

2.4. KHÔNG GIAN VECTOR

Không gian vector là một cấu trúc đại số cơ bản khái quát hóa của không gian vector hình học mà người học đã quen thuộc ở chương trình bậc trung học phổ thông, được định nghĩa như sau:

2.4.1. Định nghĩa và tính chất của không gian vector. Giả sử V là một tập hợp khác rỗng và trên V đã xác định hai phép toán:

i) Phép cộng: $\forall \alpha, \beta \in V \Rightarrow \alpha + \beta \in V$.

ii) Phép nhân vô hướng (phép nhân ngoài): $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in V \Rightarrow \lambda \alpha \in V$.

Tập hợp V cùng với 2 phép toán trên được gọi là không gian vector thực (hay không gian vector trên trường số thực $\mathbb{R}$) nếu các điều kiện sau thỏa mãn:

$$1) \alpha + \beta = \beta + \alpha, \forall \alpha, \beta \in V.$$

$$2) \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma; \forall \alpha, \beta, \gamma \in V.$$

$$3) \exists \theta \in V \text{ sao cho: } \alpha + \theta = \alpha, \text{ với } \forall \alpha \in V.$$

$$4) \text{ Với mỗi } \alpha \in V, \text{ tồn tại phần tử } -\alpha \in V \text{ sao cho } \alpha + (-\alpha) = 0$$

$$5) \lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta; \forall \lambda \in \mathbb{R}; \forall \alpha, \beta \in V.$$

$$6) (\lambda + \mu)\alpha = \lambda\alpha + \mu\alpha; \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}; \forall \alpha \in V.$$

$$7) (\lambda\mu)\alpha = \lambda(\mu\alpha); \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}; \forall \alpha \in V.$$

$$8) 1\alpha = \alpha, \forall \alpha \in V.$$

Mỗi phần tử của V được gọi là một vector (chúng ta không đề ý đến bản chất vật lý của các phần tử của V); vector θ nói trong điều kiện (3) được gọi là vector không của V ; vector $-\alpha$ nói ở điều kiện (4) được gọi là vector đối của α trong V . Các số thực λ được gọi là các đại lượng vô hướng. Không gian vector còn gọi là không gian tuyến tính.

Ví dụ 1: Tập hợp E_2 gồm các vector hình học xuất phát từ gốc điểm O trong một mặt phẳng cố định (P) với phép cộng theo quy tắc hình bình hành, phép nhân mỗi số thực với một vector thông thường, là một không gian vector.

Ví dụ 2: Tập hợp các số phức $\mathbb{C} = \{a + bi; a, b \in \mathbb{R}\}$ với hai phép toán sau cũng lập thành không gian vector:

$$\text{i) Phép cộng: } (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i;$$

$$\text{ii) Phép nhân: } k(a + bi) = ka + (kb)i, \text{ với mọi số thực } a, b, c, d, k.$$

Ví dụ 3: Tập hợp $\mathbb{R}[x]$ các đa thức của biến x với hệ số thực lập thành không gian vector với phép cộng đa thức và phép nhân mỗi số thực với một đa thức theo nghĩa thông thường.

Ví dụ 4: Tập hợp $\mathbb{R}_n[x]$ các đa thức của biến x với hệ số thực có bậc không vượt quá n lập thành không gian vector với phép cộng đa thức và phép nhân mỗi số thực với một đa thức theo nghĩa thông thường.

Ví dụ 5: Cho n là số tự nhiên khác 0. Ký hiệu

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n); x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Định nghĩa phép cộng và phép nhân vô hướng trên tập $\mathbb{R}^n$ như sau:

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n);$$

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Khi đó, $\mathbb{R}^n$ với hai phép toán trên là một không gian vector.

Ví dụ 6: Tập hợp $C[a,b]$ các hàm số thực liên tục trên đoạn $[a,b]$ lập thành không gian vector với phép cộng hàm số và phép nhân mỗi số thực với một hàm số thực theo nghĩa thông thường và được gọi là không gian vector các hàm liên tục trên đoạn $[a,b]$.

Ví dụ 7: Tập hợp $M(m,n)$ các ma trận cấp $m \times n$ trên trường số thực lập thành không gian vector, với phép cộng các ma trận và phép nhân mỗi số thực với một ma trận. Ta gọi không gian này là không gian vector các ma trận cấp $m \times n$ trên trường số thực.

