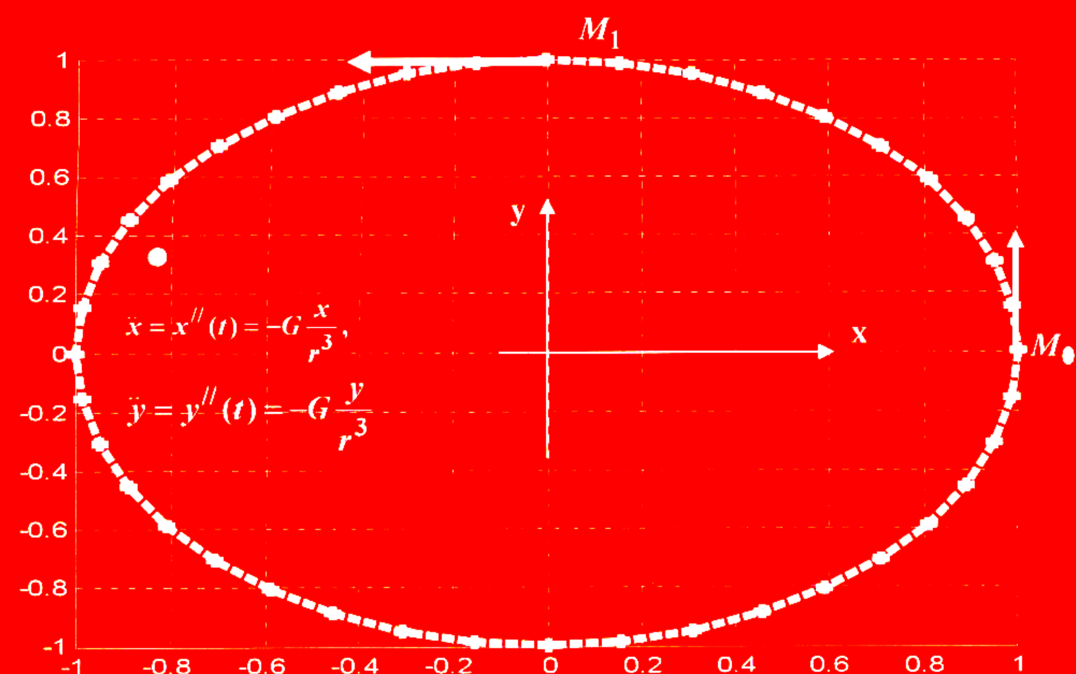
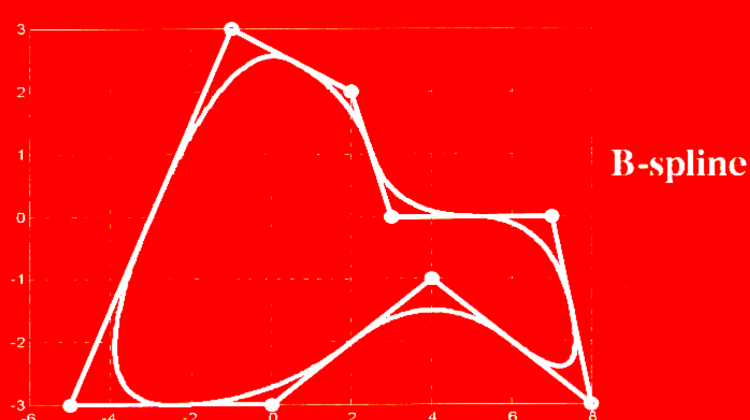
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHIỆP TP.HCM
TS. Nguyễn Phú Vinh (chủ biên)
Tập thể Giáo viên Tổ toán Khoa KHCB

GIÁO TRÌNH PHƯƠNG PHÁP TÍNH

(COMPUTATIONAL MATHEMATICS)

BẬC ĐẠI HỌC VÀ CAO ĐẲNG

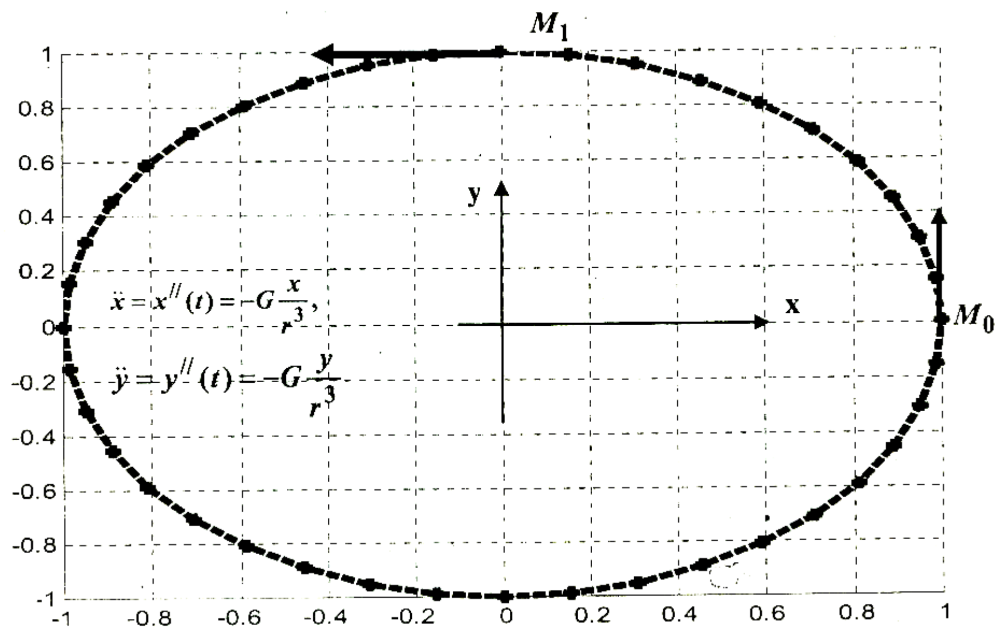


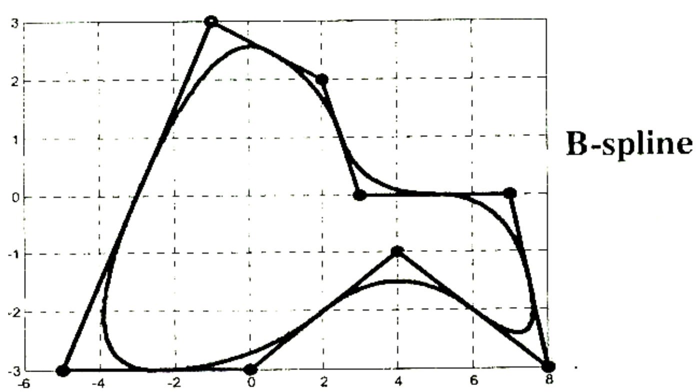


Lưu hành nội bộ - 2009

TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHIỆP TP.HCM
TS. Nguyễn Phú Vinh

