

CHƯƠNG 6

UỐN PHẪNG NHỮNG THANH THẲNG

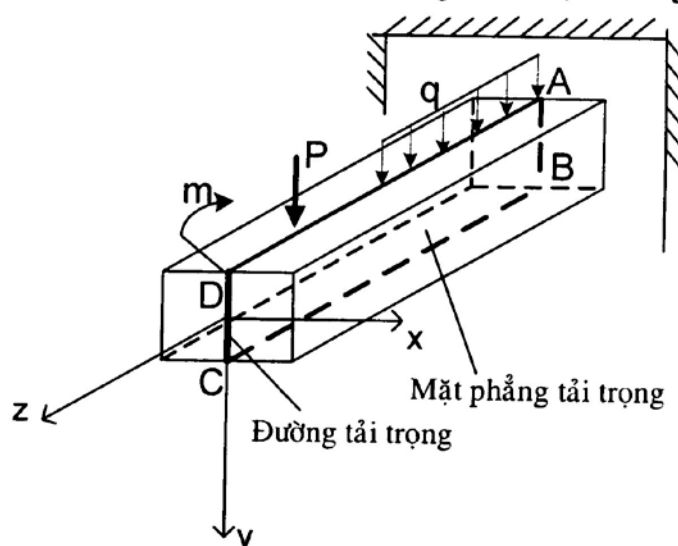
6.1. Định nghĩa và phân loại:

6.1.1. Định nghĩa:

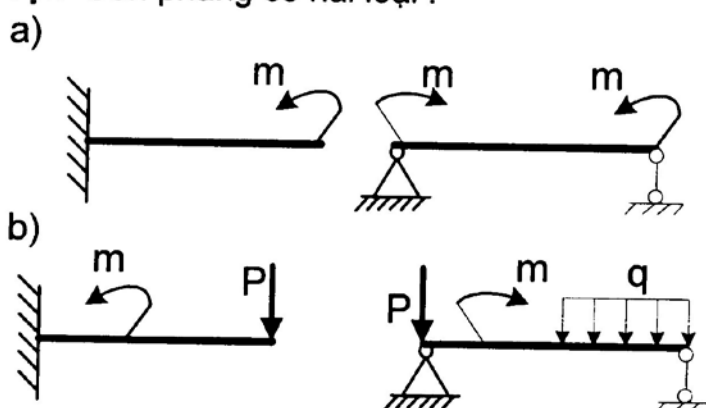
Thanh chịu uốn phẳng khi :

- * Ngoại lực tác dụng có thể là lực tập trung, lực phân bố hoặc mômen tập trung. Mặt phẳng chứa các lực hoặc mômen đó gọi là mặt phẳng tải trọng (mặt phẳng ABCD).
- * Giao tuyến giữa mặt phẳng tải trọng và mặt cắt ngang của thanh là đường tải trọng (đường CD).
- * Thanh chủ yếu chịu uốn được gọi là dầm.
- * Trục của dầm sau khi bị uốn cong vẫn nằm trong một mặt phẳng quán tính chính trung tâm. Mặt phẳng tải trọng trùng với mặt phẳng đối xứng của dầm, tức đường tải trọng trùng với trục đối xứng của mặt cắt ngang.

Hình 6-1



6.1.2. Phân loại: Uốn phẳng có hai loại :



Hình 6-2

* Uốn phẳng thuần túy : ngoại lực là các mômen uốn hình 6-2a.

* Uốn ngang phẳng : ngoại lực là các mômen uốn và các lực hình 6-2b.

6.2. Nội lực và biểu đồ nội lực :

6.2.1. Nội lực :

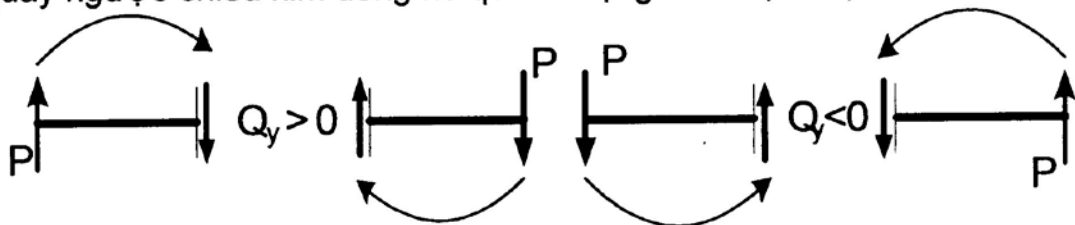
Nội lực của dầm uốn phẳng gồm lực cắt Q và mômen uốn M

- Mặt phẳng tải trọng là mặt phẳng thẳng đứng thì lực cắt là Q_y và mômen uốn M_x .
- Mặt phẳng tải trọng là mặt phẳng nằm ngang thì lực cắt là Q_x và mômen uốn M_y .

a) Lực cắt Q :

Quy ước dấu :

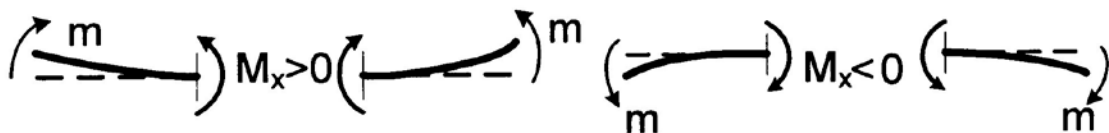
Lực cắt Q có dấu + nếu ngoại lực có khuynh hướng làm cho phần dầm đang xét quay cùng chiều kim đồng hồ quanh trọng tâm mặt cắt; lực cắt Q có dấu - nếu ngoại lực có khuynh hướng làm cho phần dầm đang xét quay ngược chiều kim đồng hồ quanh trọng tâm mặt cắt, hình 6-3.



Hình 6-3

b) Mômen uốn M :

Quy ước dấu : mômen uốn được coi là dương nếu nó làm cho thớ dưới trục dầm bị kéo, tức làm căng các thớ về phía dương của trục y ; mômen uốn được coi là âm nếu nó làm cho thớ dưới trục dầm bị nén, hình 6-4.



Hình 6-4

6.2.2. Biểu đồ nội lực :

Là đồ thị biểu diễn sự biến thiên của lực cắt và mômen uốn dọc theo trục của dầm.

Vẽ biểu đồ nội lực theo các bước sau:

- Xác định phản lực liên kết. Nếu dầm có liên kết ngàm một đầu còn đầu kia tự do thì không cần tìm phản lực liên kết tại ngàm mà chỉ cần cắt từ đầu tự do cắt vào và xét cân bằng phần không có ngàm.
- Chia dầm thành nhiều đoạn, sao cho trên mỗi đoạn nội lực biến thiên liên tục, tức là không có sự thay đổi đột ngột. Muốn vậy cần lấy điểm đặt các lực tập trung, ngẫu lực, điểm đầu và cuối các tải trọng phân bố làm

ranh giới phân chia các đoạn.

- Viết biểu thức xác định lực cắt Q_y và mômen uốn M_x cho từng đoạn, xác định trị số Q_y và M_x tại đầu và cuối đoạn.

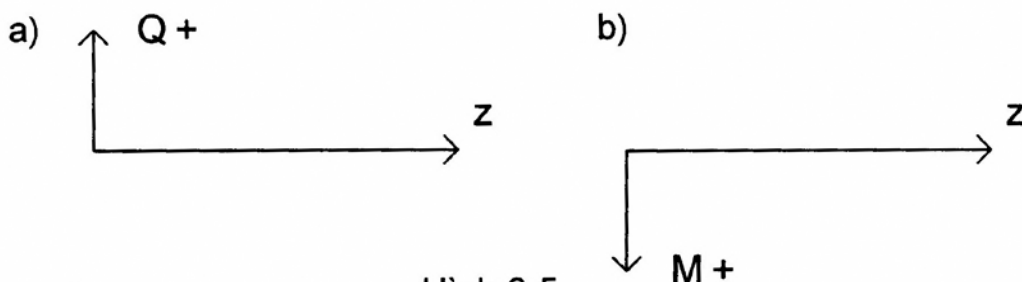
- Vẽ đồ thị Q và M cho từng đoạn, biểu đồ Q vẽ trên biểu đồ M .

