CHƯƠNG 5
TÍNH GẦN ĐÚNG ĐẠO HÀM VÀ TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

§1. TÍNH GẦN ĐÚNG ĐẠO HÀM

1.1 Đặt vấn đề

Trong giáo trình toán học cao cấp, ta đã học cách tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$. Nếu biểu thức giải tích của hàm số $f(x)$ đã biết. Nhưng trong thực tế, thường phải tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ cho bằng bảng nghĩa là biểu thức giải tích của hàm số $f(x)$ không biết, mà chỉ biết một số cạp giá trị tương ứng của x và y. Cũng có trường hợp biểu thức giải tích của hàm số $f(x)$ đã biết nhưng quá phức tạp, do đó tính trực tiếp đạo hàm bằng những quy tắc của toán học cao cấp sẽ khó khăn. Trong những trường hợp ấy, người ta tính gần đúng đạo hàm bằng cách thay hàm số $f(x)$ trên $[a,b]$ bằng đa thức nội suy $P_n(x)$ và xem:

$$f'(x) \approx P'_n(x) \text{ với } x \in [a,b]$$

Vì: $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$, nên sai số của đạo hàm sẽ là:

$$r_n(x) = R'_n(x) = f'(x) - P'_n(x)$$

Đối với đạo hàm cấp cao của hàm số $f(x)$, làm tương tự.

1.2 Công thức tính gần đúng đạo hàm cấp một

a. Trường hợp hai nút nội suy: x_0 và x_1

Giả sử biết $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$ với $x_1 = x_0 + h$ (h là hằng số > 0). Để tính gần đúng đạo hàm $f'(x)$ tại các nút nội suy x_0 và x_1, ta thay hàm số $y = f(x)$ bằng đa thức nội suy Newton tiến bậc một (trường hợp các nút nội suy cách đều) xuất phát từ nút x_0:

$$f(x) = P_1(x) + R_1(x) \text{ với } x = x_0 + ht \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{h}$$

$$f(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{h^2}{2} f''(c)t(t-1)$$

Đạo hàm hai vế theo x, ta có:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[y_0 + t\Delta y_0 + \frac{h^2}{2} f''(c).t(t-1) \right]$$

$$= \frac{d}{dt}\left[y_0 + t\Delta y_0 + \frac{h^2}{2} f''(c).t(t-1) \right]\frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{h^2}{2} f''(c)\frac{d}{dt}\{t(t-1)\} + \frac{h^2}{2} t(t-1)\frac{d}{dt}\{f''(c)\} \right] =$$

$$= \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{h^2}{2} f''(c)\{2t-1\} + \frac{h^2}{2} t(t-1)\frac{d}{dt}\{f''(c)\} \right] \quad (*)$$

(chú ý ràng nói chung c phụ thuộc x, do đó c cũng phụ thuộc t).

- Với giả thiết $\frac{d}{dt}(f''(c))$ bị chặn, $x = x_0$ và $t = 0$, ta có từ (*):

$$f'(x_0) = \frac{y_1 - y_0}{h} - \frac{h}{2} f''(c_0) \quad (5.1)$$

nghĩa là: $f'(x_0) \approx \frac{y_1 - y_0}{h}$ với sai số $-\frac{h}{2} f''(c_0)$, $c_0 \in [x_0, x_1]$,

- Nếu $x = x_1$ và $t = 1$, ta có từ (*):

$$f'(x_1) = \frac{y_1 - y_0}{h} + \frac{h}{2} f''(c_1) \quad (5.2)$$

nghĩa là: $f'(x_1) \approx \frac{y_1 - y_0}{h}$ với sai số $\frac{h}{2} f''(c_1)$, $c_1 \in [x_0, x_1]$.

b. Trường hợp ba nút nội suy: x_0, x_1 và x_2

Giả sử biết $y_i = f(x_i)$, $i = 0,1,2$ với $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$

(h là hằng số > 0). Để tính gần đúng đạo hàm $f'(x)$ tại các nút nội suy x_0, x_1 và x_2, ta thay hàm số $y = f(x)$ bằng đa thức nội suy Newton tiến bậc hai (trường hợp các nút nội suy cách đều) xuất phát từ nút x_0 và làm hoàn toàn tương tự trường hợp a, ta nhận được công thức tính gần đúng đạo hàm tại các nút nội suy x_0, x_1 và x_2 như sau:

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}(-3y_0 + 4y_1 - y_2) + \frac{h^2}{3} f'''(c_0) \tag{5.3}$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{2h}(-y_0 + y_2) - \frac{h^2}{6} f'''(c_1) \tag{5.4}$$

$$f'(x_2) = \frac{1}{2h}(y_0 - 4y_1 + 3y_2) + \frac{h^2}{3} f'''(c_2) \tag{5.5}$$

trong đó $c_0, c_1, c_2 \in [x_0, x_2]$.