GIÁO TRÌNH
PHƯƠNG PHÁP TÍNH
(COMPUTATIONAL MATHEMATICS)
BẬC ĐẠI HỌC VÀ CAO ĐẲNG





Lưu hành nội bộ -2009

LỜI NÓI ĐẦU

Phương pháp tính là môn toán chuyên đề dành cho khối kỹ thuật nhưng sinh viên khối kinh tế có thể tham khảo thêm môn học này như là môn học nhiệm ý, nếu như đã học xong các môn: xác suất thống kê cũng như qui hoạch tuyến tính. Đây là sách giáo khoa dùng song song với cuốn bài tập, ngân hàng câu hỏi thi tự luận và tiểu luận của cùng tác giả

Vì đây là môn học tính toán, nên nhóm tác giả muốn truyền tải đến sinh viên theo đúng tinh thần thuật toán (algorithm), và lấy excel làm công cụ chính để cài đạt thuật toán, vì bản chất của excel được thiết kế một cách hoàn mỹ theo cấu trúc con trỏ tuyến tính theo chiều ngang cũng như chiều dọc, rất phù hợp với các algorithm của phương pháp tính, hơn nữa excel (luôn có trong bộ Microsoft Office) thì quá phổ biến đối với sinh viên. Hầu hết các kết quả trong sách đều được gài công thức theo phương thức trên, và sau đó là kỹ thuật kéo thả chuột để ra các bảng kết quả. Tất nhiên một số kết quả qúa mềm và nhạy cảm thì đòi hỏi ta phải lập trình bằng Matlab hay VB.

Sách chia làm 8 chương, chương 1, sinh viên tự đọc, các chương còn lại, sinh viên cần nhớ các công thức, và các bước thuật toán, để kiểm tra lại các kết quả trong sách, bằng cách dùng excel hay máy tính 570MS. Chương 3, 4, 5, 6, 7, 8 có một số bài toán mở rộng dành cho sinh viên giỏi muốn nghiên cứu thêm hay để làm tiểu luận.

Tác giả rất cảm ơn **Thầy TS.Hiệu Trưởng Tạ Xuân Tề, Ngài** đã khích lệ và động viên cùng tất cả những cao kiến đóng góp quý báu cho lần xuất bản tập sách này, kịp ra mát độc giả trong năm học mới 2009-2010, mong ràng độc giả cũng nhiệt tình góp ý phê bình để cuốn sách ngày một hoàn thiện hơn.

Tp.HCM, ngày 01 tháng 04 năm 2009

Tiến Sĩ: Nguyễn Phú Vinh

MỤC LỤC

CHƯƠNG 1
SỐ XẤP XỈ VÀ SAI SỐ

§1. SỐ XẤP XỈ, SAI SỐ TUYỆT ĐỐI VÀ TƯƠNG ĐỐI

1.1 Số xấp xỉ

Nói chung, giá trị của các đại lượng dùng trong tính toán không được biết một cách chính xác. Chẳng hạn: giá trị của các đại lượng nhận được bàng phép đo, bàng thí nghiệm; giá trị của các số hữu tỷ 1/3, 1/7, 20/3, ...; giá trị của các số vô tỷ e, π, $\sqrt{2}$, ... Vì vậy trong tính toán, chúng ta làm việc chủ yếu với giá trị xấp xỉ (còn gọi là giá trị gần đúng) của các đại lượng.

Định nghĩa 1.1 a gọi là số xấp xỉ của số đúng A, ký hiệu $a \approx A$, nếu a khác A không đáng kể và được dùng thay cho A trong tính toán.

Nếu $a<A$ thì a gọi là xấp xỉ thiếu của A. Nếu $a>A$ thì a gọi là xấp xỉ thừa của A.

Thí dụ 1.1. Đối với số π thì 3,14 là xấp xỉ thiếu của π, còn 3,15 là xấp xỉ thừa của π, vì dễ dàng thấy ràng

$$3,14 < \pi < 3.15$$

1.2 Sai số tuyệt đối

Định nghĩa 1.2 Hiệu $\Delta a = A - a$ (hoặc $\Delta a = a - A$) gọi là sai số của xấp xỉ a. Trị tuyệt đối:

$$\Delta = |\Delta a| = |A - a| \qquad (1.1)$$

Gọi là sai số tuyệt đối của số xấp xỉ a.

Thông thường, không biết số đúng A, do đó không xác định được sai số tuyệt đối của số xấp xỉ a. Vì vậy, cùng với khái niệm sai số tuyệt đối người ta đưa ra khái niệm sai số tuyệt đối giới hạn.

Định nghĩa 1.3 Sai số tuyệt đối giới hạn của số xấp xỉ a là số không nhỏ hơn sai số tuyệt đối của số xấp xỉ a.

Do đó, nếu gọi Δ_a là sai số tuyệt đối giới hạn của số xấp xỉ a thì:

$$\Delta = |\Delta| = |A - a| \le \Delta_a \qquad (1.2)$$

Từ đó, suy ra:

$$a - \Delta_a \le A \le a + \Delta_a \qquad (1.3)$$

Vậy $a - \Delta_a$ là xấp xỉ thiếu của A, còn $a + \Delta_a$ là xấp xỉ thừa của A. Để đơn giản, thường qui ước viết (1.3) dưới dạng.

$$A = a \pm \Delta_a \qquad (1.4)$$

Thí dụ 1.2 Xác định sai số tuyệt đối giới hạn của số xấp xỉ a=3,14 thay cho số π.

