

CHƯƠNG 2. LOGIC VỊ TỪ

§1. HÀM PHÁN ĐOÁN. PHÁN ĐOÁN PHỔ BIẾN. PHÁN ĐOÁN TỒN TẠI.

1.1. Hàm phán đoán.

1.1.1. Một số ví dụ mở đầu.

Gọi $S=N$ là tập hợp các số tự nhiên, gọi n là một số nào đó thuộc tập $S=N$. Xét câu: n là số nguyên tố.

Ta ký hiệu câu này là $P(n)$. $P(n)$ không phải là một phán đoán, vì chúng ta không biết được tính đúng hay sai của câu đó.

Nếu ta thay $n=5$, thì ta được $P(5) = "5 \text{ là số nguyên tố}"$. Đây là một phán đoán đúng.

Nếu ta thay $n=4$, thì ta được $P(4) = "4 \text{ là số nguyên tố}"$. Đây là một phán đoán sai.

Gọi S là tập hợp những người Việt Nam, và gọi x là một người Việt Nam nào đó. Xét câu: x là nhà thơ.

Cũng như trên ta ký hiệu câu này là $P(x)$. $P(x)$ không phải là một phán đoán.

Nếu ta thay x bởi Ông Nguyễn Du, thì ta được $P(\text{Nguyễn Du}) = " \text{Nguyễn Du là nhà thơ}"$. Đây là một phán đoán đúng.

Nếu ta thay x bởi Bà Phùng Há, thì ta được $P(\text{Phùng Há}) = " \text{Phùng Há là nhà thơ}"$. Đây là một phán đoán sai, vì Bà Phùng Há là một nghệ sĩ cải lương.

Qua một số ví dụ ở trên, ta thấy trong thực tế có những câu mà tính đúng hay sai của câu ta chỉ xác định được trong các trường hợp cụ thể.

1.1.2. Biến, Hằng của tập hợp.

Khi chúng ta xét một tập hợp S nào đó, chẳng hạn tập hợp các số tự nhiên, tập hợp những người da vàng, tập hợp những người làm nghề dạy học.... Khi

ta gọi chung chung một phần tử nào đó của S , phần tử đó sẽ hiểu là một *biến*. Nếu gọi cụ thể một phần tử của S thì phần tử đó được hiểu là một *hằng*.

Ví dụ:

Gọi S là tập hợp những nhà thơ (người làm thơ) của Việt Nam.

Xét một người nào đó thuộc S , thì “*người nào đó*” là một biến. Thông thường chúng ta hay ký hiệu bằng chữ $x, y, z, \dots$

Ông Xuân Diệu là một người nằm trong tập S . Ông Xuân Diệu là một hằng.

Nếu x là phần tử của S , chúng ta ký hiệu $x \in S$. Nếu x không là phần tử của S , chúng ta ký hiệu $x \notin S$. Vậy Ông Xuân Diệu $\in S$, còn như Bà Phùng Há thì không thuộc S . Bà Phùng Há $\notin S$.

1.1.3. Thế nào là một hàm phán đoán?

Ta gọi một hàm phán đoán xác định trên tập S là một câu có chứa biến, và câu này trở thành phán đoán khi ta thay biến đó bởi một hằng cụ thể trong S .

Ký hiệu hàm phán đoán là $P(x)$, $x \in S$.

Hai ví dụ nêu trên mục 1.1.1. đều là hàm phán đoán.

1.2. Phán đoán phổ biến.

Cho hàm phán đoán $P(x)$, $x \in S$. Ta lập phán đoán sau đây: “*Với mọi x thuộc S , $P(x)$* ” (Hay $P(x)$ đúng với mọi x thuộc S). Phán đoán này gọi là phán đoán *phổ biến*.

Ký hiệu: $\forall x \in S, P(x)$.