Chứng minh:

$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \Rightarrow f'(x) = P_n'(x) + R_n'(x)$, trong đó

$$P_n(x) = P_n(x_0 + ht) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 y_0$$

$R_n(x) = \dfrac{h^3}{3!} y^{(3)}(c)t(t-1)(t-2)$. Tính $f_x' = f_t' . t_x'$, $t_x' = \dfrac{1}{h}$

$$f_x' = \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 + \frac{\Delta^2 y_0}{2}(2t-1) + \frac{h^3}{3!} y^{(3)}(c)\left(3t^2 - 6t + 2\right)\right)$$

- Cho t=0 ==> $x = x_0 \Rightarrow f_x'(x_0) = \dfrac{1}{h}\left(\Delta y_0 - \dfrac{\Delta^2 y_0}{2} + \dfrac{h^3}{3} y^{(3)}(c)\right)$

$\Delta y_0 = y_1 - y_0$, $\Delta^2 y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = (y_2 - 2y_1 + y_0)$, thế vào ta có:

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}(-3y_0 + 4y_1 - y_2) + \frac{h^2}{3} y^{(3)}(c)$$

• Cho t=1 ==> $x = x_1 \Rightarrow f_x^{/}(x_1) = \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 + \frac{\Delta^2 y_0}{2} - \frac{h^3}{3} y^{(3)}(c)\right) =$

$$f_x^{/}(x_1) = \frac{1}{2h}(-y_0 + y_2) - \frac{h^2}{6} f'''(c_1)$$

• Cho t=2 ==> $x = x_2 \Rightarrow f_x^{/}(x_2) = \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 + \frac{3\Delta^2 y_0}{2} + \frac{h^3}{3} y^{(3)}(c)\right) =$

$$f'(x_2) = \frac{1}{2h}(y_0 - 4y_1 + 3y_2) + \frac{h^2}{3} f'''(c_2) \qquad \blacksquare$$

Thí dụ 5.1 Tính gần đúng $y'(50)$ của hàm số $y = \lg x$ dựa vào bảng giá trị đã cho sau:

x	50	55	60
$y = \lg x$	1,6990	1,7404	1,7782

Giải

Ở đây $h = 5$, Áp dụng công thức (5.3), ta có:

$$y'(50) \approx \frac{1}{10}(-3.1,6990 + 4.1,7404 - 1,7782) = 0,00864$$

Để đánh giá sai số của giá trị gần đúng nhận được, ta tính:

$$y'(x) = (\lg x)' = \frac{1}{x \ln 10};$$

$$y''(x) = -\frac{1}{x^2 \ln 10}; \quad y'''(x) = \frac{2}{x^3 \ln 10}$$

$$\max_{x \in [50,60]} y'''(x) = \frac{2}{50^3 \ln 10}$$

Vậy: $\left|y'(50) - 0.00864\right| \le \frac{5^2}{3} \cdot \frac{2}{50^3 \ln 10} = 0.0000579 \approx 0.00006$

Thí dụ 5.1' Tính gần đúng $y'(2)$ của hàm số $y = x^2 - e^{x^2}$ dựa vào bảng giá trị đã cho sau:

x	2	2.01	2.02
$y = x^2 - e^{x^2}$	-50.5982	-52.7919	-55.0887

Giải

Ở đây $h = 0.01$, Áp dụng công thức (5.3), ta có:

$$y'(2) \approx \frac{1}{2\times 0.01}(-50.5982 - 52.7919 - 55.0887) = -214.226$$

Chú ý: nếu ta chọn h =1 thì sai số cực lớn, vì hàm e^{x^2} tăng quá nhanh.

Nếu lấy $h = 0.001$, thì $y'(2) \approx -214.391$ rất đúng với lý thuyết.

§2.TÍNH GẦN ĐÚNG TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

2.1 Đặt vấn đề

Như đã biết trong giáo trình Toán học cao cấp, nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ và F(x) là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $[a,b]$ thì ta có công thức Newton-Leibnitz sau:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

trong đó: $F'(x) = f(x)$.

Nhưng trong thực tế, thường phải tính tích tích phân xác định của hàm số $y = f(x)$ cho bằng bảng, khi đó khái niệm nguyên hàm không có ý nghĩa. Cũng có trường hợp biểu thức giải tích của hàm số $f(x)$ đã biết nhưng nguyên hàm của hàm số $f(x)$ không thể biểu diễn bằng hàm số sơ cấp. Trong những trường hợp ấy, không thể dùng công thức Newton-Leibnitz được, do đó người ta phải tìm cách tính gần đúng tích phân xác định. Người ta cũng dùng phương pháp tính gần đúng tích phân xác định khi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ có thể biểu diễn bằng hàm số sơ cấp, nhưng việc tính nó bằng công thức Newton-Leibnitz quá phức tạp.