- Lấy trục z song song với trục thanh làm chuẩn.

- **Quy ước vẽ đồ thị :**

+ Biểu đồ lực cắt hệ trục chọn theo hình 6-5a, chiều dương hướng lên trên, tức là các giá trị Q dương đặt ở phía trên trục z và ngược lại các giá trị Q âm đặt ở phía dưới trục z .

+ Biểu đồ mômen uốn hệ trục chọn theo hình 6-5b, trục M có chiều dương hướng xuống dưới, tức là các giá trị M dương đặt ở phía dưới trục z nói cách khác biểu đồ M được vẽ trên các thớ bị căng của trục.



Hình 6-5

Ví dụ 6-1:

Vẽ biểu đồ nội lực cho dầm có sơ đồ chịu lực (Hình 6-6)

Giải:

1- Phản lực liên kết tại 2 gối A, B:

$$\sum m_A = P \cdot 1 - q \cdot 4 \cdot 1 - m + Y_B \cdot 4 = 0 \quad (1)$$

$$\sum m_B = P \cdot 5 - Y_A \cdot 4 + q \cdot 4 \cdot 3 - m = 0 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow Y_A = 6\text{N}; Y_B = 4\text{N}.$$

2- Phân đoạn dầm, viết biểu thức nội lực

trong từng đoạn dầm, vẽ biểu đồ nội lực (Hình 6-7)

+ Đoạn CA :

Mặt cắt 1-1 (xét cân bằng phần trái)

$$0 \leq z_1 \leq 1\text{m}$$

$$Q_y = -P - q \cdot z_1 = -2 - 2z_1$$

$$\text{Mặt cắt C } (z_1 = 0) : Q_y = -2\text{N}$$

$$\text{Mặt cắt A } (z_1 = 1\text{m}) : Q_y = -4\text{N}$$

$$M_x = -P \cdot z_1 - q \cdot z_1 \frac{z_1}{2} = -2z_1 - \frac{z_1^2}{2}$$

Ở đây M_x là hàm bậc 2 của z nên biểu đồ M_x là đường parabol bậc 2, do tải phân bố q hướng xuống nên bề lõm parabol hướng lên. Để vẽ biểu đồ cần phải tính mômen uốn ở hai mặt cắt đầu và cuối đoạn.

$$\text{Mặt cắt C } (z_1 = 0) : M_x = 0$$

$$\text{Mặt cắt A } (z_1 = 1\text{m}) : M_x = -3\text{ Nm}$$

+Đoạn AD :

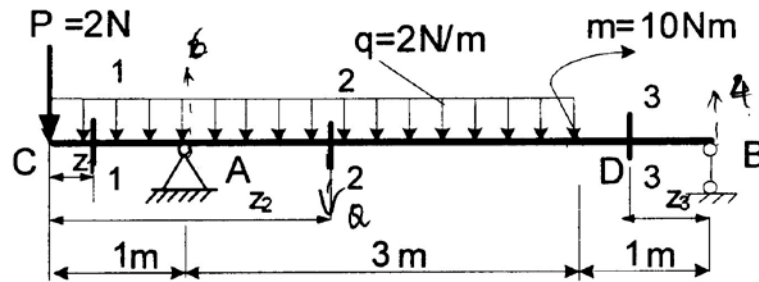
Mặt cắt 2-2 (xét cân bằng phần trái) : $1\text{m} \leq z_2 \leq 4\text{m}$

$$Q_y = -P - q \cdot z_2 + Y_A = 4 - 2z_2$$

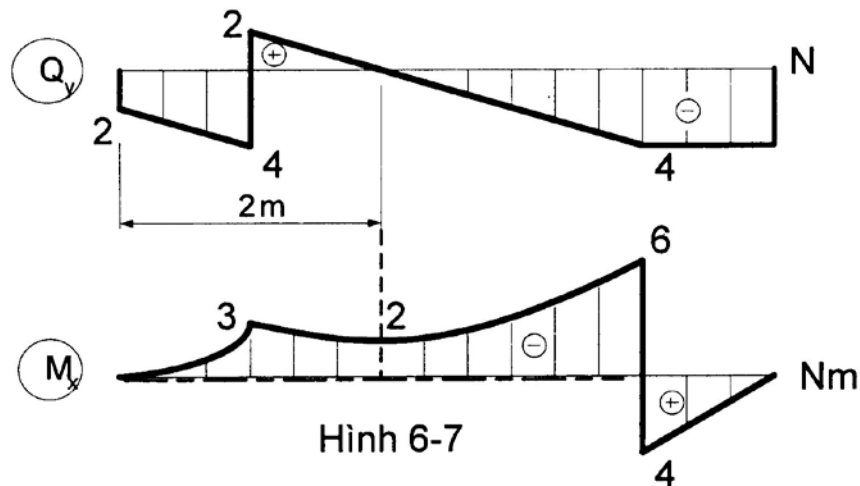
Mặt cắt A ($z_2 = 1\text{m}$) : $Q_y = 2\text{ N}$.

Mặt cắt D ($z_2 = 4\text{m}$) : $Q_y = 4\text{ N}$

$$M_x = -P \cdot z_2 - q \cdot z_2 \frac{z_2}{2} + Y_A (z_2 - 1) = -z_2^2 + 4z_2 - 6$$



Hình 6-6



Hình 6-7

Ở đây M_x cũng là hàm bậc 2 của z nên biểu đồ M_x là đường parabol bậc 2, do tải phân bố q hướng xuống nên bề lõm parabol cũng hướng lên.

Nhưng biểu đồ Q_y trong đoạn này cắt đường chuẩn, vì vậy để vẽ biểu đồ chính xác thì ngoài việc tính mômen uốn ở hai mặt cắt đầu và cuối đoạn ta cần phải tìm trị số mômen uốn cực trị trong đoạn này bằng cách cho biểu thức $Q_y = 0$ để tìm tọa độ mặt cắt sau đó thế tọa độ mặt cắt này vào biểu thức M_x chúng ta sẽ có $M_{x\text{CD}}$.

Mặt cắt A ($z_2 = 1\text{m}$) : $M_x = -3\text{ Nm}$

Mặt cắt D ($z_2 = 4\text{m}$) : $M_x = -6\text{ Nm}$

Tại mặt cắt có : $Q_y = 4 - 2z_2 = 0 \Rightarrow z_2 = 2\text{m}$

$M_{x\text{CD}} (z_2 = 2\text{m}) = -2\text{ Nm}$

+Đoạn BD :

Mặt cắt 3-3 (xét cân bằng phần phải) : $0 \leq z_3 \leq 1\text{m}$

$$Q_y = -Y_B = -4\text{N}$$

$$M_x = Y_B \cdot z_3 = 4 \cdot z_3$$

Mặt cắt B ($z_3 = 0$) : $M_x = 0$.

Mặt cắt D ($z_3 = 1\text{m}$) : $M_x = 4\text{Nm}$

Căn cứ vào các số liệu đã tính cho từng đoạn ta vẽ được biểu đồ lực cắt Q_y và mômen uốn M_x (Hình 6-7)

Nhận xét :

1/ Tại mặt cắt ngang có lực tập trung thì biểu đồ Q có bước nhảy đúng bằng trị số của lực tập trung. Nếu đi từ trái sang phải thì hướng nhảy trùng với hướng của lực tập trung, còn biểu đồ M thì gãy khúc.

2/ Tại mặt cắt ngang có mômen tập trung thì biểu đồ Q không có gì thay đổi, biểu đồ M có bước nhảy đúng bằng trị số của mômen tập trung. Đi từ trái sang phải nếu mômen tập trung quay thuận chiều kim đồng hồ thì bước nhảy hướng xuống, mômen tập trung quay ngược chiều kim đồng hồ thì bước nhảy hướng lên.