Ví dụ:

Xét lại hàm phán đoán ở trên: S là tập hợp những người Việt Nam, và $P(x) = x \text{ là nhà thơ}$. Phán đoán phổ biến được thành lập từ hàm phán đoán này là: “*Với mọi x thuộc tập S những người Việt Nam, x là nhà thơ*” (Mọi người Việt Nam đều là nhà thơ).

Đã gọi là phán đoán, thì câu này phải nói lên được tính đúng; sai của một thực tế mà nó phản ánh. Chúng ta thấy ngay rằng câu trên là sai, tức là phán đoán sai.

Xét hàm phán đoán $x^2 + 1 > 0, x \in R$ (R là tập số thực). Phán đoán phổ biến được thành lập từ hàm phán đoán này là: “Với mọi số thực $x, x^2 + 1 > 0$ ” = “ $\forall x \in R, x^2 + 1 > 0$ ”. Đây là một phán đoán đúng.

1.3. Phán đoán tồn tại.

Cho hàm phán đoán $P(x), x \in S$. Ta lập phán đoán sau đây: “Tồn tại x thuộc $S, P(x)$ ” (Hay $P(x)$ đúng với một x nào đó thuộc S). Phán đoán này gọi là phán đoán tồn tại.

Ký hiệu: $\exists x \in S, P(x)$.

Ví dụ:

Xét lại hàm phán đoán ở trên: S là tập hợp những người Việt Nam, và $P(x) = x$ là nhà thơ. Phán đoán tồn tại được thành lập từ hàm phán đoán này là: “Tồn tại x thuộc tập S những người Việt Nam, x là nhà thơ” (Tồn tại người Việt Nam là nhà thơ).

Đây là phán đoán đúng.

Xét hàm phán đoán $x^2 - 1 = 0, x \in R$ (R là tập số thực). Phán đoán tồn tại được thành lập từ hàm phán đoán này là: “Tồn tại số thực $x, x^2 - 1 = 0$ ” = “ $\exists x \in R, x^2 - 1 = 0$ ”. Đây là một phán đoán đúng.

1.4. Phủ định của các phán đoán phổ biến, phán đoán tồn tại.

Xét phán đoán phổ biến “Mọi người Việt Nam đều là nhà thơ”. Phủ định của phán đoán này là phán đoán: “Không phải mọi người Việt Nam đều là nhà thơ”. Điều này có nghĩa là: “Có người Việt Nam không là nhà thơ” = “Tồn tại người Việt Nam không là nhà thơ”.

Xét phán đoán phổ biến “Với mọi số thực $x, x^2 \geq 0$ ”. Phủ định của phán đoán này là phán đoán: “Không phải mọi số thực $x, x^2 \geq 0$ ”. Điều này có nghĩa là: “Có số thực $x, mà $x^2 < 0$ ”. Phán đoán “Có số thực $x, mà $x^2 < 0$ ” viết dưới dạng công thức: $\exists x \in R, x^2 < 0$.$$

Ta có công thức tổng quát sau:

$$\sim (\forall x, P(x)) = \exists x, \sim P(x)$$

$$\sim (\exists x, P(x)) = \forall x, \sim P(x)$$

Ví dụ: Phủ định của phán đoán “Có người Việt Nam đã được giải Nobel Văn học” là phán đoán: “Mọi người Việt Nam đều chưa được giải Nobel Văn học”.

“Không phải mọi số tự nhiên n , $3n+1$ đều là số lẻ”. Điều này có nghĩa là “Tồn tại số tự nhiên n , $3n+1$ là số chẵn”.