Giống trường hợp tính gần đúng đạo hàm, để tính gần đúng tích phân xác định trên $[a,b]$. Ta thay hàm số dưới dấu tích phân $f(x)$ bằng đa thức nội suy $P_n(x)$ **(ta xét tối đa là bậc n=2)**, và xem:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_n(x)dx$$

2.2 Công thức hình thang và sai số:

Để tính gần đúng $\int_a^b f(x)dx$ ta thay hàm số dưới dấu tích phân $f(x)$ bằng đa thức nội suy **Newton tiến cách đều bậc một** (đường thẳng đi qua hai điểm $A(a, f(a))$ và $B(b, f(b))$) xuất phát từ nút trùng với cận dưới a, và có:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_1(x)dx$$

nhớ lại:
$$\boxed{\begin{aligned} P_n(x) = P_n(x_0+ht) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \\ + \frac{t(t-1)(t-2)\dots(t-i)\dots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \end{aligned}} \quad (4.25)$$

Để tính tích phân xác định ở vế phải, ta đổi biến số:

$$x = a + (b-a)t$$

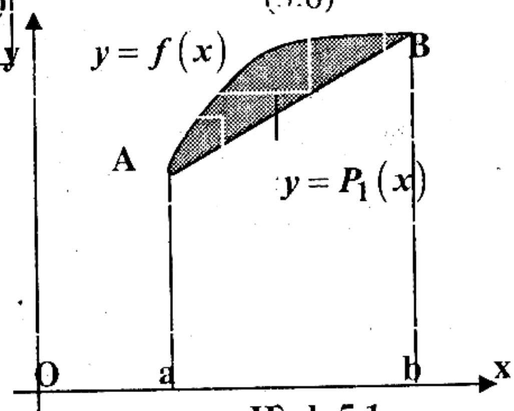
Khi đó: $dx = (b-a)dt$, t viến thiên từ 0 đến 1, và:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_1(x)dx = \int_0^1 (y_0 + t\Delta y_0)(b-a)dt =$$

$$= (b-a)\left(y_0 t + \Delta y_0 \frac{t^2}{2} \right)\Bigg|_{t=0}^{t=1}$$

trong đó: $y_0 = f(a); \Delta y_0 = y_1 - y_0 = f(b) - f(a).$

Vậy: $$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))} \qquad (5.6)$$



Hình 5.1

Về mặt hình học, (5.6) có nghĩa là diện tích hình thang cong a $\overset{\frown}{AB}$ b ($\overset{\frown}{AB}$ là cung đường cong $y = f(x)$ đi qua hai điểm A và B) được thay xấp xỉ bằng diện tích hình thang thẳng a $\overline{AB}$ b ($\overline{AB}$ là dây cung $y = P_1(x)$ nối hai điểm A và B <u>được thay xấp xỉ bằng đường thẳng</u> $y = P_1(x)$ đi qua hai điểm A và B) (hình 5.1).

Công thức (5.6) được gọi là công thức hình thang.

Để xác định sai số ta tính:

$$R = \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$$

ta giả thiết rằng hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên $[a,b]$.

Xem R là hàm số của $h = b - a$:

$$\mathrm{R} = \mathrm{R}(h) = \int_a^{a+h} f(x)dx - \frac{h}{2}[f(a) + f(a+h)]$$

Chú ý: $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt = f\left[\varphi_2(x)\right]\varphi_2'(x) - f\left[\varphi_1(x)\right]\varphi_1'(x)$

Đạo hàm hai lần theo h đẳng thức trên, ta có:

$$R'(h) = f(a+h) - \frac{1}{2}[f(a) + f(a+h)] - \frac{h}{2}f'(a+h) =$$

$$= \frac{1}{2}[f(a+h) - f(a)] - \frac{h}{2}f'(a+h)$$

và $\quad R''(h) = \frac{1}{2}f'(a+h) - \frac{1}{2}f'(a+h) - \frac{h}{2}f''(a+h) = -\frac{h}{2}f''(a+h)$

Ngoài ra: R(0)=0; R'(0)=0.

Từ đó, áp dụng định lý trung bình thứ hai của tích phân xác định, ta nhận được:

$$R'(h) = R'(0) + \int_0^h R''(t)dt = -\frac{1}{2}\int_0^h t f''(a+t)dt =$$

$$= -\frac{1}{2}f''(c_1)\int_0^h tdt = -\frac{h^2}{4}f''(c_1); \quad c_1 \in (a, a+h)$$

và thế R'(h) vào: $\quad R(h) = R(0) + \int_0^h R'(t)dt = -\frac{1}{4}\int_0^h t^2 f''(c_1)dt =$

$$= -\frac{1}{4}f''(c)\int_0^h t^2 dt = \boxed{-\frac{h^3}{12}f''(c) = R(h)}; \quad c \in (a, a+h).$$

Tóm lại, với giả thiết hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên $[a,b]$, ta có <u>công thức hình thang</u> sau:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[f(a) + f(b)] - \frac{h^3}{12}f''(c)} \qquad (5.7)$$

với $h = b - a$ và $c \in (a,b)$. ■

2.3 Công thức hình thang tổng quát và sai số

Để tính gần đúng $\int_a^b f(x)dx$, ta chia đoạn $[a,b]$ thành n đoạn bằng nhau:

(n là số nguyên, dương, chẵn hoặc lẻ đều được):

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{n-2}, x_{n-1}], [x_{n-1}, x_n]$$

có độ dài là: $h = \dfrac{b-a}{n}$ bởi các điểm chia:

$$x_0 = a; x_i = a + ih \quad (i = \overline{1, n-1}); x_n = b$$

Ký hiệu: $y_i = f(x_i) \quad (i = \overline{0, n})$, khi đó:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + ... + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \qquad (5.8)$$

Đối với mỗi tích phân xác định ở vế phải của (5.8), ta tính gần đúng bằng công thức hình thang (5.6), nhận được:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + ... + \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n)$$

hay: $$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}\right) = \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_{i-1} + y_i)} \qquad (5.9)$$

Công thức (5.9) được gọi là công thức hình thang tổng quát.

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên $[a, b]$ thì do (5.7), sai số của công thức hình thang tổng quát là:

$$\mathrm{R} = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx - \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_{i-1} + y_i) =$$

$$R = \sum_{i=1}^{n}\left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - \frac{h}{2}(y_{i-1} + y_i)\right] \underset{(5.7)}{=} \boxed{-\frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{n} f''(c_i) = R} \qquad (5.10)$$

với $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$.

Xét trung bình cộng: $\mu = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f''(c_i)$, điều này chứng tỏ rằng: μ gồm giữa giá trị nhỏ nhất m_2 và giá trị lớn nhất M_2 của đạo hàm cấp hai

$f''(x)$ trên $[a,b]$, nghĩa là: $m_2 \le \mu \le M_2$

Vì theo giả thiết, do $f''(x)$ liên tục trên $[a,b]$ nên nó nhận mọi giá trị trung gian giữa m_2 và M_2. Do đó, tìm được điểm $c \in [a,b]$ sao cho $\mu = f''(c)$, hay:

$$\sum_{i=1}^{n} f''(c_i) = n\mu = nf''(c)$$

Thay vào (5.10), nhận được: (chú ý: nh= b-a)

$$\boxed{R = -\frac{nh^3}{12} f''(c) = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(c)}, \quad c \in [a,b] \quad (5.11)$$

Tóm lại, với giả thiết hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên $[a,b]$ và chia đoạn lấy tích phân $[a,b]$ thành n đoạn bằng nhau, có độ dài $h = \dfrac{b-a}{n}$, ta có công thức hình thang tổng quát sau:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}\right) - \frac{(b-a)h^2}{12} f''(c), \; c \in [a,b]} \quad (5.12)$$

■

2.4 Công thức Simpson và sai số :

Để tính gần đúng $\int_a^b f(x)dx$, ta chia $[a,b]$ thành hai đoạn bằng nhau bởi các điểm chia $x_0 = a;\ x_1 = a + \dfrac{b-a}{2} = a + h;\ x_2 = b = a + 2h,$ và thay hàm số dưới dấu tích phân $f(x)$ bằng đa thức nội suy Newton tiến bậc hai (đi qua ba điểm $A(x_0 = a, y_0 = f(x_0)), C(x_1 = a + h, y_1 = f(x_1))$ và $B(x_2 = a + 2h = b, y_2 = f(x_2))$ có hoành độ cách đều nhau) xuất phát từ nút trùng với cận dưới $a = x_0$, và có:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} P_2(x)dx$$

Để tính tích phân xác định ở vế phải, ta đổi biến số từ biến x sang biến t qua công thức: $x = x_0 + ht$. Khi đó: $dx = hdt$, biến t biến thiên từ 0 đến 2, $\left(t = \overline{0,2}\right)$ và:

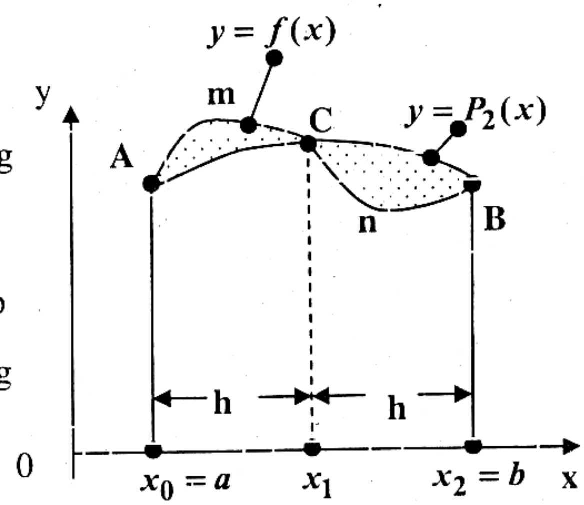
$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \int_0^2 \left(y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 y_0 \right) hdt$$

$$= h\left(y_0 t + \Delta y_0 \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right) \right)\Bigg|_{t=0}^{t=2}$$, trong đó: $\Delta y_0 = y_1 - y_0$;

$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0$. Vậy:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \boxed{\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)} = \frac{b-a}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2) \quad (5.13)$$

Về mặt hình học. (5.13) có nghĩa là diện tích hình thang cong a $\overset{\frown}{ACB}$ b ($\overset{\frown}{AmCnB}$ là cung đường cong $y = f(x)$ đi qua ba điểm A, C và B) được thay xấp xỉ bằng diện tích hình thang cong aACBb (aACBb là cung parabol $y = P_2(x)$ đi qua ba điểm A, C và B).