2.4.2 Định nghĩa. Cho V là một không gian vector, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in V$; $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Ta

gọi vector $\alpha = a_1 \alpha_1 + \dots + a_n \alpha_n = \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i$, là một *tổ hợp tuyến tính* của hệ vector

$\alpha_1, \dots, \alpha_n$ qua các hệ số $a_1, a_2, \dots, a_n$. Khi đó, ta cũng nói α *biểu thị tuyến tính* được qua hệ vector $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

2.4.3 Sự tương đương của các hệ vector

Trong V cho các hệ vector:

$$\alpha_1, \dots, \alpha_n \quad (1)$$

$$\beta_1, \dots, \beta_m \quad (2)$$

Nếu mọi vector của hệ (1) biểu thị tuyến tính được qua các vector của hệ (2) thì ta nói hệ (1) biểu thị tuyến tính được qua hệ (2).

Nếu (1) biểu thị tuyến tính được qua (2) và (2) cũng biểu thị tuyến tính được qua (1) thì ta nói (1) tương đương với (2) và ký hiệu $(1) \sim (2)$.

Nhận xét. (a) $(1) \sim (1)$

(b) Nếu $(1) \sim (2)$ và $\alpha \in V$ biểu thị tuyến tính được qua (1) thì α cũng biểu thị tuyến tính được qua (2).

(c) Nếu $(1) \sim (2)$ và $(2) \sim (3)$ thì $(1) \sim (3)$.

2.4.4. Một số tính chất đơn giản của không gian vector

a) Trong mỗi không gian vector V chỉ tồn tại một vector không duy nhất.

Chứng minh. Giả sử trong V tồn tại các vector không là θ và θ' . Theo tính chất của vector không ta có: $\theta + \theta' = \theta$, $\theta + \theta' = \theta'$. Do đó $\theta = \theta'$.

b) Với mỗi vector $\alpha \in V$, tồn tại duy nhất một vector $\alpha' \in V$ sao cho

$$\alpha + (-\alpha) = \theta.$$

Chứng minh. Thật vậy, giả sử tồn tại vector $\alpha' \in V$ sao cho $\alpha + \alpha' = \theta$.

$$\text{Ta có : } [(-\alpha) + \alpha] + \alpha' = (-\alpha) + [\alpha + \alpha'] = -\alpha + \theta = -\alpha$$

$$\text{Mặt khác } [(-\alpha) + \alpha] + \alpha' = \theta + \alpha' = \alpha'. \text{ Vậy } \alpha = \alpha'.$$

c) $\forall \alpha, \beta \in V; \forall a, b \in \mathbb{R}$ có

$$(i) \quad a(\alpha - \beta) = a\alpha - a\beta$$

$$(ii) \quad (a - b)\alpha = a\alpha - b\alpha.$$

Chứng minh. Từ $a(\alpha - \beta) + a\beta = a[(\alpha - \beta) + \beta] = a[\alpha + ((-\beta) + \beta)] = a\alpha$

$$\Rightarrow a(\alpha - \beta) = a\alpha - a\beta$$

$$\text{Tương tự, từ } (a - b)\alpha + b\alpha = (a - b + b)\alpha = a\alpha$$

$$\Rightarrow (a - b)\alpha = a\alpha - b\alpha.$$

d) Với $\forall a \in \mathbb{R}; \forall \alpha \in V$, ta có:

$$a\alpha = \theta \Leftrightarrow a = 0 \text{ hoặc } \alpha = 0.$$

Chứng minh. i) $\theta\alpha = (a - a)\alpha = a\alpha - a\alpha = \theta$.

$$a\theta = a(\alpha - \alpha) = a\alpha - a\alpha = \theta.$$

$$\text{ii) } a\theta = 0 \ (a \neq 0) \Rightarrow a^{-1}(a\alpha) = a^{-1}\theta \Rightarrow 1\alpha = \theta \Rightarrow \alpha = \theta.$$

e) Với $\forall \alpha \in V$ ta có $(-1)\alpha = -\alpha$.

Chứng minh. Vì $\alpha + (-1)\alpha = 1\alpha + (-1)\alpha = [1 + (-1)]\alpha = 0\alpha = \theta$, nên $(-1)\alpha = -\alpha$.