1.5. Bảng ghi nhớ phán đoán phổ biến và phán đoán tồn tại.

Phán đoán	Khi nào đúng	Khi nào sai
$\forall x \in S, P(x)$	$P(x)$ đúng với mọi x thuộc S	$P(x)$ sai với một x nào đó thuộc S
$\exists x \in S, P(x)$	$P(x)$ đúng với một x nào đó thuộc S	$P(x)$ sai với mọi x thuộc S
$\exists x, \sim P(x)$	Phán đoán $\forall x \in S, P(x)$ là sai	Phán đoán $\forall x \in S, P(x)$ là đúng
$\forall x, \sim P(x)$	Phán đoán $\exists x \in S, P(x)$ là sai	Phán đoán $\exists x \in S, P(x)$ là đúng

1.6. Nhận xét.

Nếu tập S là hữu hạn, (có thể liệt kê được) thì phán đoán $\forall x \in S, P(x)$ chính là phán đoán hội $P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \dots \wedge P(x_n)$, trong đó $x_1, x_2, \dots, x_n \in S$.

$\exists x \in S, P(x)$ chính là phán đoán tuyển $P(x_1) \vee P(x_2) \vee \dots \vee P(x_n)$, trong đó $x_1, x_2, \dots, x_n \in S$.

Do đó mà các công thức nêu ở mục 1.4. cũng gọi là công thức De Morgan mở rộng.

1.7. Hàm phán đoán nhiều biến.

Ở các phần trên chúng ta đã biết về hàm phán đoán, đó chính là hàm phán đoán một biến. Nhiều vấn đề không thể dùng hàm phán đoán một biến được. Chúng ta hãy xét một vài ví dụ.

“Số thực x lớn hơn số thực y ”. Rõ ràng đây là một câu mà chúng ta chưa thấy được tính đúng sai của nó. Nếu thay $x=7$, và $y=5$ ta được một phán đoán đúng. Nếu thay $x=7$, và $y=15$ ta được một phán đoán sai.

“Ông x là ba (cha) của ông y ”. Cũng như trên ta thấy đây không phải là phán đoán. Nhưng nếu thay $x = \text{Nguyễn Phi Khanh}$, và $y = \text{Nguyễn Trãi}$ ta được một phán đoán đúng. Còn nếu thay $x = \text{Nguyễn Phi Khanh}$, và $y = \text{Trần Nguyễn Đán}$ ta được một phán đoán sai.

Ta gọi một hàm phán đoán hai (hoặc ba) biến là một câu có chứa hai (hoặc ba) biến, và câu này sẽ trở thành một phán đoán khi ta thay các biến này bởi các hằng trong những tập hợp xác định.

Ký hiệu hàm phán đoán hai biến $P(x, y)$, $x \in S$; $y \in T$.

Tương tự cho trường hợp nhiều biến hơn.

Ví dụ: Ký hiệu S là tập hợp những người đàn ông; T là tập hợp những người đàn bà. Xét $P(x, y)$ là câu “ x là chồng của y ”. $P(x, y)$ là một hàm phán đoán. Thay $x = \text{Lưu Quang Vũ}$, và $y = \text{Xuân Quỳnh}$ ta được một phán đoán đúng.

Xét $S=T=R$ (tập hợp số thực). $Q(x, y) = “x > y”$. Ta có $Q(4, 3)$ là phán đoán đúng, và $Q(3, 4)$ là phán đoán sai.

1.8. Các loại phán đoán phổ biến và phán đoán tồn tại ở dạng mở rộng.

Cho hàm phán đoán hai biến $P(x, y)$, $x \in S$; $y \in T$.

Phán đoán “Với mọi x thuộc S , với mọi y thuộc T , $P(x, y)$ là đúng” được gọi là phán đoán phổ biến toàn phần.

Ký hiệu của phán đoán phổ biến toàn phần là $\forall x \in S \forall y \in T, P(x, y)$.

Phán đoán “Với mọi x thuộc S , tồn tại y thuộc T , $P(x, y)$ là đúng” được gọi là phán đoán phổ biến bán phần trước.

Ký hiệu của phán đoán phổ biến bán phần trước là $\forall x \in S \exists y \in T, P(x, y)$.

Phán đoán “Tồn tại x thuộc S , với mọi y thuộc T , $P(x, y)$ là đúng” được gọi là phán đoán phổ biến bán phần sau.