Hình 5.2

Hai diện tích gạch chấm là bù qua sớt lại khi ta xấp xỉ.

Nói khác đi, đường cong $y = f(x)$

đi qua ba điểm A, C và B (hình 5.2). được thay xấp xỉ bằng đường parabol

$y = P_2(x)$ đi qua ba điểm A, C, B.

Công thức (5.13) được gọi là công thức Simpson.

• **Để xác định sai số ta viết:**

$$R = \int_a^b f(x)dx - \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

ta giả thiết ràng hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp bốn liên tục trên $[a,b]$.

Cố định điểm giữa x_1 và xem R là hàm số của h, và viết lại:

$$\mathrm{R} = \mathrm{R}(h) = \int_{a=x_1-h}^{b=x_1+h} f(x)dx - \frac{h}{3}[f(x_1 - h) + 4f(x_1) + f(x_1 + h)]$$

Đạo hàm ba lần đẳng thức trên (chú ý đạo hàm hợp), ta có:

• $\mathrm{R}'(h) = f(x_1 + h) + f(x_1 - h) - \frac{1}{3}[f(x_1 - h) + 4f(x_1) + f(x_1 + h)] -$

$$-\frac{h}{3}[-f'(x_1 - h) + f'(x_1 + h)] =$$

$$= \frac{2}{3}[f(x_1 - h) + f(x_1 + h)] - \frac{4}{3}f(x_1) - \frac{h}{3}[-f'(x_1 - h) + f'(x_1 + h)]$$

• $R''(h) = \frac{2}{3}[-f'(x_1 - h) + f'(x_1 + h)] - \frac{1}{3}[-f'(x_1 - h) + f'(x_1 + h)] -$

$$-\frac{h}{3}[f''(x_1 - h) + f''(x_1 + h)] =$$

$$= \frac{1}{3}[-f'(x_1 - h) + f'(x_1 + h)] - \frac{h}{3}[f''(x_1 - h) + f''(x_1 + h)]$$

• $\mathrm{R}'''(h) = \frac{1}{3}[f''(x_1 - h) + f''(x_1 + h)] - \frac{1}{3}[f''(x_1 - h) + f''(x_1 + h)] -$

$$-\frac{h}{3}[-f'''(x_1-h)+f'''(x_1+h)] =$$

$$=-\frac{h}{3}[f'''(x_1+h)-f'''(x_1-h)]$$

Áp dụng công thức Lagrange đối với $f'''(x)$, ta có:

$$R'''(h)=-\frac{2h^2}{3}f^{(4)}(c_3), c_3 \in (x_1-h, x_1+h)$$

Ngoài ra khi thế h=0 vào các biểu thức trên , ta có:

$$R(h=0)=0; \quad R'(h=0)=0; \quad R''(0)=0.$$

Từ đó, áp dụng định lý trung bình thứ hai của tích phân xác định, ta nhận được:

Đầu tiên ta có:

$$R''(h)= R''(0)+\int_0^h R'''(t)dt=-\frac{2}{3}\int_0^h t^2 f^{(4)}(c_3)dt=$$

$$=-\frac{2}{3}f^{(4)}(c_2)\int_0^h t^2 dt=-\frac{2}{9}h^3 f^{(4)}(c_2); c_2 \in (x_1-h, x_1+h)$$

tiếp tục: $R'(h)=R'(0)+\int_0^h R''(t)dt=-\frac{2}{9}\int_0^h t^3 f^{(4)}(c_2)dt$

$$=-\frac{2}{9}f^{(4)}(c_1)\int_0^h t^3 dt=-\frac{1}{18}h^4 f^{(4)}(c_1); \quad c_1 \in (x_1-h, x_1+h)$$

Cuối cùng: $R(h)=R(0)+\int_0^h R'(t)dt=-\frac{1}{18}\int_0^h t^4 f^{(4)}(c_1)dt=$

$$=-\frac{1}{18}f^{(4)}(c)\int_0^h t^4 dt=\boxed{-\frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(c)=R(h)}, \; c \in (x_1-h, x_1+h)$$

Tóm lại, với giả thiết hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp bốn liên tục trên $[a,b]$, ta có công thức Simpson ở (5.13) viết lại như sau:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[\underbrace{f(a)}_{y_0}+4\underbrace{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}_{y_1}+\underbrace{f(b)}_{y_2}\right]-\frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(c)} \quad (5.14)$$

với $h=\dfrac{b-a}{2}$, $c\in(a,b)$. ■

Từ (5.14) dễ thấy ràng công thức Simpson không những hoàn toàn đúng khi $f(x)$ là một đa thức bâc hai đối với x, mà còn hoàn toàn đúng cả trong trường hợp $f(x)$ là một đa thức bậc ba đối với x.