Giải.

Vì: $3,14 < \pi < 3,15$ nên:

$$|a - \pi| < 0,01$$

và có thể chọn $\Delta_a = 0,01$.

Nếu chú ý rằng: $3,14 < \pi < 3,142$ thì

$$|a - \pi| < 0,002$$

Và do đó nhận giá trị tốt hơn $\Delta_a = 0,002$; ...

Qua thí dụ trên, thấy rằng định nghĩa sai số tuyệt đối giới hạn không đơn trị: sai số tuyệt đối giới hạn của số xấp xỉ a là số bất kỳ trong tập vô hạn các số không âm Δ_a thỏa mãn (1.2). Vì vậy, trong thực hành, người ta thường chọn Δ_a là số nhỏ nhất có thể được, thỏa mãn (1.2).

1.3 Sai số tương đối

Sai số tuyệt đối hoạc sai số tuyệt đối giới hạn không thể hiện một cách đầy đủ mức độ chính xác của phép đo hoạc tính toán. Chẳng hạn, đo chiều dài hai cái trục, nhận được những kết quả sau:

$$l_1 = 112,25cm \pm\ 0,1cm$$

$$l_2 = 7,3cm \pm\ 0,1cm$$

Tuy sai số tuyệt đối giới hạn của hai phép đo trên bàng nhau nhưng rõ ràng phép đo l_1 chính xác hơn phép đo l_2. Để thể hiện điều đó người ta đưa vào những khái niệm sau:

Định nghĩa 1.4 Sai số tương đối của số xấp xỉ a, ký hiệu δ, là:

$$\delta = \frac{\Delta}{|A|} = \frac{|A - a|}{|A|} \qquad (1.5)$$

Với giả thiết $A \neq 0$. Từ đó: $\Delta = |A| \cdot \delta$.

Định nghĩa 1.5 Sai số tương đối của số xấp xỉ a, ký hiệu δ_a, là số không nhỏ hơn sai số tương đối của số xấp xỉ a. Do đó:

$$\delta \leq \delta_a \qquad (1.6)$$

nghĩa là $$\frac{\Delta}{|A|} \leq \delta_a$$

Từ đó: $\Delta \leq |A| \cdot \delta_a$ và có thể chọn:

$$\Delta_a = |A| \cdot \delta_a \qquad (1.7)$$

Vì thông thường không biết số đúng A cho nên trong thực hành, thay cho (1.7), người ta thường dùng công thức:

$$\Delta_a = |a|\,\delta_a \tag{1.8}$$

Chú ý rằng sai số tuyệt đối và sai số tương đối giới hạn có cùng thứ nguyên với số xấp xỉ, còn sai số tương đối và sai số tương đối giới hạn không có thứ nguyên.

Thay (1.8) vào (1.4), ta có:

$$A = a(1 \pm \delta_a) \tag{1.9}$$

Trở lại kết quả phép đo chiều dài của hai cái trục nêu trên, dễ thấy rằng sai số tương đối giới hạn của phép đo l_1, nhỏ hơn sai số tương đối giới hạn của phép đo l_2.

§2 CÁCH VIẾT SỐ XẤP XỈ

2.1 Chữ số có nghĩa

Một số viết ở dạng thập phân có thể gồm nhiều chữ số. Chẳng hạn 20,25 có 4 chữ số; 0,03047 có 6 chữ số.

Định nghĩa 1.6 Những chữ số có nghĩa của một số là những chữ số của số đó kể từ chữ số khác không đầu tiên tính từ trái sang phải.

Thí dụ 1.3 Số 20,25 có 4 chữ số có nghĩa. Số 0,03047 cũng có 4 chữ số có nghĩa.

2.2 Chữ số đáng tin

Biết rằng mọi số thực a có thể biểu diễn dưới dạng thập phân hữu hạn hoạc vô hạn:

$$\begin{aligned} a = \pm(\alpha_m 10^m + \alpha_{m-1}10^{m-1} + \alpha_{m-2}10^{m-2} + \cdots + \\ + \alpha_{m-n+1}10^{m-n+1}) \end{aligned} \tag{1.10}$$

Trong đó m là số nguyên, $0 \le \alpha_i \le 9$ $(i = m-1, m-2, \ldots), 0 \le \alpha_m \le 9$.

Chẳng hạn:

$$324,59 = 3\cdot10^2 + 2\cdot10^1 + 4\cdot10^0 + 5\cdot10^{-1} + 9\cdot10^{-2}$$

Bây giờ, giả sử số a biểu diễn dưới dạng (1.10) là số xấp xỉ của số đúng A với sai số tuyệt đối giới hạn là Δ_a.

Định nghĩa 1.7 Trong (1.10), chữ số α_{m-n+1} gọi là chữ số đáng tin nếu:

$$\Delta_a \le \frac{1}{2} \cdot 10^{m-n+1} \qquad (1.11)$$

và gọi là chữ số nghi ngờ nếu:

$$\Delta_a > \frac{1}{2} \cdot 10^{m-n+1} \qquad (1.12)$$

Thí dụ 1.4 Số xấp xỉ $a = 3,7284$ với $\Delta_a = 0,0047$ có 3 chữ số đáng tin là 3, 7, 2 và hai chữ số nghi ngờ đó là 8, 4.

Rõ ràng nếu α_{m-n+1} là chữ số đáng tin thì những chữ số ở bên trái nó cũng là những chữ số đáng tin, nếu α_{m-n+1} là chữ số nghi ngờ thì những chữ số bên phải nó cũng là những chữ số nghi ngờ.

2.3 Cách viết số xấp xỉ

Cho số xấp xỉ a của số đúng A với sai số tuyệt đối giới hạn là Δ_a. Có hai cách viết số xấp xỉ:

Cách thứ nhất là viết số xấp xỉ a kèm theo sai số tuyệt đối giới hạn: $a \pm \Delta_a$, chẳng hạn $17,358 \pm 0,003$. Cách này thường được dùng để biểu diễn kết quả của phép tính toán hoặc phép đo.