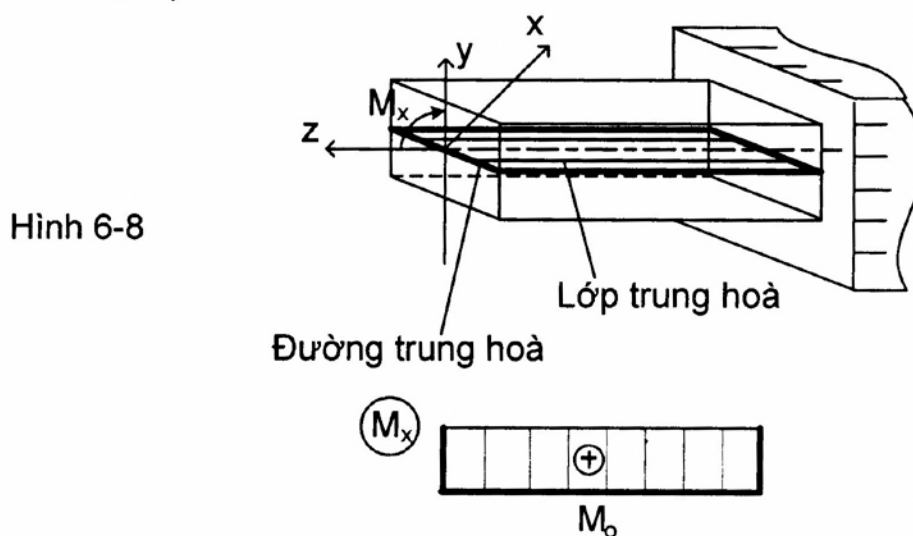
3/ Trên đoạn dầm không có lực phân bố đều, biểu đồ Q song song với đường chuẩn, biểu đồ M là đường thẳng xiên. Biểu đồ Q trùng với đường chuẩn thì biểu đồ M song song với đường chuẩn.

4/ Trên đoạn dầm có lực phân bố đều, biểu đồ Q là đường thẳng xiên, nếu đi từ trái sang phải thì hướng xiên trùng với hướng của tải phân bố. Ở đoạn này biểu đồ M là đường Parabol bậc 2, nếu q hướng xuống thì bề lõm của Parabol hướng lên và ngược lại. Tại mặt cắt có $Q = 0$ và đổi dấu thì M cực đại.

6.3. Dầm chịu uốn thuần túy phẳng:

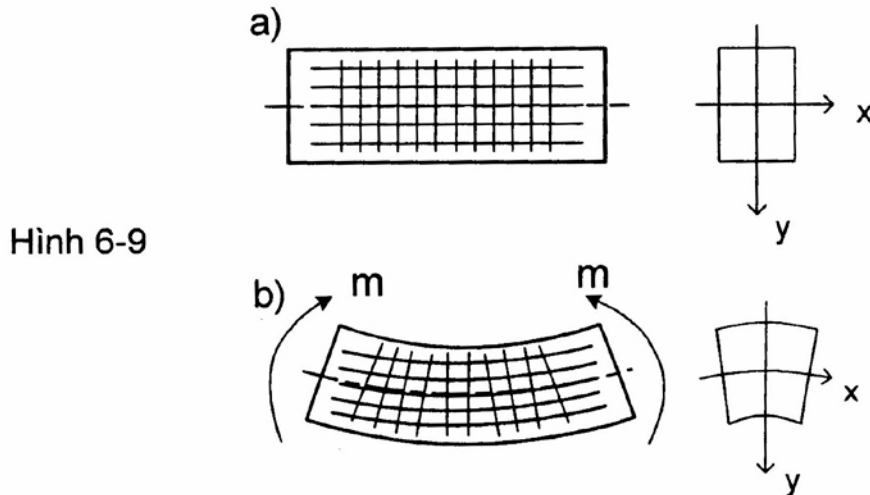
6.3.1. Định nghĩa:

Một dầm chịu uốn thuần túy phẳng khi trên mặt cắt ngang chỉ có một thành phần nội lực là mômen uốn nằm trong mặt phẳng quán tính chính trung tâm (M_x ; M_y), hình 6-8.



6.3.2. Ứng suất trên mặt cắt ngang:

a) Quan sát mẫu thí nghiệm (Hình 6-9):



Hình 6-9

Dầm chịu uốn thuần túy phẳng có mặt cắt ngang hình chữ nhật. Trước khi dầm chịu uốn, ta vạch lên mặt bên những đường thẳng song song với trục tượng trưng cho các thớ dọc và những đường thẳng vuông góc với trục biểu thị các mặt cắt ngang. Sau khi dầm chịu uốn ta nhận thấy :

- + Trục của dầm bị cong.
- + Các vạch song song với trục bị cong nhưng vẫn song song với trục.
- + Các vạch vuông góc với trục vẫn thẳng và vuông góc với trục dầm đã bị uốn cong.
- + Các góc vuông tại giao điểm các vạch dọc và ngang vẫn được duy trì là vuông.

b) Các giả thuyết :

Từ những nhận xét trên ta đưa ra hai giả thuyết để làm cơ sở tính toán:

- Giả thuyết mặt cắt ngang phẳng và giả thuyết về các thớ dọc như chương kéo – nén đúng tâm.
- Các thớ dọc không tách ra cũng không ép nhau. Các thớ ở phần lõm co lại, các thớ ở phần lồi dãn ra.

Phân cách các thớ co và thớ dãn là lớp trung hòa. Giao tuyến của lớp trung hòa với mặt cắt ngang gọi là đường trung hòa, đường trung hòa đi qua trọng tâm của mặt cắt ngang.

Từ các giả thuyết trên, xét một phân tố hình vuông sau biến dạng các góc vẫn giữ vuông. Vậy phân tố không có biến dạng trượt mà chỉ có biến dạng dọc, nghĩa là trên mặt cắt ngang chỉ phát sinh ứng suất pháp σ .

c) Công thức tính ứng suất pháp trên mặt cắt ngang

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} \times y \quad (6-1)$$

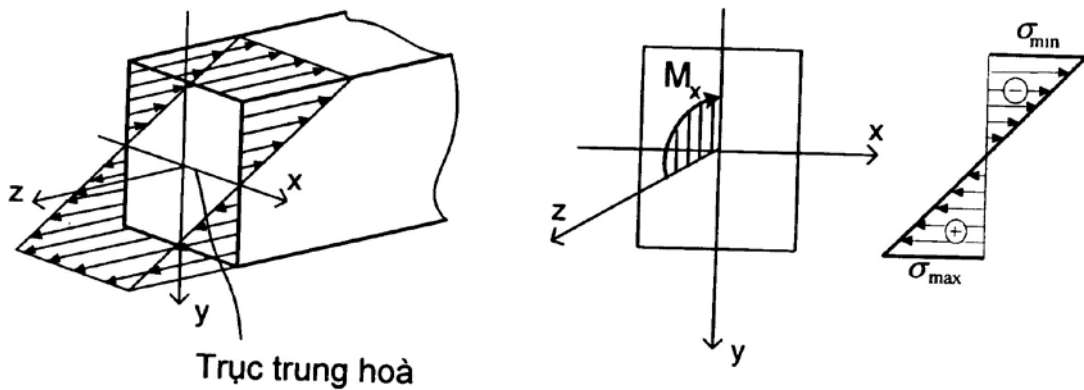
Trong đó: M_x – là trị số đại số của mômen uốn tại mặt cắt ngang chứa điểm cần tính ứng suất

J_x : mômen quán tính của mặt cắt ngang đối với trục trung hòa x.

y : khoảng cách từ điểm tính ứng suất đến trục trung hòa.