Ký hiệu của phán đoán phổ biến *bán phần sau* là $\exists x \in S \forall y \in T, P(x, y)$.

Phán đoán “*Tồn tại x thuộc S, tồn tại y thuộc T, P(x,y) là đúng*” được gọi là phán đoán tồn tại *tòan phần*.

Ký hiệu của phán đoán tồn tại *tòan phần* là $\exists x \in S \exists y \in T, P(x, y)$.

Ví dụ: Cho S là tập hợp các bạn sinh viên lớp TH4 của Khoa CNTT, và T là tập hợp tất cả các môn học của Khoa CNTT, còn P(x,y) là câu: “x sẽ học môn y”.

Khi đó câu: “*Mọi sinh viên của lớp TH4 sẽ học tất cả các môn học của Khoa CNTT*” có thể viết dưới dạng công thức: $\forall x \in S \forall y \in T, P(x, y)$.

Công thức $\exists x \in S \forall y \in T, P(x, y)$ là ký hiệu của câu: “*Có một (hoặc những) sinh viên của lớp TH4 sẽ học tất cả các môn học của Khoa CNTT*”.

S là tập hợp mọi chìa khóa, T là tập hợp mọi cái ổ khóa, Q(x,y) là câu “*Chìa khóa x mở được ổ khóa y*”.

Khi đó công thức $\exists x \in S \forall y \in T, P(x, y)$ chính là câu “*Chìa khóa vạn năng*”. Đây là một phán đoán sai.

Công thức $\exists x \in S \exists y \in T, P(x, y)$ chính là câu “*Có một chìa khóa mở được một ổ khóa nào đó*”.

Cho $S=T=R$, P(x,y) là câu “ $x + y = y + x$ ”. Khi đó câu “*Phép cộng hai số thực có tính chất giao hoán*” (câu này đúng) có thể diễn tả dưới dạng công thức: $\forall x \in S \forall y \in T, P(x, y)$.

Cho $S=T$ là tập hợp tất cả mọi người trên thế giới, P(x,y) là câu “*x đổi áo cho y*”. Ta có: $P(x,y) = P(y,x)$ (Câu ca dao: *yêu nhau đôi áo cho nhau thỏa đáng* thức này).

1.9. Phủ định của phán đoán phổ biến và phán đoán tồn tại ở dạng mở rộng.

Trở lại phán đoán “*Mọi sinh viên của lớp TH4 sẽ học tất cả các môn học của Khoa CNTT*”. Phủ định của phán đoán này là phán đoán “*Không phải mọi*

sinh viên của lớp TH4, sẽ học tất cả các môn học của Khoa CNTT". Điều này cũng có nghĩa là : "Có ít nhất một sinh viên, và một môn học mà sinh viên đó không học môn này". Với ký hiệu như trên, câu này có thể diễn tả bằng công thức: $\exists x \in S \exists y \in T, \sim P(x, y)$.

Ta có các công thức tổng quát sau:

$$\begin{aligned}\sim (\forall x \in S \forall y \in T, P(x, y)) &= \exists x \exists y, \sim P(x, y) \\ \sim (\forall x \in S \exists y \in T, P(x, y)) &= \exists x \forall y, \sim P(x, y) \\ \sim (\exists x \in S \forall y \in T, P(x, y)) &= \forall x \exists y, \sim P(x, y) \\ \sim (\exists x \in S \exists y \in T, P(x, y)) &= \forall x \forall y, \sim P(x, y).\end{aligned}$$

1.10. Một vài ví dụ: (Tham khảo phần Logic trong sách Toán rời rạc, của KENNET H. ROSEN)

Cho $S=T$ là tập hợp những người trên thế giới, và $L(x,y)$ là câu "x yêu y".

Khi đó câu "Mọi người đều yêu Lan" có thể diễn tả bằng công thức: $\forall x \in S, L(x, Lan)$.