Cách thứ hai là viết số xấp xỉ a theo qui ước: mọi chữ số có nghĩa đồng thời là những chữ số đáng tin. Điều đó có nghĩa là sai số tuyệt đối giới hạn Δ_a không lớn hơn một nữa đơn vị của chữ số ở hàng cuối cùng bên phải. Chẳng hạn $a = 23,54$ thì $\Delta \le (1/2) \cdot 10^{-2}$. Trong các bảng số thường dùng như bảng lôgarit, bảng các hàm số lượng giác, ... người ta viết các số xấp xỉ theo cách thứ hai

§3. SỰ QUY TRÒN SỐ VÀ SAI SỐ QUY TRÒN

Khi tiến hành tính toán, nếu số a có quá nhiều chữ số, không tiện cho việc tính toán hoặc không ghi hết được vào máy tính, người ta phải bỏ đi một vài chữ số ở cuối và nhận được số a_1. Việc làm đó là sự quy tròn số. Trị tuyệt đối của hiệu $a_1 - a$ gọi là sai số quy tròn tuyệt đối, ký hiệu là

$$\theta_{a_1} = |a_1 - a|$$

Quy tắc quy tròn số thường được dùng nhằm đảm bảo cho sai số quy tròn tuyệt đối không lớn hơn một nữa đơn vị của chữ số ở hàng giữ lại cuối cùng bên phải. Điều đó có nghĩa là: nếu chữ số bỏ đi đầu tiên ≥ 5 thì thêm vào chữ số giữ lại cuối cùng bên phải một đơn vị; nếu chữ số bỏ đi <5 thì để nguyên chữ số giữ lại cuối cùng bên phải.

Thí dụ 1.5 Quy tròn số $\pi = 3,1415926535...$ đến chữ số có nghĩa thứ 5, thứ 4 và thứ 3, nhận được các số xấp xỉ 3,1416; 3,142; 3,14 với sai số quy tròn tuyệt đối không lớn hơn $\frac{1}{2}\cdot 10^{-4}$, $\frac{1}{2}\cdot 10^{-3}$ và $\frac{1}{2}\cdot 10^{-2}$.

Bây giờ giả sử a là số xấp xỉ của số đúng A với sai số tuyệt đối giới hạn Δ_a. Ta quy tròn số a thành a_1. Khi đó, ta có:

$$\begin{aligned}|A-a_1| &= |A-a+a-a_1|\\ &\le |A-a|+|a_1-a| \le \Delta_a+\theta_{a_1}\end{aligned}$$

Vậy có thể chọn sai số tuyệt đối giới hạn Δ_{a_1} của số đã quy tròn a_1 là:

$$\Delta_{a_1} = \Delta_a + \theta_{a_1}$$

Do đó: $\Delta_{a_1} > \Delta_a$ và có thể xảy ra trường hợp một chữ số ở một hàng nào đó vốn là đáng tin, sau khi quy tròn lại trở nên nghi ngờ

Thí dụ 1.6 Cho $a = 0,35$; $\Delta_a = 0,003$. Khi đó 3 và 5 là những chữ số đáng tin. Sau khi quy tròn thành $a_1 = 0,4$, ta có:

$$\Delta_{a_1} = \Delta_a + \theta_{a_1} = 0,003 + 0,05 = 0,053 > \frac{1}{2}\cdot 10^{-1}$$

Vậy chữ số 4 trong a_1 là chữ số nghi ngờ. Trong trường hợp này hoặc người ta không quy tròn nữa hoặc quy tròn nhưng viết số đã quy tròn a_1 dưới dạng sau:

$$a_1 = 0,4 \pm 0,052$$

(nghĩa là số xấp xỉ a_1 được viết theo cách thứ nhất).

§4. XÁC ĐỊNH SAI SỐ CỦA HÀM SỐ BIẾT SAI SỐ CỦA CÁC ĐỐI SỐ

4.1 Công thức tổng quát của sai số

Cho hàm số khả vi:

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

và giả sử biết sai số tuyệt đối giới hạn Δ_{x_i} $(i = \overline{1,n})$ của các đối số x_i $(i = \overline{1,n})$, hãy xác định sai số tuyệt đối giới hạn Δ_u và sai số tương đối giới hạn δ_u của hàm số u.

Gọi U là giá trị đúng của số xấp xỉ u, X_i là giá trị đúng của số xấp xỉ x_i ($i=\overline{1,n}$), ta có

$$|U-u|=|\Delta u|=|f(X_1,X_2,\ldots,X_n)-f(x_1,x_2,\ldots,x_n)|$$

$$\approx|u|=\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_i-x_i)\right|= \qquad (1.13)$$

$$=\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i\right|\le\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right||\Delta x_i|\le\sum\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|\Delta_{x_i}$$

Vậy có thể lấy:

$$\Delta_u=\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta_{x_i}=\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\Delta_{x_i} \qquad (1.14)$$

Chia hai vế của (1.13) cho $|u|$ nhận được đánh giá sau đối với sai số tương đối của hàm số u:

$$\delta=\frac{|\Delta u|}{|u|}\le\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{u}\right|\Delta_{x_i}=\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\ln f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\right|\Delta_{x_i}$$

Do đó:

$$\delta_u=\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\ln u\right|\Delta_{x_i} \qquad (1.15)$$

Thí dụ 1.7: Tính sai số tuyệt đối giới hạn và sai số tương đối giới hạn của thể tích hình cầu $V=(1/6)\pi d^3$, biết đường kính $d=3{,}70cm\pm0{,}05cm$ và $\pi\approx3{,}14$.

Giải.