2.4.5. Cơ sở và số chiều của không gian vector. Trong không gian vector V cho hệ vector

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \quad (1)$$

Hệ vector (1) được gọi là phụ thuộc tuyến tính nếu tồn tại các số thực $k_1, \dots, k_n$ không đồng thời bằng không sao cho

$$\sum_{i=1}^m k_i \alpha_i = k_1 \alpha_1 + \dots + k_m \alpha_m = 0 \quad (2)$$

Nếu hệ thức (2) xảy ra khi và chỉ khi $k_1 = \dots = k_m = 0$ thì hệ vector (1) gọi là hệ *độc lập tuyến tính*.

Vậy hệ (1) độc lập tuyến tính khi và chỉ khi hệ (1) không phụ thuộc tuyến tính.

Ví dụ. 1) Trong $\mathbb{R}^3$ hệ 3 vector $\varepsilon_1 = (1, 0, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, 0), \varepsilon_3 = (0, 0, 1)$ là độc lập tuyến tính. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 + \lambda_3 \varepsilon_3 = 0 &\Leftrightarrow \lambda_1 (1, 0, 0) + \lambda_2 (0, 1, 0) + \lambda_3 (0, 0, 1) = 0 \\ (\lambda_1, 0, 0) + (0, \lambda_2, 0) + (0, 0, \lambda_3) = 0 &\Leftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0. \end{aligned}$$

2) Trong $\mathbb{R}^3$ hệ 4 vector sau là hệ phụ thuộc tuyến tính

$$\alpha_1 = (5, 2, 1), \alpha_2 = (-1, 3, 3), \alpha_3 = (9, 7, 5), \alpha_4 = (3, 8, 7)$$

Thật vậy, ta có : $\alpha_3 = 2\alpha_1 + \alpha_2 \Rightarrow \alpha_3 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + 0\alpha_4$

3) Trong không gian vector các số phức $\mathbb{C}$ hệ $\{1, i\}$ độc lập tuyến tính.

Thật vậy: $a.1 + b.i = 0 \Leftrightarrow a + bi = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$.

2.4.6. Các tính chất của hệ phụ thuộc tuyến tính

1). Mọi hệ vector chứa vector không đều là hệ phụ thuộc tuyến tính.

Thật vậy, giả sử hệ (1) là $\theta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ khi đó có các hệ số thực là 1, 0, ..., 0 không đồng thời bằng 0 sao cho:

$$1.\theta + 0\alpha_2 + \dots + 0\alpha_m = 0$$

Do đó, hệ (1) là hệ phụ thuộc tuyến tính.

- 2). Hệ chỉ gồm một vector là hệ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi vector đó là vector θ .
 3). Nếu một hệ vector chứa một hệ con phụ thuộc tuyến tính thì hệ đó là hệ phụ thuộc tuyến tính.

Thật vậy, giả sử hệ (1) chứa hệ con $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ phụ thuộc tuyến tính, khi đó tồn tại các số thực $k_1, \dots, k_q$ không đồng thời bằng 0 sao cho:

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_q\alpha_q = 0 \quad (q \leq n)$$

Do đó, ta có một hệ thức không tầm thường là:

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_q\alpha_q + 0\alpha_{q+1} + \dots + 0\alpha_m = 0$$

Hay hệ (1) phụ thuộc tuyến tính.

- 4) Mọi hệ con của một hệ độc lập tuyến tính là hệ độc lập tuyến tính.
 5) Hệ vector (1) là hệ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi có ít nhất một vector của hệ đó là tổ hợp tuyến tính của các vector còn lại.

Chứng minh. i) Giả sử hệ (1) phụ thuộc tuyến tính, khi đó có $k_1, \dots, k_m$ không đồng thời bằng không sao cho: $k_1\alpha_1 + \dots + k_m\alpha_m = 0$. Do $k_1, \dots, k_m$ không đồng thời bằng không nên có một hệ số $k_i \neq 0, 1 \leq i \leq m$. Chẳng hạn $k_1 \neq 0$, do đó

$$\alpha_1 = \left(-\frac{k_2}{k_1} \right) \alpha_2 + \dots + \left(-\frac{k_m}{k_1} \right) \alpha_m$$

hay α_1 biểu thị tuyến tính được qua các vector $\alpha_2, \dots, \alpha_m$ của hệ (1).