Như vậy $\sigma_z > 0$ nếu điểm nằm ở vùng chịu kéo của mặt cắt; $\sigma_z < 0$ nếu điểm nằm ở vùng chịu nén của mặt cắt. Biểu thức (6-1) cho chúng ta thấy tại mặt cắt ngang nhất định thì M_x và J_x không đổi, do đó σ_z tỷ lệ bậc nhất với y .

Tại đường trung hoà ($y = 0$) thì $\sigma_z = 0$, càng xa đường trung hoà (y tăng dần) thì σ_z lớn dần theo quy luật đường thẳng và tại các thớ biên σ_z lớn nhất. Ở hai phía của đường trung hoà σ_z trái dấu nhau (Hình 6-10), đây chính là biểu đồ phân bố ứng suất pháp trên mặt cắt ngang.



Hình 6-10

• **Ứng suất kéo lớn nhất :**

$$\sigma_{zmax} = \frac{M_x}{J_x} \times y_{max}^k = \frac{M_x}{W_x^k} \quad (6-2)$$

$$W_x^k = \frac{J_x}{y_{max}^k}$$

Trong đó y_{max}^k là toạ độ của điểm biên chịu kéo có trị số lớn nhất.

W_x : môđun chống uốn của mặt cắt ngang đối với trục x, phụ thuộc vào hình dáng và kích thước của mặt cắt ngang. Thứ nguyên: (chiều dài)³.

• **Ứng suất nén lớn nhất :**

$$\sigma_{zmin} = \frac{M_x}{J_x} \times y_{max}^n = \frac{M_x}{W_x^n} \quad (6-3)$$

$$W_x^n = \frac{J_x}{y_{max}^n}$$

Trong đó y_{max}^n là toạ độ của điểm biên chịu nén có trị số lớn nhất.

Nhận xét: Nếu trục trung hòa là một trục đối xứng (mặt cắt hình chữ nhật, tròn, chữ I...) thì: $\sigma_{z\max} = \sigma_{z\min}$

- Môđun chống uốn của các mặt cắt ngang thường gặp:

+ Mặt cắt ngang hình chữ nhật (Hình 6-11):

$$J_x = \frac{bh^3}{12} ; \quad W_x = \frac{bh^2}{6}$$

$$J_y = \frac{hb^3}{12} ; \quad W_y = \frac{hb^2}{6}$$

+ Mặt cắt ngang hình tròn, đường kính D (Hình 6-12)

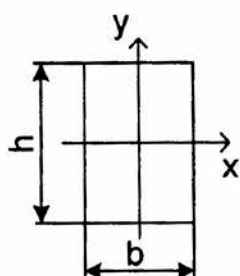
$$J_x = J_y = \frac{\pi D^4}{64} \approx 0,05D^4 ; \quad W_x = W_y = \frac{\pi D^3}{32} \approx 0,1D^3$$

+ Mặt cắt hình vành khăn (Hình 6-13):

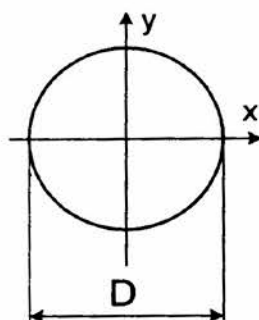
Đường kính ngoài D, đường kính trong d. Tỷ số: $\alpha = \frac{d}{D}$

$$J_x = J_y = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4) \approx 0,05D^4(1 - \alpha^4)$$

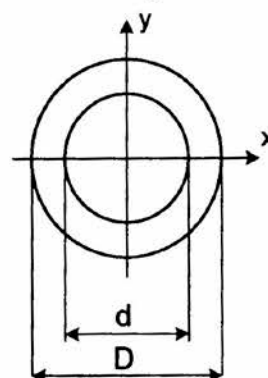
$$W_x = W_y = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4) \approx 0,1D^3(1 - \alpha^4)$$



Hình 6-11



Hình 6-12



Hình 6-13

6.3.3. Điều kiện bền :

Trạng thái ứng suất tại điểm nguy hiểm là trạng thái ứng suất đơn :

- Vật liệu dẻo :

$$|\sigma_z|_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma] \quad (6-4)$$

$$\bullet \text{ Vật liệu giòn : } \sigma_{z\max} = \frac{M_x}{W_x^k} \leq [\sigma]_k \quad (6-5)$$

$$\sigma_{zmin} = \frac{M_x}{W_x^n} \leq [\sigma]_n \quad (6-6)$$

Vị trí mặt cắt ngang có $|\sigma_z|_{max}$:

+ Nếu dầm có mặt cắt ngang không thay đổi và vật liệu dẻo thì lấy mặt cắt ngang có M lớn nhất.

+ Nếu dầm có mặt cắt ngang thay đổi và vật liệu dẻo thì tìm mặt cắt có $|\sigma_z|_{max}$.

+ Nếu dầm làm bằng vật liệu giòn thì phải thỏa cả hai biểu thức kéo (6-5) và nén (6-6).

Từ điều kiện bền, chúng ta suy được hình dáng hợp lý khi dầm chịu uốn thuần túy phẳng như sau :

• Dầm làm bằng vật liệu dẻo $[\sigma]_k = [\sigma]_n = [\sigma]$, chọn mặt cắt ngang có trục trung hòa cũng là trục đối xứng.

• Dầm làm bằng vật liệu giòn : $[\sigma]_k < [\sigma]_n$ nên $y_{max}^k < y_{max}^n$; suy ra hình dáng hợp lý của mặt cắt ngang là mặt cắt không đối xứng qua trục trung hòa và phải bố trí sao cho thỏa mãn điều kiện trên.

6.3.4. Ba bài toán cơ bản :

a) Kiểm tra bền:

Theo công thức (6-4), (6-5), và (6-6) .

b) Chọn kích thước mặt cắt ngang

$$W_x \geq \frac{M_x}{[\sigma]}$$

c) Tìm tải trọng cho phép :

$$M_{xmax} \leq W_x \cdot [\sigma]$$

Ví dụ 6-2:

Trên mặt cắt ngang của dầm chữ T (Hình 6-14) chịu mômen uốn $M_x = 7200 \text{ Nm}$, vật liệu của dầm có $[\sigma]_k = 20 \text{ MN/m}^2$, $[\sigma]_n = 30 \text{ MN/m}^2$. Kiểm tra bền cho dầm biết rằng $J_x = 5312,5 \text{ cm}^4$.

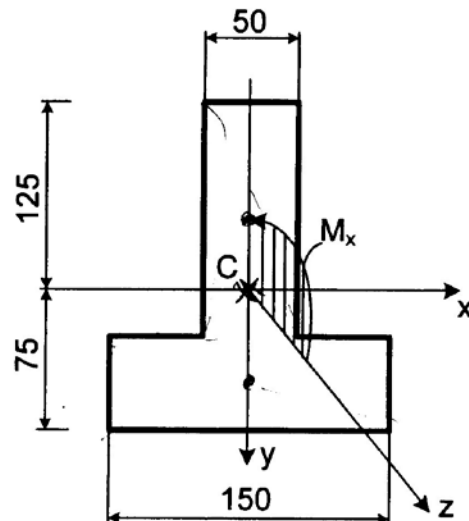
Giải:

Chúng ta có:

$$y_{max}^k = 75 \text{ mm} = 7,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$y_{max}^n = 125 \text{ mm} = 12,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$W_x^k = \frac{J_x}{y_{max}^k} = \frac{5312,5 \cdot 10^{-8}}{7,5 \cdot 10^{-2}} = 708,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$



Hình 6-14

$$W_x^n = \frac{J_x}{y_{\max}^n} = \frac{5312,5 \cdot 10^{-8}}{12,5 \cdot 10^{-2}} = 425 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

Do đó

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x^k} = \frac{7200}{708,3 \cdot 10^{-6}} = 10,17 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$$

$$= 10,17 \text{ MN/m}^2 < [\sigma]_k = 20 \text{ MN/m}^2$$

$$\sigma_{\min} = \frac{M_x}{W_x^n} = \frac{7200}{425 \cdot 10^{-6}} = 16,95 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$$

$$= 16,95 \text{ MN/m}^2 < [\sigma]_k = 30 \text{ MN/m}^2$$

Vậy dầm thỏa bền.

