplus, \neg\}$$

7. Ứng dụng logic mệnh đề để vẽ mạch điện tử

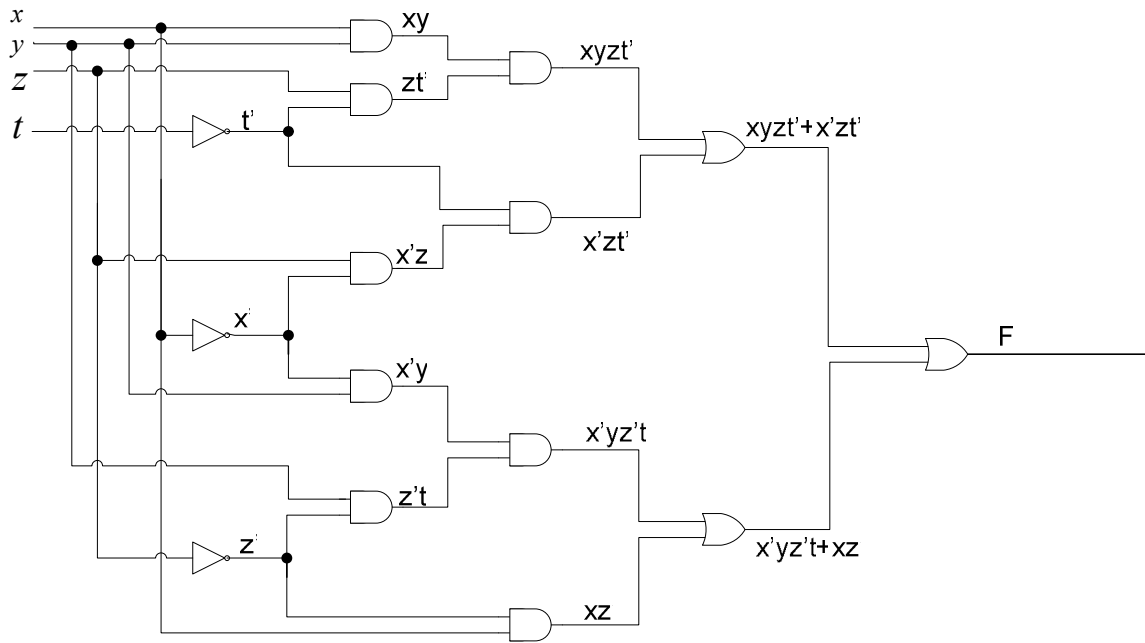
Ta có các cổng cơ bản sau để thiết kế mạch:

	Cổng inverter thể hiện phép toán phủ định 1 biến ngõ nhập
	Cổng AND thể hiện phép toán hội giữa các biến ngõ nhập.
	Cổng OR thể hiện phép toán tuyển giữa các biến ngõ nhập
	Cổng XOR thể hiện cho phép toán tuyển chọn.

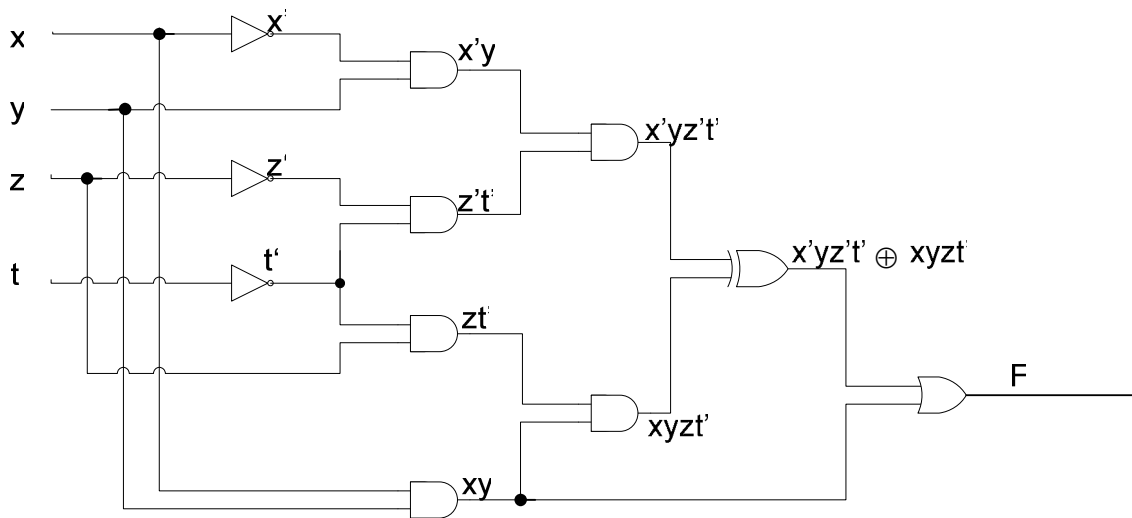
$$F = xyz + \overline{x} \overline{y} z + x \overline{y} \overline{z}$$