2.4.7. Hệ sinh và cơ sở của không gian vector

Một hệ vector của V được gọi là *hệ sinh* của V nếu mọi vector của V đều biểu thị tuyến tính được qua hệ đó.

Một hệ sinh độc lập tuyến tính của V được gọi là một *cơ sở* của V .

Một hệ vector của V được gọi là *độc lập tuyến tính cực đại* nếu nó độc lập tuyến tính và nếu thêm bất kỳ vector nào của V thì hệ mới thu được là hệ phụ thuộc tuyến tính.

2.4.8. Định lý. Cho hệ hữu hạn các vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ của V . Khi đó, các khẳng định sau đây là tương đương với nhau:

- (i) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ là một cơ sở của V .
- (ii) Mỗi vectơ của V đều biểu thị tuyến tính duy nhất được qua hệ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.
- (iii) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ là một hệ vectơ độc lập tuyến tính cực đại của V .

Chứng minh. (i) $\Rightarrow$ (ii): Giả sử $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ là cơ sở của V , khi đó $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ là hệ sinh của V . Do đó, mỗi vectơ của V đều biểu thị tuyến tính được qua hệ này. Ta chứng minh sự biểu diễn duy nhất. Thật vậy, giả sử với vectơ α của V , ta có các sự biểu diễn

$$\alpha = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i = \sum_{i=1}^n y_i \alpha_i, \quad (x_i, y_i \in \mathbb{R}).$$

Theo tính chất của không gian vectơ có

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i) \alpha_i = \theta.$$

Từ tính độc lập tuyến tính của hệ vectơ, suy ra $x_i - y_i = 0$ hay $x_i = y_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Mọi vectơ α của V đều biểu thị được qua hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ cho nên hệ vectơ bổ sung $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha$ phụ thuộc tuyến tính. Do đó, hệ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ là hệ độc lập tuyến tính cực đại của V .

(iii) $\Rightarrow$ (i): Do hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ là hệ độc lập tuyến tính cực đại nên với mỗi vectơ α của V , ta có hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha$ là hệ phụ thuộc tuyến tính. Do đó, vectơ α biểu thị được qua hệ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ hay nó là hệ sinh của V và vì vậy cũng là cơ sở của V . ■

2.4.9. Định lý cơ bản về sự phụ thuộc tuyến tính. Trong không gian vectơ V cho các hệ vectơ:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \quad (1)$$

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m \quad (2)$$

Nếu hệ (1) độc lập tuyến tính và biểu thị tuyến tính được qua hệ (2) thì $n \leq m$.

Chứng minh. Giả sử ngược lại $n > m$, ta chứng minh rằng hệ (1) phụ thuộc tuyến tính và điều đó sẽ mâu thuẫn với tính độc lập tuyến tính của hệ (1).

Thật vậy, theo giả thiết của định lý có sự biểu thị tuyến tính:

$$\alpha_1 = x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \cdots + x_m\beta_m \quad (x_i \in \mathbb{R}).$$

Vì hệ (1) độc lập tuyến tính nên vector $\alpha_1 \neq \theta$. Do đó, có ít nhất một số thực $x_i \neq 0$.

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $x_1 \neq 0$. Khi đó

$$\beta_1 = \frac{1}{x_1}\alpha_1 + \sum_{i=2}^m \left(-\frac{1}{x_1}x_i\right)\beta_i.$$

Như vậy, hệ (2) biểu thị tuyến tính được qua hệ

$$\alpha_1, \beta_2, \dots, \beta_m \quad (3).$$

và do đó, hệ (1) cũng biểu thị tuyến tính được qua hệ (3).

Tiếp tục, đối với vector α_2 của hệ (1) ta có

$$\alpha_2 = y_1\alpha_1 + y_2\beta_2 + \cdots + y_m\beta_m \quad (y_i \in \mathbb{R}).$$

Vì hệ (1) độc lập tuyến tính nên có ít nhất một số thực $y_i \neq 0$, ($2 \leq i \leq m$). Không mất tính tổng quát, ta giả sử $y_2 \neq 0$. Khi đó

$$\beta_2 = \frac{1}{y_2}\alpha_2 + \sum_{i=3}^m \left(-\frac{1}{y_2}y_i\right)\beta_i.$$

Như vậy, hệ (3) biểu thị tuyến tính được qua hệ

$$\alpha_1, \alpha_2, \beta_3, \dots, \beta_m \quad (4)$$

và do đó hệ (1) cũng biểu thị tuyến tính được qua hệ (4).