6.4. Dầm chịu uốn ngang phẳng :

6.4.1. Định nghĩa:

Dầm chịu uốn ngang phẳng khi trên mặt cắt ngang của nó có 2 thành phần nội lực là lực cắt Q và mômen uốn M . Các thành phần nội lực này đều nằm trong mặt phẳng đối xứng của mặt cắt ngang (Hình 6-1).

Mômen uốn M sinh ra ứng suất pháp, ứng suất này xét ở phần uốn thuần túy phẳng. Còn lực cắt Q sinh ra ứng suất tiếp τ , ứng suất tiếp phân bố trên mặt cắt ngang song song cùng chiều với lực cắt Q .

6.4.2. Ứng suất pháp trên mặt cắt ngang :

Giống như uốn thuần túy phẳng

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} \times y \quad (6-7)$$

6.4.3. Ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang :

Ứng suất tiếp của điểm bất kỳ trên mặt cắt ngang của dầm được tính theo công thức sau:

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} = \frac{Q_y \cdot S_x^c}{J_x \cdot b^c} \quad (6-8)$$

Q_y : lực cắt tại mặt cắt đang xét.

S_x : mômen tĩnh đối với trục x của phần diện tích mặt cắt ngang bị cắt bởi mặt phẳng song song với trục x , vuông góc với Q_y và đi qua điểm C cần tính ứng suất.

J_x : mômen quán tính chính trung tâm đối với trục x .

b^c : bề rộng mặt cắt ngang bị cắt.

Mặt cắt ngang hình chữ nhật:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{F} \quad (6-9)$$

Mặt cắt ngang hình tròn:

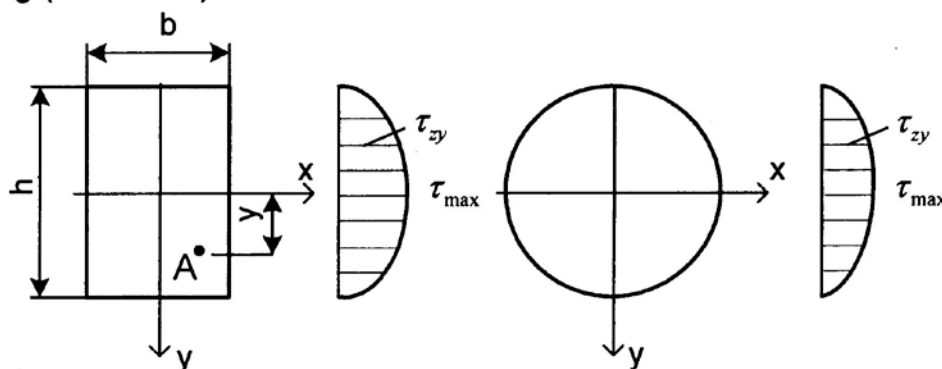
$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{Q_y}{F} \quad (6-10)$$

Trong đó F là tiết diện mặt cắt ngang:

$$\text{hình chữ nhật: } F = b \cdot h; \text{ hình tròn } F = \frac{\pi D^2}{4}$$

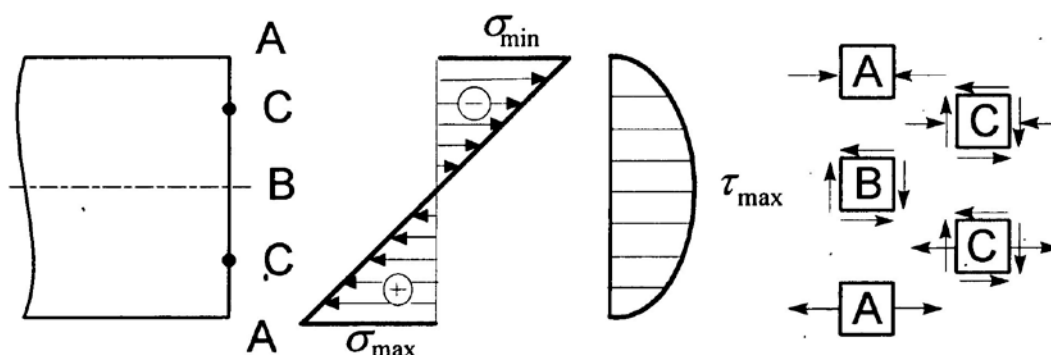
Theo công thức (6-8) chúng ta thấy những điểm nằm trên cùng một đường song song với trục trung hoà ứng suất tiếp có trị số bằng nhau. Vì vậy khi xét sự phân bố của ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang chúng ta chỉ cần xét sự phân bố của ứng suất tiếp trên một đường nằm trong mặt cắt và vuông góc với trục trung hoà.

Biểu đồ phân bố ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang hình chữ nhật và hình tròn là những parabol bậc hai, những điểm nằm trên trục trung hoà ($y = 0$) có ứng suất tiếp lớn nhất, những điểm nằm trên mép mặt cắt hình chữ nhật ($y = \frac{h}{2}$) và hình tròn ($y = \frac{D}{2}$) có ứng suất tiếp bằng không (Hình 6-15):



Hình 6-15

6.4.4. Điều kiện bền:



Hình 6-16

Để kiểm tra bền cho dầm chịu uốn ngang phẳng, chúng ta nhận thấy do mặt cắt ngang có cả σ và τ (Hình 6-16) nên việc tìm vị trí nguy hiểm và viết điều kiện bền phức tạp.

Dựa vào biểu đồ phân bố σ và τ dọc theo chiều cao ta thấy có 3 loại trạng thái ứng suất :

- Các điểm ở ngoài mép (các điểm A) chọn tại mặt cắt có $|M_x|_{\max}$: ứng suất tiếp bằng không, chỉ có ứng suất pháp nên trạng thái ứng suất của các phân tố tại A là trạng thái đơn như uốn thuần túy.
- Các điểm ở trên trục trung hòa (các điểm B) chọn tại mặt cắt có $|Q_y|_{\max}$: ứng suất pháp $\sigma_z = 0$, chỉ có ứng suất tiếp nên phân tố ở trạng thái ứng suất trượt thuần túy. Điều kiện bền là :

+ Dầm làm bằng vật liệu dẻo :

Theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất (thuyết bền 3) :

$$\tau_{\max} \leq [\tau] = \frac{[\sigma]}{2}$$

Theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng (thuyết bền 4) :

$$\tau_{\max} \leq [\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}$$

+ Dầm làm bằng vật liệu giòn: dùng thuyết bền Mohr

- Những điểm có cả σ và τ (các điểm C ở mặt cắt có $|M_x|$ và $|Q_y|$ cùng lớn) trạng thái ứng suất là phẳng đặc biệt, kiểm tra bền theo σ_{td} :

$$\sigma_{td\max} \leq [\sigma]$$

σ_{td} được tính theo các thuyết bền :

- ♦ Theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất (thuyết bền 3) :

$$\sigma_{td} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau^2}$$

- ♦ Theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng (thuyết bền 4) :

$$\sigma_{td} = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau^2}$$

- ♦ Theo thuyết bền Mohr (dùng cho vật liệu giòn) : $\alpha = \frac{[\sigma]_k}{[\sigma]_n}$

$$\sigma_{td} = \frac{1-\alpha}{2} \sigma_z + \frac{1+\alpha}{2} \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

6.4.5. Kiểm tra bền uốn ngang phẳng cho thép định hình chữ I (Hình 6-17):

- Khi kiểm tra bền cho trạng thái ứng suất đơn ta chọn mặt cắt có $M_{x\max}$ hoặc $Q_{y\max}$.
- Khi kiểm tra bền cho trạng thái ứng suất phức tạp thì chọn mặt cắt có M_x và Q_y cùng lớn.