Câu "Mọi người đều yêu một người nào đó" có thể diễn tả bằng công thức: $\forall x \in S \exists y \in S, L(x, y)$.

Câu "Mọi người đều yêu duy nhất một người nào đó" có thể diễn tả bằng công thức: $\forall x \in S \exists y \in S, (L(x, y) \wedge (\forall z \neq y \sim L(x, z)))$.

Câu "Không có ai yêu tất cả mọi người" có thể diễn tả bằng công thức: $\forall x \in S \exists y \in S, \sim L(x, y)$. Thật vậy, câu "Không có ai yêu tất cả mọi người" có nghĩa là: "Không thể có người yêu tất cả mọi người". Mà "có người yêu tất cả mọi người" chính là công thức $\exists x \in S \forall y \in S, L(x, y)$. Do đó "Không thể có người yêu tất cả mọi người" chính là công thức $\sim (\exists x \in S \forall y \in S, L(x, y))$ hay $\forall x \in S \exists y \in S, \sim L(x, y)$.

Câu "Mọi người đều yêu chính mình" có thể diễn tả bằng công thức: $\forall x \in S, L(x, x)$.

Câu "Có một người nào đó không yêu ai ngoài chính mình" có thể diễn tả bằng công thức $\exists x \in S \forall y \in S, (L(x, y) \Rightarrow x = y)$.

Bây giờ vận dụng các công thức ở mục 1.9 và định nghĩa giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ chúng ta sẽ chứng tỏ: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq a$ là tương đương với $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x (0 < |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon)$. Thật vậy, định nghĩa $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ được diễn tả bằng lượng từ logic: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq a$ chính là dạng phủ định: (lưu ý: định nghĩa là hai chiều) $\sim [\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)]$. Ta áp dụng từng bước các công thức ở mục 1.9.

$$\begin{aligned}
 & \sim [\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)] \\
 &= \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \sim [\forall x (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)] \quad (1.9) \\
 &= \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \sim (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon) \quad (1.4) \\
 &= \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \sim (\sim (0 < |x - x_0| < \delta) \vee |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon) \quad (\text{Ch 1}) \\
 &= \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x ((0 < |x - x_0| < \delta) \wedge \sim (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)) \quad (\text{Công thức De Morgan}) \\
 &= \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x ((0 < |x - x_0| < \delta) \wedge (|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon)).
 \end{aligned}$$

1.11. Bảng ghi nhớ phán đoán phổ biến và phán đoán tồn tại ở dạng mở rộng.

Phán đoán	Khi nào đúng	Khi nào sai
$\forall x \in S \forall y \in T, P(x, y)$	$P(x, y)$ đúng với mọi cặp (x, y)	$P(x, y)$ sai với một cặp (x, y) nào đó
$\forall x \in S \exists y \in T, P(x, y)$	Với mọi x , có một y sao cho $P(x, y)$ đúng	Có một x sao cho với mọi y $P(x, y)$ là sai.
$\exists x \in S \forall y \in T, P(x, y)$	Có một x sao cho với mọi y $P(x, y)$ đúng	Với mọi x , có một y sao cho $P(x, y)$ là sai.
$\exists x \in S \exists y \in T, P(x, y)$	$P(x, y)$ đúng với một cặp (x, y)	$P(x, y)$ sai với mọi cặp (x, y)

§2. PHÁN ĐOÁN KHẲNG ĐỊNH CHUNG. PHÁN ĐOÁN KHẲNG ĐỊNH RIÊNG. PHÁN ĐOÁN PHỦ ĐỊNH CHUNG. PHÁN ĐOÁN PHỦ ĐỊNH RIÊNG.

Các loại phán đoán phổ biến, tồn tại mà chúng ta trình bày ở §1, Chương 2 là tương đối đầy đủ cho phần Logic vị từ. Tuy nhiên theo Logic truyền thống của Aristote các loại phán đoán ở trên cũng được trình bày dưới một dạng khác.