Tiếp tục lý luận như trên đối với các vector còn lại của hệ (1). Sau m lần thay thế hết m vector của hệ (2) bởi m vector của hệ (1), ta có hệ (1) biểu thị tuyến tính được qua hệ vector con $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ của nó. Do đó, hệ (1) là hệ phụ thuộc tuyến tính. ■

2.4.10. Định nghĩa. Không gian vector V được gọi là *không gian vector hữu hạn sinh* nếu trong V tồn tại một hệ sinh gồm hữu hạn vector.

Ví dụ. 1) Không gian vector các số phức $\mathbf{C}$ là hữu hạn sinh vì trong $\mathbf{C}$ có một hệ sinh gồm 2 vector $\{1, i\}$.

2) Không gian vector $\mathbf{R}[x]$ các đa thức với hệ số thực là không gian vô hạn sinh. Thật vậy, giả sử $\mathbf{R}[x]$ có một hệ sinh hữu hạn: $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$. Khi đó, mọi đa thức thuộc $\mathbf{R}[x]$ có bậc lớn hơn tất cả bậc của các đa thức $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ sẽ không biểu thị tuyến tính được qua hệ sinh $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$. Ta gặp điều vô lý.

2.4.11. Định lý. Giả sử $V \neq \{\theta\}$ là một không gian vector hữu hạn sinh. Khi đó, trong V tồn tại một cơ sở gồm hữu hạn vector. Hơn nữa, mọi cơ sở của V đều có cùng số vector.

Chứng minh. Giả sử $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$ là một hệ sinh hữu hạn của V . Vì $V \neq \{\theta\}$ nên có một vector $\alpha_1 \neq \theta$ trong V . Hệ gồm một vector $\alpha_1 \neq \theta$ là hệ độc lập tuyến tính. Nếu hệ này là hệ độc lập tuyến tính cực đại thì nó chính là một cơ sở của V . Nếu hệ này không độc lập tuyến tính cực đại thì trong V có hệ α_1, α_2 độc lập tuyến tính. Theo định lý cơ bản về sự phụ thuộc tuyến tính, số vector của một hệ độc lập tuyến tính bất kỳ trong V không vượt quá r . Do đó, tiếp tục lý luận như trên, sau không quá r bước ta thu được một hệ độc lập tuyến tính cực đại $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ($n \leq r$) của V . Lại theo Định lý 2.7.2.4, hệ này là một cơ sở hữu hạn của V .

Giả sử $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ ($m \leq r$) là một cơ sở của V . Khi đó, vì hệ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ($n \leq r$) độc lập tuyến tính và biểu thị tuyến tính được qua hệ $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ ($m \leq r$), nên theo Định lý cơ bản của sự phụ thuộc tuyến tính, ta có $n \leq m$. Do tính bình đẳng giữa hai cơ sở, nên cũng có bất đẳng ngược lại và do đó ta có $n = m$. ■

Từ Định lý 2.4.11, ta có tính hợp lý của định nghĩa sau

2.4.12. Định nghĩa. Số vector của một cơ sở bất kỳ của không gian vector hữu hạn sinh $V \neq \{\theta\}$ được gọi là *số chiều* (dimention) của V trên $\mathbf{R}$ và được ký hiệu là $\dim V$.

Nếu $V = \{\theta\}$ thì ta quy ước $\dim V = 0$. Nếu V không có một cơ sở nào gồm hữu hạn phần tử thì nó được gọi là không gian vector *vô hạn chiều*.

Do số vector trong một cơ sở của không gian vector là số vector độc lập tuyến tính cực đại cho nên ta có nhận xét: *Nếu $\dim V = n$ thì mọi hệ vector $n + k$ ($k \geq 1$) trong V đều là hệ phụ thuộc tuyến tính.*

Trong giáo trình này, nếu không nói gì thêm chúng ta chỉ nghiên cứu không gian vector hữu hạn chiều trên trường số thực $\mathbf{R}$.

Ví dụ. 1) $\dim \mathbf{C} = 2$ trên $\mathbf{R}$.

2) $\dim \mathbf{R}^n = n$ trên $\mathbf{R}$.

3) Không gian vector $\mathbf{R}[x]$ là không gian vô hạn chiều trên $\mathbf{R}$.