2.5. Công thức Simpson tổng quát và sai số (còn được gọi công thức Simpson $\frac{1}{3}$ tổng quát).

Để tính gần đúng $\int_a^b f(x)dx$, ta chia $[a,b]$ thành $n=2m$ đoạn bàng nhau: nghĩa là chia đoạn [a,b] ra làm bội số của 2 đoạn con (vì có 3 điểm nội suy cho từng đọan con)

$$\underbrace{[x_0,x_1][x_1,x_2]}, \ldots, \underbrace{[x_{2m-2},x_{2m-1}][x_{2m-1},x_{2m}]}$$

có độ dài là: $h=\dfrac{b-a}{n}=\dfrac{b-a}{2m}$ bởi các điểm chia:

$$x_0=a;\ x_i=a+ih\ (i=\overline{1,2m}),\quad x_n=x_{2m}=a+2m\frac{b-a}{2m}=b.$$

Ký hiệu: $y_i=f(x_i), i=\overline{0,n}$, khi đó:

$$\int_{x_0}^{x_{2m}} = \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}} f(x)dx \quad (5.15)$$

Đối với mỗi tích phân xác định ở vế phải của (5.15), ta tính gần đúng bàng công thức Simpson (5.13), ta nhận được:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)+\frac{h}{3}(y_2+4y_3+y_4)+...+\frac{h}{3}(y_{2m-2}+4y_{2m-1}+y_{2m})$$

Hay là: $\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \boxed{\frac{1}{3}}h\sum_{k=1}^{m}(y_{2k-2}+4y_{2k-1}+y_{2k})}$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[(y_0+y_{2m})+4(y_1+y_3+...+y_{2m-1})+2(y_2+y_4+...+y_{2m-2})]$$

hay: $$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \boxed{\frac{1}{3}}h[(y_0+y_{2m})+4\sigma_1+2\sigma_2]} \qquad (5.16)$$

trong đó : $\sigma_1 = y_1+y_3+...+y_{2m-1}$; $\sigma_2 = y_2+y_4+...+y_{2m-2}$.

Do có $\boxed{\frac{1}{3}}$ nên (5.16) được gọi là công thức Simpson $1/3$ tổng quát.

• **Sai số của công thức Simpson tổng quát:**

Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp 4 liên tục trên $[a,b]$ thì do (5.14), sai số của công thức Simpson tổng quát là:

$$R = \int_{x_0}^{x_{2m}} f(x)dx - \frac{h}{3}\sum_{k=1}^{m}(y_{2k-2}+4y_{2k-1}+y_{2k}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\left(\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)dx - \frac{h}{3}(y_{2k-2}+4y_{2k-1}+y_{2k})\right) =$$

$$\boxed{R \underset{(5.14)}{=} -\frac{h^5}{90}\sum_{k=1}^{m} f^{(4)}(c_k)} \text{ với } c_k \in (x_{2k-2}, x_{2k}) \qquad (5.17)$$

Lập luận tương tự trường hợp công thức hình thang tổng quát, vì $f^{(4)}(x)$, theo giả thiết, liên tục trên $[a,b]$, nên tìm được điểm $c \in [a,b]$ sao cho:

$$f^{(4)}(c) = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f^{(4)}(c_k) \Rightarrow \sum_{k=1}^{m} f^{(4)}(c_k) = mf^{(4)}(c)$$

Thay vào (5.17), nhận được: (chú ý: $h=\dfrac{b-a}{n}=\dfrac{b-a}{2m}$)

$$\boxed{R=-\frac{mh^5}{90}f^{(4)}(c)=-\frac{(b-a)h^4}{180}f^{(4)}(c)},\ c\in[a,b] \tag{5.18}$$

Tóm lại, với giả thiết hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp bốn liên tục trên $[a,b]$ và chia đoạn lấy tích phân $[a,b]$ thành $n=2m$ đoạn bằng nhau, có độ dài $h=\dfrac{b-a}{n}=\dfrac{b-a}{2m}$ ta có công thức Simpson tổng quát sau:

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{h}{3}[(y_0+y_{2m})+4\sigma_1+2\sigma_2]-\frac{(b-a)h^4}{180}f^{(4)}(c)\,,c\in[a,b] \tag{5.19}$$

trong đó: $\boxed{\sigma_1=y_1+y_3+...+y_{2m-1};\ \ \sigma_2=y_2+y_4+...+y_{2m-2}}$