Xem π và d là những đối số của hàm số V, ta có:

$$\frac{\partial V}{\partial\pi}=\frac{1}{6}d^3=\frac{1}{6}(3{,}70)^3=8{,}4422$$

$$\frac{\partial V}{\partial d}=\frac{1}{2}\pi d^2=\frac{1}{2}\cdot3{,}14\cdot(3{,}70)^2=21{,}4933$$

Dùng công thức (1.14), nhận được:

$$\Delta_V=\left|\frac{\partial V}{\partial\pi}\right|\Delta_\pi+\left|\frac{\partial V}{\partial d}\right|\Delta_d=8{,}4422\cdot0{,}0016+21{,}4933\cdot0{,}005$$

$$=1{,}0882$$

Do đó: $V = \frac{1}{6}\pi d^3 = 26,5084cm^3 \pm 1,0882cm^3$ và :

$$\delta_V = \frac{1,0882}{26,5084} = 0,04105 \approx 4,1\%$$

4.2 Sai số của tổng đại số

Xét hàm số:

$$u = \pm x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_n$$

Áp dụng công thức (1.14), nhận được:

$$\Delta_u = \Delta_{x_1} + \Delta_{x2} + \cdots + \Delta_{x_n} \quad (1.16)$$

Từ đó:

$$\delta_u = \frac{\Delta_u}{|u|} = \frac{\Delta_{x_1} + \Delta_{x2} + \cdots + \Delta_{x_n}}{|u|} \quad (1.17)$$

Chú ý về sai số của hiệu. Xét hàm số:

$$u = x_1 - x_2$$

với $x_1 > 0, x_2 > 0$ là hai số xấp xỉ. Khi đó, theo (1.16) và (1.17), có:

$$\Delta_u = \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2} \quad (1.18)$$

và

$$\delta_u = \frac{\Delta_{x_1} + \Delta_{x_2}}{|x_1 - x_2|} \quad (1.19)$$

Vì vậy cần đặc biệt lưu ý hiện tượng mất chính xác khi trừ hai số: nếu hai số xấp xỉ x_1 và x_2 ($x_1 > 0$, $x_2 > 0$) có giá trị gần bằng nhau thì $|x_1 - x_2|$ sẽ nhỏ; từ (1.19) dễ thấy rằng sai số tương đối giới hạn của số trừ và của số bị trừ vẫn nhỏ.

Thí dụ 1.8 Hãy tính hiệu của hai số xấp xỉ viết theo cách thứ hai: $x_1 = 47,132$ và $x_2 = 47,111$ và xác định sai số tương đối giới hạn của x_1, của x_2 và của hiệu.

Giải.

Ta có

$$u = x_1 - x_2 = 47,132 - 47,111 = 0,021$$

Theo (1.18), sai số tuyệt đối giới hạn Δ_u được xác định bởi:

$$\Delta_u = \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2} = \frac{1}{2}10^{-3} + \frac{1}{2}10^{-3} = 0,001$$

Do đó hiệu $u = 0,021$ chỉ có hai chữ số đáng tin, còn 1 là chữ số nghi ngờ.

Dùng (1.8) và (1.19) ta có

$$\delta_{x_1} = \frac{0,0005}{47,123} \approx 0,00001$$

$$\delta_{x_2} = \frac{0,0005}{47,111} \approx 0,00001$$

$$\delta_u = \frac{0,001}{0,021} \approx 0,05$$

Như vậy, sai số tương đối giới hạn của hiệu lớn hơn sai số tương đối giới hạn của số bị trừ và của số trừ khoảng 5000 lần. Vì vậy, khi tính toán, người ta cố gắng tránh phép trừ hai số dương có giá trị gần bằng nhau bằng cách biến đổi biểu thức của hiệu (trong trường hợp có thể được).

Thí dụ 1.9 Tính hiệu

$$u = \sqrt{2,01} - \sqrt{2}$$

với ba chữ số đáng tin.

Giải

Vì $\sqrt{2,01} = 1,41774469...; \sqrt{2} = 1,41421356...$

nên ta có thể xem

$$\sqrt{2,01} \approx 1,41774; \sqrt{2} \approx 1,41421 \text{ và:}$$

$$u = 1,41774 - 1,41421 = 0,00353$$

Có thể thu được kết quả trên mà chỉ cần lấy:

$$\sqrt{2,01} \approx 1,42; \sqrt{2} \approx 1,41$$

nếu viết hiệu u dưới dạng

$$u = \frac{\left(\sqrt{2,01} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2,01} + \sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{2,01} + \sqrt{2}\right)} = \frac{2,01 - 2}{\sqrt{2,01} + \sqrt{2}}$$

$$= \frac{0,01}{\sqrt{2,01} + \sqrt{2}} = \frac{0,01}{1,42 + 1,41} = \frac{0,01}{2,83} = 0,00353$$

Từ thí dụ trên, rút ra quy tắc thực hành như sau: nếu bắt buộc phải tính hiệu của hai số dương có giá trị gần bằng nhau, cần lấy số trừ và số bị trừ nhiều chữ số đáng tin cậy để dự trữ (nếu điều đó có thể làm được). Chẳng hạn, nếu biết rằng khi trừ hai số dương x_1 và x_2, m chữ số có nghĩa đầu tiên bị mất và kết quả cần có n chữ số đáng tin thì cần lấy x_1 và x_2 có $m + n$ chữ số đáng tin.

4.3 Sai số của tích

Xét hàm số

$$u = x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$$

Áp dụng công thức (1.15), nhận được:

$$\delta_u = \delta_{x_1} + \delta_{x_2} + \cdots + \delta_{x_n} \qquad (1.20)$$

Từ đó

$$\Delta_u = |u|\,\delta_u \qquad (1.21)$$

Đạc biệt, nếu $u = x^m$ (m nguyên dương) thì:

$$\delta_u = m\delta_x \qquad (1.22)$$

4.4 Sai số của thương

Xét hàm số $u = \dfrac{x_1}{x_2}$ $(x_2 \neq 0)$

Áp dụng công thức (1.15), ta có

$$\delta_u = \delta_{x_1} + \delta_{x_2} \qquad (1.23)$$

Từ đó

$$\Delta_u = |u|\,\delta_u \qquad (1.24)$$

BÀI TẬP

1. Khi xác định hằng số khí của không khí, nhận được $R = 29,25$. Hãy xác định các giới hạn của R biết sai số tương đối giới hạn của giá trị R là 1%.

2. Đo trọng lượng của 1 dm^3 nước ở $0^o C$ nhận được:

$$p = 999,847g \pm 0,001g$$

Hãy xác định sai số tương đối giới hạn của phép đo trên.