Trở lại một ví dụ ở trên: “Với mọi x thuộc tập S những người Việt Nam, x là nhà thơ”. Phán đoán này có thể diễn đạt: “Mọi người Việt Nam đều là nhà thơ”.

Ta gọi S là tập hợp những người Việt Nam, và M là tập hợp những nhà thơ (có thể hiểu tất cả những nhà thơ trên thế giới). Khi đó phán đoán “Mọi người Việt Nam đều là nhà thơ” có thể phát biểu dạng công thức:

$$\text{Mọi } S \text{ đều là } M$$

Đổi chỗ S và M ta được phán đoán “Mọi M đều là S ”. Và ta được phán đoán “Mọi nhà thơ đều là người Việt Nam”

2.1. Phán đoán khẳng định chung.

Cho S và M là hai tập hợp tùy ý. Phán đoán “Mọi S đều là M ” được gọi là phán đoán khẳng định chung.

Ký hiệu của phán đoán “Mọi S đều là M ” là $SaM = \forall S, M$ hay A .

Hoặc có thể ký hiệu: $\forall x \in S, x \in M$.

Điều này cũng có nghĩa là tập hợp S là một tập con của tập M .

Ví dụ:

S là tập hợp những con sư tử, M là tập hợp những con vật có bốn chân. Khi đó $A = SaM$ là phán đoán: “Mọi con sư tử đều là con vật có bốn chân”. Trong khi đó MaS là phán đoán: “Mọi con vật bốn chân đều là sư tử”(!).

2.2. Phán đoán khẳng định riêng.

Cho S và M là hai tập hợp tùy ý. Phán đoán “Có S là M ” được gọi là phán đoán khẳng định riêng.

Ký hiệu của phán đoán “*Có S là M*” là $SiM = \exists S, M$ hay I.

Có S là M, nghĩa là có phần tử của S là phần tử của M, điều này cũng có nghĩa tập S và tập M có giao khác rỗng. Do đó $SiM = \exists S, M$ cũng có thể ký hiệu theo cách của tập hợp:

$$\exists x \in S, x \in M.$$

Ví dụ:

S là tập hợp những con sư tử, M là tập hợp những con vật có bốn chân. Khi đó $I=SiM$ là phán đoán: “*Có con sư tử là con vật có bốn chân*”. Trong khi đó MiS là phán đoán: “*Có con vật bốn chân là sư tử*”. Lúc này cả hai phán đoán đều chấp nhận được.

2.3. Phán đoán phủ định chung.

Cho S và M là hai tập hợp tùy ý. Phán đoán “*Mọi S đều không là M*” được gọi là phán đoán phủ định chung.

Ký hiệu của phán đoán “*Mọi S đều không là M*” là $SeM = \forall S, \sim M$ hay E.

Mọi S không là M, nghĩa là mọi phần tử của S không là phần tử của M, điều này cũng có nghĩa tập S và tập M có giao bằng rỗng. Do đó $SeM = \forall S, \sim M$ cũng có thể ký hiệu theo cách của tập hợp:

$$\forall x \in S, x \notin M.$$

Ví dụ:

S là tập hợp những con sư tử, M là tập hợp những con vật có bốn chân. Khi đó $E=SeM$ là phán đoán: “*Mọi con sư tử đều không phải là con vật có bốn chân*”. Trong khi đó MeS là phán đoán: “*Mọi con vật bốn chân đều không phải là sư tử*”. Lúc này cả hai phán đoán đều sai.

S là tập hợp những con sư tử, M là tập hợp những con vật biết bay. Khi đó $E=SeM$ là phán đoán: “*Mọi con sư tử đều không phải là con vật biết bay*”. Trong khi đó MeS là phán đoán: “*Mọi con vật biết bay đều không phải là sư tử*”. Lúc này cả hai phán đoán đều đúng.