Nhận xét:

1. Từ (5.12) và (5.19), dựa vào 2 sai số, dễ thấy rằng công thức Simpson tổng quát có độ chính xác cao hơn công thức hình thang tổng quát, nếu bước h chọn như nhau.
2. Tính sai số của công thức Simpson tổng quát bằng (5.19) đòi hỏi phải biết $f^{(4)}(x)$, nghĩa là phải biết biểu thức giải tích của hàm số $y=f(x)$. Nhưng trong thực hành, thường chỉ biết hàm số $y=f(x)$ dưới dạng bảng, do đó người ta thường xác định gần đúng sai số của công thức Simpson tổng quát như sau: giả sử trên $[a,b]$, đạo hàm $f^{(4)}(x)$ ít biến đổi, do (5.19), nhận được biểu thức gần đúng của sai số phải tìm là: $R=Mh^4$, trong đó M xem là hằng số. Gọi $I_s(h)$ và $I_s(\frac{h}{2})$ là giá trị gần đúng của $I=\int_a^b f(x)dx$ nhận được từ công thức Simp t với bước h và bước $\frac{h}{2}$,

$$\begin{cases} I= \\ I=I_s(\frac{h}{2})+M(\frac{h}{2})^4 \end{cases}$$

Từ c $I_s(h)=\dfrac{15}{16}Mh^4\Rightarrow\dfrac{Mh^4}{16}=\dfrac{1}{15}\left[I_s(\frac{h}{2})-I_s(h)\right]$, và: $$\left|I - I_s\left(\frac{h}{2}\right)\right| = \left|\frac{Mh^4}{16}\right| \approx \frac{1}{15}\left|I_s\left(\frac{h}{2}\right) - I_s(h)\right| \qquad (5.20)$$

Lập luận hoàn toàn tương tự, đối với công thức hình thang tổng quát, với giả thiết đạo hàm $f''(x)$ ít biến đổi trên $[a,b]$, ta có công thức thực hành tính sai số:

$$\left|I - I_T\left(\frac{h}{2}\right)\right| \approx \frac{1}{3}\left|I_T\left(\frac{h}{2}\right) - I_T(h)\right| \qquad (5.21)$$

trong đó $I_T(h)$ và $I_T(\frac{h}{2})$ là giá trị gần đúng của $I = \int_a^b f(x)dx$ nhận được từ công thức hình thang tổng quát với bước h và bước $\frac{h}{2}$.

Thí dụ 5.2 Dùng công thức hình thang tổng quát và công thức Simpson tổng quát với $n = 10$, tính gần đúng: $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$

Đánh giá sai số của những giá trị gần đúng nhận được.

Giải

Ta có: $$h = \frac{1-0}{10} = 0,1$$

Kết quả tính toán xem trong bảng sau.

I	x_i	$y_{2,j-1}$	y_{2j}
0	0		$\boxed{y_0 = 1,00000}$
1	0,1	0,90909	
2	0,2		0,83333
3	0,3	0,76923	
4	0,4		0,71429
5	0,5	0,66667	
6	0,6		0,62500
7	0,7	0,58824	
8	0,8		0,55556
9	0,9	0,52632	
10	1,0		$\boxed{y_{10} = 0,50000}$
$\sum$		$\sigma_1 = 3,45955$	$\sigma_2 = 2,72818$

• Nếu dùng công thức hình thang tổng quát (5.9), ta có:

$$I \approx 0,1(\frac{1,00000+0,50000}{2}+0,90909+0,83333+0,76923+0,71429+$$
$$+0,66667+0,62500+0,58824+0,55556+0,52632)=0,69377$$

Sai số R được xác định bởi (5.11). Ta có:

$$f(x)=\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}$$
$$f'(x)=-(1+x)^{-2}$$
$$f''(x)=(-1)(-2)(1+x)^{-3}=\frac{2}{(1+x)^3}$$

Từ đó: $\max\limits_{x\in[0,1]}|f''(x)|=2$ và $|R|\le\frac{(b-a)h^2}{12}\max\limits_{x\in[0,1]}|f''(x)|$,

$$|R|\le\frac{2.(0,1)^2}{12}(1-0)=0,00167\approx 0,002$$

Vậy: $I=0,694\pm 0,002$

• Nếu dùng công thức Simpson tổng quát (5.16), ta có:

$$I\approx\frac{0,1}{3}(1,00000+0,50000+4.3,45955+2.2,72818)$$
$$=0,69315$$

Sai số R được xác định bởi (5.18). Vì:

$$f'''(x)=(-1)(-2)(-3)(1+x)^{-4}$$
$$f^{(4)}(x)=(-1)(-2)(-3)(-4)(1+x)^{-5}=\frac{24}{(1+x)^5}$$

nên: $\max\limits_{x\in[0,1]}\left|f^{(4)}(x)\right|=24$ và $|R|\le\frac{(b-a)h^4}{180}\max\limits_{x\in[0,1]}\left|f^{(4)}(x)\right|$,

$$|R|\le\frac{24.(0,1)^4}{180}(1-0)=1,3.10^{-5}\approx 0,00002$$

Vậy: $I=0,69315\pm 0,00002$.