3. Cho: a) $a_1 = 1,3241$; $\Delta_{a_1} = 0,45 \cdot 10^{-4}$

b) $a_2 = 0,5364$; $\Delta_{a_2} = 0,5 \cdot 10^{-3}$

c) $a_3 = 0,1189$; $\Delta_{a_3} = 0,78 \cdot 10^{-3}$

Hãy xác định các chữ số đáng tin trong a_1, a_2 và a_3.

4. Cho a) $a_1 = 23,8541$; $\delta_{a_1} = 0,3 \cdot 10^{-3}$

b) $a_2 = 5,3442$; $\delta_{a_2} = 0,1 \cdot 10^{-2}$

c) $a_3 = 0,4795$; $\delta_{a_3} = 0,0005$

Hãy xác định các chữ số đáng tin trong a_1, a_2 và a_3.

5. Cho số $e = 2,718281828459045...$ Hãy quy tròn số e đến chữ số có nghĩa thou 13, thứ 12 và thứ 11 và xác định sai số quy tròn tuyệt đối.
6. Lấy $a = 2,718$ thay cho số e. Hãy xác định sai số tương đối giới hạn δ_a.
7. Cần tính $\sqrt{2}$ với bao nhiêu chữ số thập phân để sai số không vượt quá 0,0002.
8. Cho số xấp xỉ $a = 68,32$ với sai số tương đối giới hạn là $0,1\%$. Hãy xác định số chữ số đáng tin của số a.
9. Để xác định môđun đàn hồi (môđun lăng) E theo độ võng của thanh cát mạt ngang hình chữ nhật, người ta dùng công thức:

$$E = \frac{1^3 p}{4a^3 bs}$$

Trong đó l-chiều dài của thanh; a và b-chiều rộng và chiều dài của mạt cắt ngang của thanh; s-độ võng; p-tải trọng. Hãy tính sai số tương đối giới hạn khi xác định môđun đàn hồi E, biết $p = 20kg$, $\delta_p = 0,1\%$; $a = 3mm$; $\delta_a = 1\%$; $b = 44mm$; $\delta_b = 1\%$; $l = 50cm$, $\delta_l = 1\%$; $s = 2,5cm$, $\delta_s = 1\%$.

10. Cho hàm số $u = \ln(x_1 + x_2^2)$. Hãy xác định giá trị của hàm số u tại $x_1 = 0,97$, $x_2 = 1,132$, sai số tuyệt đối giới hạn Δ_u và sai số tương đối giới hạn δ_u, biết: mọi chữ số có nghĩa của x_1 và x_2 là những số đáng tin.
11. Hãy tính hiệu của hai số xấp xỉ viết theo cách thứ hai: $x_1 = 5,125$; $x_2 = 5,135$ và xác định sai số tương đối giới hạn của x_1, x_2 và của hiệu.
12. Hãy tính tích u của hai số xấp xỉ viết theo cách thứ hai: $x_1 = 12,2$; $x_2 = 73,56$ và xác định số chữ số đáng tin của tích u.
13. Hãy tính thương $u = x_1 / x_2$ của hai số xấp xỉ viết theo cách thứ hai: $x_1 = 5,735$; $x_2 = 1,23$ và xác định sai số tương đối giới hạn δ_u, sai số tuyệt đối giới hạn Δ_u.

14. Hãy xác định sai số tương đối giới hạn δ_a, sai số tuyệt đối giới hạn Δ_a và chữ số đáng tin của cạnh a của hình vuông, biết diện tích hình vuông $s = 16,45cm^2$ với $\Delta_s = 0,01$.

Đáp số

1. $\Delta_R = 0,03; \quad 29,22 \le R \le 29,28$
2. $\delta_p = 10^{-4}\%$
3. a) 5 b) 3 c) 2
4. a) 3 b) 3 c) 3
5. $2,718281828459; \quad \le \frac{1}{2} \cdot 10^{-12}$

   $2,71828182846; \quad \le \frac{1}{2} \cdot 10^{-11}$

   $2,7182818285; \quad \le \frac{1}{2} \cdot 10^{-10}$
6. $\delta_a = 0,018\%$
7. Ít nhất 5 chữ số thập phân.
8. a có hai chữ số đáng tin.
9. $\delta_E = 0,081 = 8,1\%$.
10. $u = 0,81; \Delta_u = 0,27 \cdot 10^{-2}; \delta_u = 0,33 \cdot 10^{-2}$
11. $u = 0,01; \delta_{x_1} = 0,01\%; \delta_{x_2} = 0,01\%; \delta_u = 10\%$
12. $u = 897,432; \delta_u = 0,0042; \Delta_u \approx 3,8; u = 897 \pm 4$

    (u có hai chữ số đáng tin)
13. $u = 4,66; \delta_u = 0,0042; \Delta_u \approx 0,02$
14. $a = \sqrt{s} = 4,056cm; \delta \approx 0,0003; \Delta_a \approx 0,0012$; a có ba chữ số đáng tin.

CHƯƠNG 2
TÍNH GẦN ĐÚNG NGHIỆM THỰC CỦA PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ VÀ SIÊU VIỆT

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Tìm nghiệm của phương trình:

$$f(\mathrm{x}) = 0 \qquad (2.1)$$

Trong đó f là một hàm số đại số hoặc siêu việt bất kỳ là một bài toán thường gặp trong kỹ thuật. Như đã biết, nếu (2.1) là phương trình đại số bậc n:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (a_0 \neq 0) \qquad (2.2)$$

với n = 1 hoặc n = 2, ta có công thức tính nghiệm của chúng một cách đơn giản. Người ta cũng tìm ra những công thức tính nghiệm của (2.2) khi n = 3 và n = 4, nhưng việc sử dụng chúng khá phức tạp. Còn đối với những phương trình đại số từ bậc năm trở lên thì không có công thức tính nghiệm. Hơn nữa, đối với phương trình siêu việt dạng (2.1) như :

$$\cos x + 1 - 5x = 0$$

thì không có công thức tính nghiệm. Ngoài ra ta thường gặp trường hợp phương trình (2.1) chứa các hệ số chỉ biết một cách gần đúng, khi đó việc xác định chính xác nghiệm của (2.1) không có ý nghĩa. Vì vậy, việc tìm những phương pháp giải gần đúng phương trình đại số và siêu việt cũng như việc đánh giá mức độ chính xác của nghiệm gần đúng tìm được có một vai trò quan trọng.