$$\tau_A = \frac{Q_y}{J_x \cdot d} \left(S_x - \frac{d}{2} y^2 \right) \quad (6-11)$$

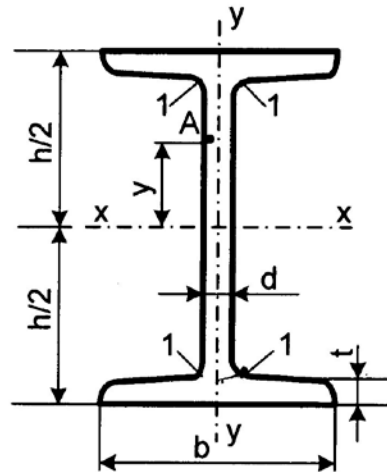
Nếu $y = 0$ (điểm trên trục trung hòa)

$$\tau_{\max} = \frac{Q_y}{J_x \cdot d} S_x \quad (6-12)$$

Tại điểm tiếp giáp giữa lòng và đế (điểm số 1):

$$\sigma_1 = \frac{M_x}{J_x} \left(\frac{h}{2} - t \right) ; \quad \tau_1 = \frac{Q_y}{J_x \cdot d} \left[S_x - \frac{d}{2} \left(\frac{h}{2} - t \right)^2 \right] \quad (6-13)$$

Hình 6-17



6.4.6. Ba bài toán cơ bản

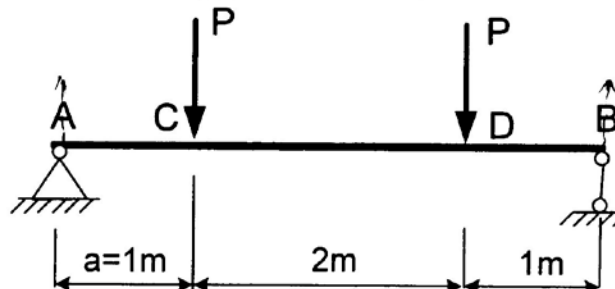
- + Bài toán cơ bản 1: kiểm tra bền đã trình bày ở trên.
- + Bài toán cơ bản 2: chọn kích thước mặt cắt ngang:
 - Dựa vào phân bố chịu trạng thái ứng suất đơn ($\sigma_{z\max}$) để sơ bộ chọn kích thước ban đầu cho dầm.
 - Tiến hành kiểm tra bền ở các phân tố khác như đã nói. Nếu điều kiện bền đối với các phân tố chịu trạng thái ứng suất khác không đạt thì ta thay đổi kích thước mặt cắt.
- + Bài toán cơ bản 3: định tải trọng cho phép.

Ví dụ 6-3

Xác định tải trọng cho phép $[P]$ của dầm chịu lực theo sơ đồ hình 6-18a trong 2 trường hợp:

- a) Dầm làm bằng thép chữ I số 10 đặt đứng.
 - b) Dầm làm bằng thép tròn có đường kính $D = 10\text{cm}$.
- Vật liệu của dầm có: $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$, $[\tau] = 8 \text{ kN/cm}^2$.

Hình 6-18a



Giải:

Chọn đơn vị của tải trọng P là kN

Phản lực liên kết tại 2 gối :

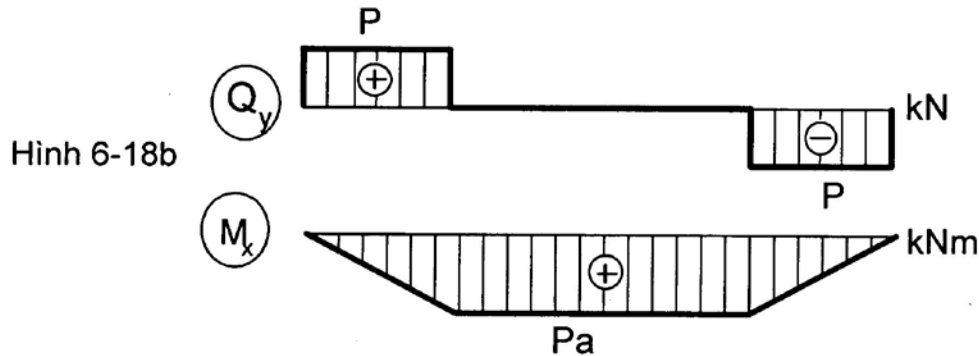
$$\sum m_A = -P \cdot a - P \cdot 3a + Y_B \cdot 4a = 0 \quad (1)$$

$$\sum m_B = -Y_A \cdot 4a + P \cdot 3a + P \cdot a = 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $Y_A = Y_B = P$

Biểu đồ nội lực Q_y và M_x được vẽ như hình 6-18b

Mặt cắt nguy hiểm có: $Q_y = P$; $M_x = P \cdot a$



a) Dầm làm bằng thép chữ I

Thép I số 10 có: $t = 0,72\text{cm}$; $d = 0,45\text{cm}$;

$$I_x = 198\text{cm}^4; W_x = 39,7\text{cm}^3; S_x = 23\text{cm}^3.$$

Điều kiện bền ứng suất pháp cực đại:

$$\sigma_{z\max} = \frac{M_{x\max}}{W_x} = \frac{P \cdot a}{W_x} \leq [\sigma]$$

$$\Rightarrow P \leq \frac{W_x [\sigma]}{a} = \frac{39,7 \times 16}{1 \times 10^2} = 6,35 \text{ kN}$$

Tạm chọn $[P] = 6,35 \text{ kN}$

Với P đã chọn chúng ta kiểm tra bền lại các phân tố ở trạng thái ứng suất trượt thuần túy và trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt.

- Phân tố ở trạng thái ứng suất trượt thuần túy: ở trục trung hoà của mặt cắt có :

$$|Q_y|_{\max} = P = 6,35 \text{ kN}$$

$$\tau_{\max} = \frac{|Q_y|_{\max} \times S_x}{J_x \times d} = \frac{6,35 \times 23}{198 \times 0,45} = 1,64 \text{ kN/cm}^2$$

$< [\tau] = 8 \text{ kN/cm}^2$ phân tố này thoả bền

- Phân tố ở trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt: ở nơi tiếp giáp giữa lòng và đế tại mặt cắt có:

$$|Q_y| = P = 6,35 \text{ kN}; M_x = P \cdot a = 6,35 \cdot 100 = 635 \text{ kNcm}$$

$$\sigma_1 = \frac{M_x}{J_x} \left(\frac{h}{2} - t \right) = \frac{635}{198} (5 - 0,72) = 13,73 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau_1 = \frac{Q_y}{J_x \times d} \left[S_x - \frac{d}{2} \left(\frac{h}{2} - t \right)^2 \right] = \frac{6,35}{198 \times 0,45} \left(23 - \frac{0,45}{2} (5 - 0,72)^2 \right) = 1,35 \text{ kN/cm}^2$$

$$\text{Theo thuyết bền 3 : } \sigma_{td} = \sqrt{\sigma_1^2 + 4\tau_1^2} = \sqrt{(13,73)^2 + 4(1,35)^2} = 14 \text{ kN/cm}^2 < [\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$$

Vậy tải trọng $[P] = 6,35 \text{ kN}$

b) Thép tròn có đường kính $D = 10 \text{ cm}$

Điều kiện bền ứng suất pháp cực đại:

$$\sigma_{z\max} = \frac{M_{x\max}}{W_x} = \frac{M_{x\max}}{0,1D^3} \leq [\sigma] \Rightarrow$$

$$P \leq \frac{0,1D^3 [\sigma]}{a} = \frac{0,1 \times (10)^3 \times 16}{100} = 16 \text{ kN}$$

Tạm chọn $[P] = 16 \text{ kN}$

Với P đã chọn chúng ta kiểm tra bền lại các phân tố ở trạng thái ứng suất trượt thuần túy

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{|Q_y|_{\max}}{F} = \frac{4}{3} \times \frac{16 \times 4}{3,14(10)^2} = 0,27 \text{ kN/cm}^2 < [\tau] = 8 \text{ kN/cm}^2 : \text{phân}$$

tố này thoả bền.