Trong thực hành bằng excel: Ta làm gọn như bảng sau:

	A	B	C	D	E
1		a=0	b=1	n=10	
2		h=0.1			
3		x_i	f(x)		
4	0	0	1		
5	1	0.1	0.909091		

6	2	0.2	0.833333	5.469697	5.469697
7	3	0.3	0.769231	5.011655	
8	4	0.4	0.714286	4.624542	4.624542
9	5	0.5	0.666667	4.29304	
10	6	0.6	0.625	4.005952	4.005952
11	7	0.7	0.588235	3.754902	
12	8	0.8	0.555556	3.533497	3.533497
13	9	0.9	0.526316	3.336773	
14	10	1	0.5	3.160819	3.160819
			Σ	1.239696	0.69315

Từ ô C4 ta gài công thức f(x), sau đó ta kéo thả công thức xuống C14.

Sau đó dùng $\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \boxed{\frac{1}{3}}h\sum_{k=1}^{m}(y_{2k-2}+4y_{2k-1}+y_{2k})}$ để gài công thức này ở ô D6, kéo thả xuống D14, nếu lấy sum thì I=1.239696, sẽ không đúng, ta phải delete các ô xen kẽ như cột E thì I=0.69315.

Bấm máy 570 MS:

- Cách bấm máy 570MS: Nhập biểu thức: $Y = \dfrac{1}{1+X}$,

1. $\boxed{Alpha}\boxed{Y}\boxed{Alpha}\boxed{=}\boxed{1}\boxed{\div}\boxed{(}1+\boxed{Alpha}X\boxed{)}$, **không bấm** $\boxed{=}$

2.Bấm ngay $\boxed{\uparrow}\boxed{Solved}$ $Y?$ $\boxed{\nabla}$,

3. $X?$ nhập **0.1**$\boxed{=}$

4. $\boxed{\Delta}$

5. $Y?$ $\boxed{\uparrow}\boxed{Solved}$ $\Rightarrow$ **Y=0.909090**, ghi ra giấy.

Tiếp tục lại quá trình từ bước 3, cho $X?$ nhập **0.2**$\boxed{=}$, ta có

$Y?$ $\boxed{\uparrow}\boxed{Solved}$ $\Rightarrow$ **Y=0.83333**, ghi ra giấy.

Tiếp tục lại quá trình từ bước 3, cho $X?$ nhập **0.3**$\boxed{=}$, ta có

$Y?$ $\boxed{\uparrow}\boxed{Solved}$ $\Rightarrow$ Y=0.769231, ghi ra giấy.

Tiếp tục lại quá trình từ bước 3, cho $X?$ nhập **1**$\boxed{=}$, ta có

$Y?$ $\boxed{\uparrow}\boxed{Solved}$ $\Rightarrow$ Y=0.5, ghi ra giấy.

Sau khi ghi ra giấy 11 giá trị trên, ta bắt đầu tính đến cột E bằng công thức: $(y_{2k-2}+4y_{2k-1}+y_{2k})$

$$+\begin{Bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{4\times0.909091} \\ \mathbf{0.833333} \end{Bmatrix} = 5.469697$$, lưu vào $\boxed{M+}$ (trước đó phải xóa $\boxed{M+}$)

$$+\begin{Bmatrix} \mathbf{0.833333} \\ \mathbf{4\times0.769231} \\ \mathbf{0.714286} \end{Bmatrix} = 4.624542$$, lưu vào $\boxed{M+}$

$$+\begin{Bmatrix} \mathbf{0.555556} \\ \mathbf{4\times0.526316} \\ \mathbf{0.5} \end{Bmatrix} = 3.160819$$, lưu vào $\boxed{M+}$

Sau khi lưu 5 giá trị vào $\boxed{M+}$, tiếp theo $\boxed{RCL}$ $\boxed{M+}$ = 20.79451

Sau đó ta nhân với h và chia cho 3 thì ra kết quả 0.69315

Thí dụ 5.3 Dùng công thức hình thang tổng quát và công thức Simpson tổng quát $1/3$, với n=10.

Tính gần đúng: $I = \int_0^1 \frac{1}{1+\ln(x+1)} dx =$ 0.73716 (chính xác)

Giải

Ta có: $h = \frac{1-0}{10} = 0.1$

1/(1+ln(x+1))			
	0	1	10
	0.1		
i	xi	y2i-1	i
0	0		1
1	0.1	0.912983	
2	0.2		0.845794
3	0.3	0.792164	
4	0.4		0.748239
5	0.5	0.711508	
6	0.6		0.68027
7	0.7	0.653327	
8	0.8		0.629808
9	0.9	0.609068	
10	1		0.590616
		3.67905	2.90411