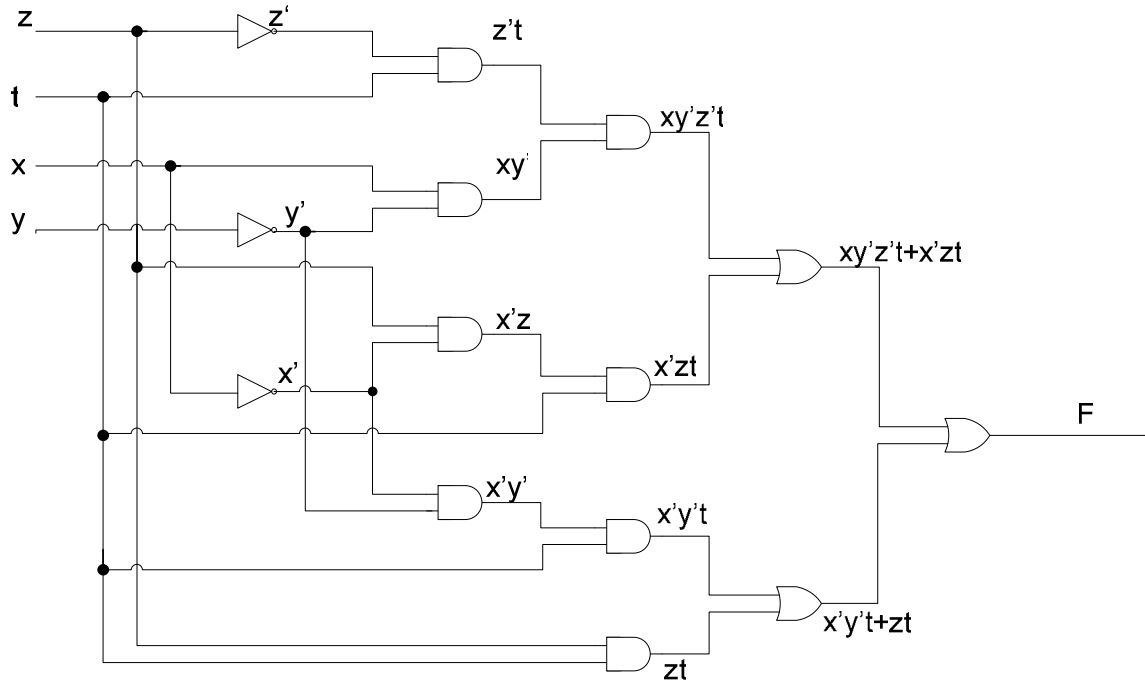
$$F = xyz + \overline{x} \overline{y} z + x \overline{y} \overline{z}$$



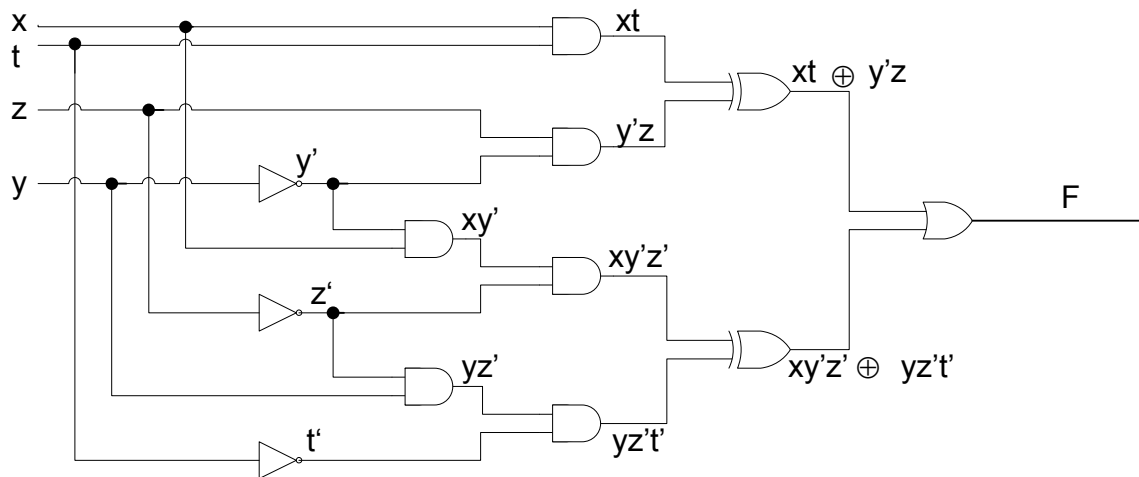
$$F = xy + x'yzt' \oplus xyz't'$$



$$F = x'zt + xy'z't + x'y't + zt$$



$$F = (xt \oplus y'z) + (xy'z' \oplus yz't')$$



BÀI TẬP

1. Cho biết những khẳng định nào dưới đây là mệnh đề:
 - a. 2 là một số nguyên dương.
 - b. $2k - 1$ là một chẵn.
 - c. Trời lạnh quá!