Vậy tải trọng $[P] = 16 \text{ kN}$

6.5. Dầm chống uốn đều:

Đối với mặt cắt ngang không đổi khi chọn kích thước của nó ta chỉ dựa vào mặt cắt ngang nào có mômen uốn lớn nhất. Cách sử dụng vật liệu như vậy chưa hợp lý vì khi ứng suất ở những điểm trên mặt cắt ngang có mômen uốn lớn nhất đạt đến giá trị $[\sigma]$ thì ứng suất ở những điểm trên mặt cắt ngang khác còn nhỏ so với $[\sigma]$. Để tận dụng hết khả năng chịu lực của vật liệu, đồng thời tiết kiệm được nhiều vật liệu nhất ta phải tìm hình dáng hợp lý của dầm sao cho ứng suất ở những điểm nguy hiểm trên mọi mặt cắt ngang đều cùng đạt đến giá trị $[\sigma]$. Dầm có hình dáng như vậy gọi là dầm chống uốn đều.

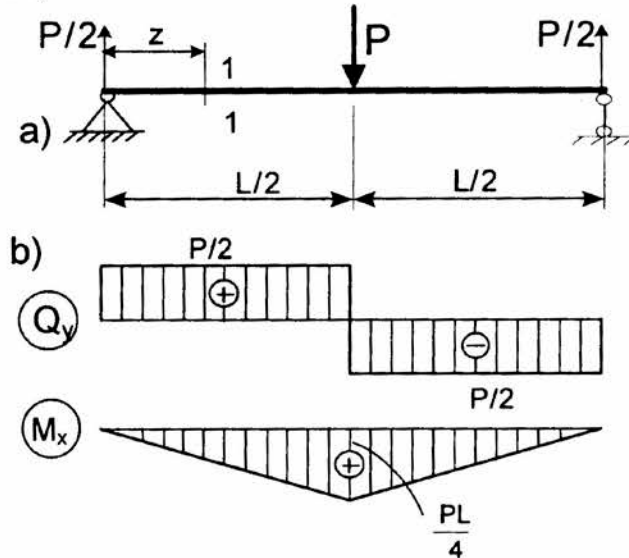
Ví dụ 6-4:

Cho dầm có tiết diện tròn chịu lực theo sơ đồ hình vẽ 6-19a. Tại mặt cắt 1-1 cách gối tựa A một đoạn z , với $0 \leq z \leq \frac{L}{2}$, lực cắt Q_y và mômen uốn M_x có giá trị:

$$Q_y = \frac{P}{2} ; \quad M_x = \frac{P}{2} z$$

biểu đồ nội lực (Hình 6-19b).

Hình 6-19



Như vậy trị số ứng suất pháp lớn nhất trên mặt cắt được tính theo công thức:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{Pz}{0,1D^3}$$

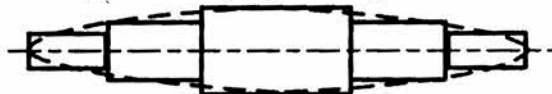
Với điều kiện ứng suất cực đại trên mọi mặt cắt cùng đạt đến trị số ứng suất cho phép $[\sigma]$, nghĩa là $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$.

Chúng ta tìm được luật biến thiên của đường kính D theo biến số z như sau:

$$D = \sqrt[3]{\frac{P \cdot z}{0,1[\sigma]}} \quad (a)$$

Như vậy hình dáng của thanh phải có dạng đường nét đứt như hình 6-20.

Hình 6-20



Chúng ta thấy tại hai đầu mút, mặt cắt có diện tích bằng không, điều đó hoàn toàn phù hợp với điều kiện biến thiên của mômen uốn, vì tại đó mômen uốn bằng không.

Song như vậy không thỏa mãn điều kiện bền của lực cắt Q_y . Thật vậy trên mọi mặt cắt của dầm chúng ta đều có một trị số lực cắt $Q_y = \frac{P}{2}$ và

lực cắt đó sinh ra ứng suất tiếp lớn nhất $\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{Q_y}{F}$, vì thế diện tích

mặt cắt cần phải đủ để chịu cắt. Do đó phải chọn đường kính với điều kiện:

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{Q_y}{F} \leq [\tau]$$

Nghĩa là đường kính nhỏ nhất cũng phải là:

$$D = D_1 = \sqrt{\frac{8P}{3\pi[\tau]}} \quad (b)$$

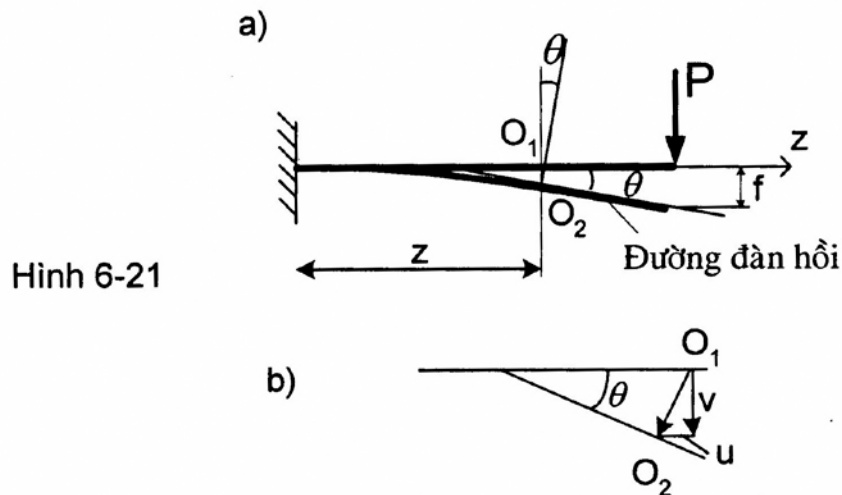
Vì điều kiện chế tạo, rất khó gia công để thanh có thể có hình dáng của đường cong biểu diễn trong (a) nên trong thực tế người ta thường làm các trục bậc như trên Hình 6-20.

6.6. Chuyển vị của dầm chịu uốn:

6.6.1. Định nghĩa:

Dưới tác dụng của tải trọng ngang đặt trong mặt phẳng quán tính chính trung tâm. Đường cong của trục dầm sau khi bị uốn được gọi là đường đàn hồi (Hình 6-21a).

O_1 là điểm trên trục dầm, O_2 là vị trí của nó sau khi dầm bị biến dạng. Khoảng cách O_1O_2 gọi là chuyển vị dài của O_1 (Hình 6-21b).



Hình 6-21

Phân chuyển vị O_1O_2 thành hai thành phần u và v theo phương của trục z và trục y .

Biến dạng của dầm là bé thì u là vô cùng bé bậc hai so với v , do đó bỏ qua chuyển vị u và xem $O_1O_2 = v$; nghĩa là sau khi biến dạng O_1 nằm trên đường vuông góc với trục thanh.

v : được gọi là độ võng tại O_1 của dầm, nó là một hàm theo hoành độ z của mặt cắt ngang.

Phương trình đường đàn hồi: $y(z) \approx v(z)$

θ : gọi là chuyển vị góc của mặt cắt hay góc xoay. Độ võng khá bé so

với nhịp dầm nên góc xoay cũng nhỏ do đó $\tan \theta \approx \theta \approx \frac{dy}{dz} = y'(z)$

Quy ước dương của chuyển vị :

- Độ võng được xem là dương nếu hướng xuống.
- Góc xoay θ được xem là dương nếu quay từ trục z đến tiếp tuyến với đường đàn hồi tại điểm khảo sát là theo chiều kim đồng hồ.

6.6.2. Phương trình vi phân của đường đàn hồi:

Phương trình vi phân của đường đàn hồi có dạng gần đúng :

$$y'' = -\frac{M_x}{EJ_x} \quad (6-14)$$

Trong đó tích số EJ_x gọi là độ cứng của dầm khi chịu uốn.