Trong chương này, ta xét việc tính gần đúng nghiệm thực của phương trình (2.1) với giả thiết hàm số $f(\mathrm{x})$ xác định và liên tục trong một khoảng hữu hạn hoặc vô hạn. Mỗi số thực ξ thoả mãn: $f(\xi) = 0$ gọi là nghiệm thực của phương trình (2.1) hoặc không điểm của hàm số $f(\mathrm{x})$. Ta cũng giả thiết thêm ràng phương trình (2.1) chỉ có nghiệm thực cô lập, nghĩa là với mỗi nghiệm thực của phương trình (2.1) tồn tại một miền lân cận không chứa nghiệm thực khác của phương trình.

Việc tính gần đúng nghiệm thực của phương trình (2.1) được tiến hành theo hai bước:

__Bước 1:__ tìm khoảng cách ly nghiệm, nghĩa là tìm khoảng (a, b) chứa một và chỉ một nghiệm thực của phương trình (2.1).

Bước 2: Xuất phát từ khoảng cách ly nghiệm ở bước 1, tính gần đúng nghiệm thực của phương trình (2.1) đạt độ chính xác yêu cầu bằng một phương pháp gần đúng.

2. KHOẢNG CÁCH LY NGHIỆM

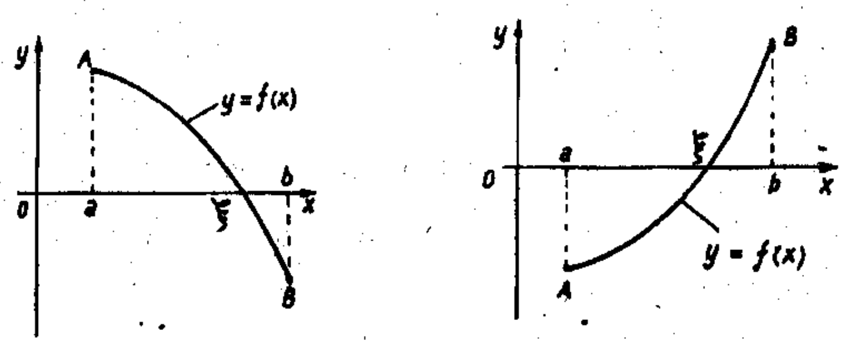
Định lý 2.1 dưới đây (đã biết trong giáo trình Toán học cao cấp) cho ta cách tìm khoảng cách ly nghiệm của phương trình (2.1).

Định lý 2.1: Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trong (a, b), $f(a)$, $f(b) < 0$, $f'(x)$ tồn tại và giữ dấu không đổi trong (a, b) chỉ có một nghiệm thực ξ duy nhất của phương trình (2.1).

Ý nghĩa hình học của định lý 2.1 như sau: một đường cong liền nét

$y = f(x)$, chỉ tăng hoặc chỉ giảm, nối liền hai điểm A(a, $f(a)$) và B(b, $f(b)$) nằm ở hai phía khác nhau của trục Ox, cắt trục Ox tại một điểm duy nhất $x = \xi$ (hình 2.1).

Từ định lý 2.1 suy ra rằng (a, b) là khoảng cách ly nghiệm của phương trình (2.1) nếu $f(a)$, $f(b) < 0$, $f(x)$ tồn tại và giữ dấu không đổi trong (a, b). Để tìm những khoảng cách ly nghiệm của phương trình (2.1) có hai phương pháp: giải tích và hình học.



Hình 2.1

1. Phương pháp giải tích:

Xác định dấu của hàm số $f(x)$ tại các điểm mút của miền xác định của hàm số $f(x)$ và tại các điểm trung gian $x = \alpha_1$, $x = \alpha_2$, ... $x = \alpha_n$. Những điểm này thường được lựa chọn căn cứ vào đặc điểm của hàm số $f(x)$. Mỗi khoảng, ở đó hai điều kiện trên được thoả mãn là một khoảng cách ly nghiệm của phương trình (2.1). Thông thường để tiện, người ta thường dùng quá trình chia đôi, chia khoảng cách xác định hàm số $f(x)$ thành hai, bốn, tám, ... phần bằng nhau và xác định dấu của hàm số $f(x)$ tại hai mút của khoảng xác định và tại các điểm chia.

Chú ý phương trình đại số bậc n (2.2) không nhiều hơn n nghiệm thực, do đó nếu ta đã tìm được n+1 điểm ở đó: $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ lần lượt thay đổi dấu thì điều đó có nghĩa là phương trình (2.2) có n nghiệm thực và từ n+1 điểm trên, ta dễ dàng xác định được n khoảng cách ly nghiệm.

Thí dụ 2.1

Tìm những khoảng cách ly nghiệm của phương trình:

$f(x) \equiv x^3 - 6x + 2 = 0$

Giải:

Thành lập bảng dấu của hàm số $f(x)$:

x	$-\infty$	-3	-2	0	1	2	3	$+\infty$
Dấu của $f(x)$	-	-	+	+	-	-	+	+

Từ bảng trên ta tìm được bốn điểm -3, -2, 1 và 3, ở đó $x^3 - 6x + 2$ lần lượt thay đổi dấu. Kết hợp với điều kiện $f'(x)$ tồn tại và giữ dấu không đổi ta suy ra (-3, -2); (0, 1) và (2, 3) là ba khoảng cách ly nghiệm của phương trình đã cho.

Trong trường hợp $f'(x)$ là một hàm số liên tục và phương trình $f'(x) = 0$ dễ tìm nghiệm, để tìm những khoảng cách ly nghiệm của phương trình (2.1) ta chỉ cần xác định dấu của hàm số $f(x)$ tại hai mút của khoảng xác định và tại các không điểm của đạo hàm $f'(x)$ hoặc tại các điểm gần các không điểm của đạo hàm $f'(x)$.