6.6.3. Thiết lập phương trình đường đàn hồi bằng phương pháp tích phân không định hạn:

Phương trình góc xoay :

$$\theta \approx y'(z) = \frac{dy}{dz} = - \int \frac{M_x}{EJ_x} dz + C \quad (6-15)$$

Phương trình độ võng :

$$y = \int \left[- \int \frac{M_x}{EJ_x} dz + C \right] dz + D \quad (6-16)$$

C, D là các hằng số tích phân sẽ được xác định từ các điều kiện biên (điều kiện về chuyển vị thẳng và góc xoay tại các đầu đoạn dầm).

Điều kiện biên của các dầm đơn giản :

- Đầu ngàm của dầm công son (Hình 6-22a):

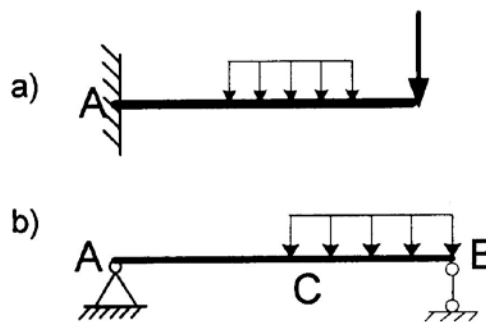
Góc xoay và chuyển vị tại ngàm bằng không :

$$\theta_A = 0 ; y_A = 0$$

- Tại các đầu khớp của dầm đơn giản (Hình 6-22b), chuyển vị thẳng (độ võng) tại 2 khớp bằng không :

$$y_A = 0 ; y_B = 0$$

Hình 6-22

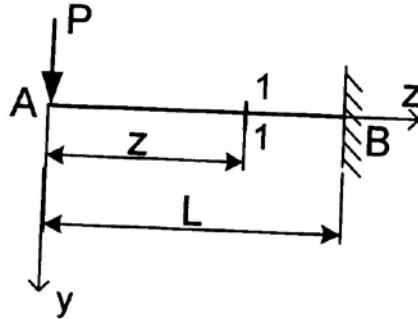


- Tại nơi tiếp giáp giữa hai đoạn dầm (tại C) có phương trình đường đàn hồi khác nhau nhưng độ võng và góc xoay bên trái phải bằng với độ võng và góc xoay bên phải : $y_C^{\text{tr}} = y_C^{\text{ph}} ; \theta_C^{\text{tr}} = \theta_C^{\text{ph}}$

Ví dụ 6-5:

Viết phương trình độ võng và góc xoay của dầm công son có sơ đồ chịu lực (Hình 6-23), cho $EJ_x = \text{const}$. Từ đó suy ra độ võng và góc xoay lớn nhất.

Hình 6-23

**Giải:**

Mômen uốn nội lực tại mặt cắt 1-1 có hoành độ z : $M_x(z) = -Pz$
 Thay vào biểu thức của phương trình vi phân đường đàn hồi:

$$y'' = -\frac{M_x}{EJ_x} = \frac{Pz}{EJ_x}$$

$$\theta = \int \frac{Pz}{EJ_x} dz = \frac{Pz^2}{2EJ_x} + C \quad (1)$$

$$y = \int \left[\frac{Pz^2}{2EJ_x} + C \right] dz = \frac{Pz^3}{6EJ_x} + Cz + D \quad (2)$$

C và D được xác định bằng các điều kiện biên: $z = L$; $\theta = 0$; $y = 0$.
 Thay vào (1) và (2) ta được:

$$C = -\frac{PL^2}{2EJ_x}; \quad D = -\frac{PL^3}{6EJ_x} + \frac{PL^3}{2EJ_x} = \frac{PL^3}{3EJ_x}$$

Vậy phương trình đường đàn hồi và phương trình góc xoay là:

$$y = \frac{Pz^3}{6EJ_x} - \frac{PL^2}{2EJ_x}z + \frac{PL^3}{3EJ_x}; \quad \theta = \frac{Pz^2}{2EJ_x} - \frac{PL^2}{2EJ_x}$$

Độ võng và góc xoay đạt cực đại nằm ở điểm A đầu tự do của dầm ($z = 0$):

$$y_{\max} = f_A = \frac{PL^3}{3EJ_x}; \quad \theta_{\max} = \theta_A = -\frac{PL^2}{2EJ_x}$$

$f_A > 0$: chứng tỏ điểm A dịch chuyển xuống theo chiều dương của y ; còn $\theta_A < 0$ chứng tỏ tiết diện tại A quay một góc theo ngược chiều kim đồng hồ.

Nếu trên dầm mômen uốn chia nhiều đoạn khác nhau, mỗi đoạn phải xác định 2 hằng số tích phân. Dầm có n đoạn cần phải xác định $2n$ hằng

số tích phân. Nếu số đoạn chịu lực càng lớn thì bài toán càng phức tạp, vì vậy phương pháp này ít sử dụng khi tải trọng phức tạp.

6.6.4. Phương pháp nhân biểu đồ Vêrêsinhin:

* Gọi trạng thái chịu lực của hệ đã cho là trạng thái “m”.

* Trạng thái “k” là trạng thái do chúng ta tạo ra bằng cách đặt lên hệ một lực $\bar{P}_k$ tại điểm A cần tính chuyển vị và theo phương của chuyển vị cần tìm. Ở trạng thái này các nội và ngoại lực được ký hiệu có chỉ số k kèm theo như: P_k, M_k, N_k, Q_k . Để đơn giản chọn $P_k = 1$, trạng thái “k” này được gọi là “trạng thái đơn vị”.

Để tính góc xoay tại A ta tạo trạng thái “k” bằng cách đặt tại A một ngẫu lực $M_k = 1$.

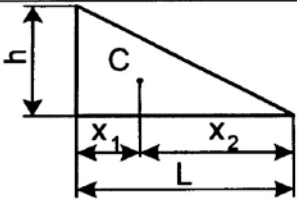
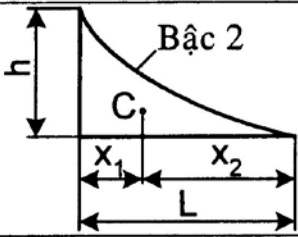
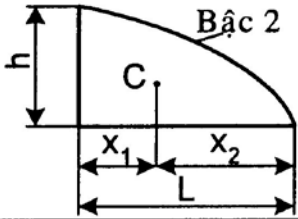
Biểu thức Vêrêsinhin :

$$\Delta_{km} = \sum \frac{1}{EJ} \Omega(M_m) \bar{M}_k(C) + \sum \frac{1}{EF} \Omega(N_m) \bar{N}_k(C) + \sum \frac{1}{GF} \eta \Omega(Q_m) \bar{Q}_k(C) \quad (6-17)$$

$\Omega(M_m); \Omega(N_m); \Omega(Q_m)$: là diện tích các biểu đồ M_m, N_m, Q_m .

$\bar{M}_k(C); \bar{N}_k(C); \bar{Q}_k(C)$: là giá trị tung độ của biểu đồ $\bar{M}_k, \bar{N}_k, \bar{Q}_k$ tại những vị trí tương ứng với trọng tâm C của diện tích các biểu đồ M_m, N_m, Q_m .

Để dễ dàng cho việc tính toán ta xác định các hoành độ trọng tâm và diện tích S của những hình giới hạn bởi các đường như sau :

Hình vẽ	Diện tích (S)	Vị trí trọng tâm	
		x_1	x_2
 Hình vẽ	$\frac{Lh}{2}$	$\frac{L}{3}$	$\frac{2L}{3}$
 Bậc 2	$\frac{Lh}{3}$	$\frac{L}{4}$	$\frac{3L}{4}$
 Bậc 2	$\frac{2Lh}{3}$	$\frac{3L}{8}$	$\frac{5L}{8}$