Thí dụ 2.2

Tìm những khoảng cách ly nghiệm của phương trình:

$$f(x) \equiv 2^x - 5x - 3 = 0$$

Giải:

Ta có $f'(x) = 2^x \ln 2 - 5$. Do đó $f'(x) = 0$ khi:

$2^x \ln 2 - 5 = 0$; $\qquad 2^x \ln 2 = 5$

$x\lg 2 = \lg 5 - \lg \ln 2$

$$x = \frac{\lg 5 - \lg \ln 2}{\lg 2} = \frac{0,6990 + 0,1592}{0,3010} = \frac{0,8582}{0,3010} \approx 2,85$$

Ta thành lập bảng dấu của hàm số $f(x)$ tại hai mút của khoảng xác định và tại hai điểm 2 và 3 gần không điểm của đạo hàm $f'(x)$:

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
Dấu của $f(x)$	+	-	-	+

Từ bảng trên ta suy ra phương trình đã cho hai nghiệm thực. Để tìm được hai khoảng hẹp hơn chứa hai nghiệm thực, ta xét bảng dấu sau:

x	-1	0	2	3	4	5
Dấu của $f(x)$	+	-	-	-	-	+

Vậy khoảng cách ly nghiệm của phương trình đã cho là (-1, 0) và (4, 5).

2. Phương pháp hình học:

Trong trường hợp đồ thị của hàm số $y = f(x)$ dễ vẽ, để tìm những khoảng cách ly nghiệm của phương trình (2.1), ta vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ trên giấy kẻ ô vuông. Hoành độ các giao điểm của đồ thị với trục hoành Ox cho ta các giá trị thô của các nghiệm thực của phương trình (2.1). Từ đồ thị , ta dễ dàng tìm được các khoảng cách ly nghiệm của phương trình (2.1).

Nếu đồ thị của hàm số $y = f(x)$ khó vẽ, ta đưa phương trình (2.1) về phương trình tương đương:

$$g(x) = h(x)$$

sao cho đồ thị của hai hàm số $y = g(x)$ và $y = h(x)$ dễ vẽ. Ta vẽ hai đồ thị đó trên giấy kẻ ô vuông và trên cùng một hệ trục tọa độ. Hoành độ các giao điểm của hai đồ thị cho ta ác giá trị thô của các nghiệm thực của phương trình (2.1). Từ đồ thị, ta cũng dễ dàng tìm được các khoảng cách lý nghiệm của phương trình (2.1).

<u>Thí dụ 2.3:</u>

Dùng phương pháp đồ thị, tìm những khoảng cách ly nghiệm của phương trình: $f(x) \equiv x^3 - 3x - 1 = 0$

Giải

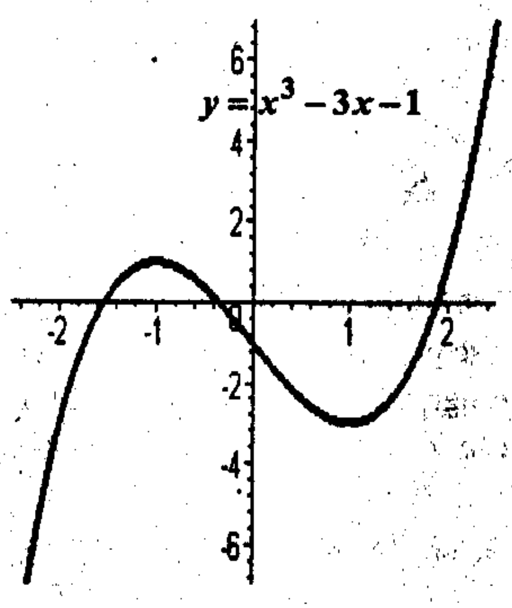
Cách 1 Vẽ đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x - 1$ trên giấy kẻ ô vuông (hình 2.2). Ta thấy rằng đồ thị cắt trục hoành Ox tại ba điểm, do đó phương trình đã cho có ba nghiệm thực.

Từ đồ thị, ta tìm được ba khoảng cách ly nghiệm: (-2, -1); (-1, 0) và (1, 2).

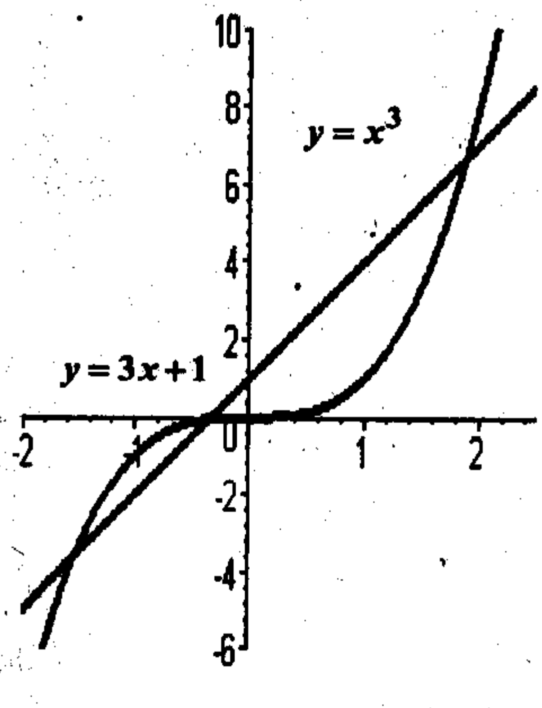
Cách 2. Đưa phương trình đã cho về dạng tương đương như sau:

$x^3 = 3x + 1$

Vẽ đồ thị của hai hàm số $y = x^3$ và $y = 3x + 1$ trên giấy kẻ ô vuông và trên cùng một hệ trục toạ độ (hình 2.3). Ta thấy rằng: hai đồ thị cắt nhau tại ba điểm do đó phương trình đã cho có ba nghiệm thực. Từ đồ thị, ta cũng tìm được ba khoảng cách ly nghiệm như ở cách 1.



Hình 2.2



Hình 2.3

3. PHƯƠNG PHÁP CHIA ĐÔI

3.1. Nội dung phương pháp chia đôi

Giả sử (a, b) là khoảng cach ly nghiệm của phương trình (2.1). Nội dung của phương pháp chia đôi như sau: ta chia đôi khoảng (a, b). Nếu