2.4.13. Định lý. Giả sử $V \neq \{\theta\}$ là một không gian vector hữu hạn sinh. Khi đó

(i) Mọi hệ sinh của V đều chứa một cơ sở nào đó của V .

(ii) Mọi hệ độc lập tuyến tính trong V đều có thể bổ sung thành một cơ sở của V .

(iii) Nếu $\dim V = n$ thì mọi hệ n vector độc lập tuyến tính trong V đều là cơ sở của V .

Chứng minh. (i) Giả sử S là một hệ sinh của V . Gọi S' là hệ con độc lập tuyến tính cực đại của S . Khi đó, S biểu thị tuyến tính được qua S' và do đó V cũng biểu thị tuyến tính được qua S' hay S' là một cơ sở của V .

(ii) Giả sử $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i$ là một hệ độc lập tuyến tính trong V . Nếu hệ này độc lập tuyến tính cực đại thì nó là cơ sở. Trong trường hợp ngược lại, thì ta bổ sung vào hệ này các vector $\alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots$ để thu được một hệ độc lập tuyến tính cực đại trong V . Do V là không gian vector n chiều, cho nên quá trình bổ sung trên dừng lại sau không quá n bước. Hệ vector thu được chính là một cơ sở của V .

(iii) Giả sử $\dim V = n$ và $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ là một hệ độc lập tuyến tính tuyến tính, khi đó với vector α của V hệ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha$ là hệ phụ thuộc tuyến tính. Do đó, tồn tại một hệ thức tuyến tính không tầm thường

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n + x_{n+1}\alpha = \theta \quad (x_i \in \mathbb{R}).$$

Nếu $x_{n+1} = 0$ thì hệ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ phụ thuộc tuyến tính, trái giả thiết. Do đó, có sự biểu diễn

$$\alpha = \frac{-x_1}{x_{n+1}}\alpha_1 + \frac{-x_2}{x_{n+1}}\alpha_2 + \dots + \frac{-x_n}{x_{n+1}}\alpha_n, \quad (x_i \in \mathbb{R}).$$

Như vậy, α đã biểu thị tuyến tính được qua hệ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ và do đó hệ này là hệ sinh độc lập tuyến tính của V và vì vậy là một cơ sở của V . ■

2.4.14. Định nghĩa. Giả sử $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ là một cơ sở của không gian vector V . Khi đó, mỗi vector α của V có sự biểu thị tuyến tính duy nhất:

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n \quad (x_i \in \mathbb{R}),$$

hay viết vắn tắt:

$$\alpha = \sum_{i=1}^n x_i\alpha_i, \quad (x_i \in \mathbb{R}).$$

Bộ n số thực $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ được gọi là *tọa độ* của vector α theo cơ sở $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

2.4.15. Công thức đổi tọa độ. Giả sử

$$\begin{matrix} \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \\ \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \end{matrix}$$

là các cơ sở của không gian vector V . Giả sử vector α của V có tọa độ tương ứng theo các cơ sở đã cho là $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ và $(y_1, y_2, \dots, y_n)$. Biểu diễn mỗi vector của cơ sở thứ hai qua cơ sở thứ nhất:

$$\beta_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \alpha_i, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n.$$

Do đó, ta có:

$$\alpha = \sum_{i=1}^n y_i \beta_i = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n b_j c_{ij} \alpha_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n c_{ij} b_j \right) \alpha_i = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i.$$

Do tính duy nhất của tọa độ của mỗi vector theo một cơ sở, ta có công thức đổi tọa độ như sau:

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

2.4.16. Không gian vector con. Giả sử V là không gian vector. Tập con không rỗng W của V được gọi là *tập con ổn định* của V nếu

$$i) \alpha + \beta \in W; \quad \forall \alpha, \beta \in W.$$

$$ii) \lambda \alpha \in W; \quad \forall \lambda \in W, \forall \alpha \in W.$$

Giả sử W là tập con ổn định của V , khi đó phép toán cộng và nhân vô hướng trong W được gọi là các *phép toán cảm sinh* trên V .

Tập con ổn định W của V được gọi là *một không gian vector con* của V nếu cùng với hai phép toán cảm sinh trên V , bản thân tập W cũng lập thành một không gian vector.

2.4.17. Mệnh đề. Giả sử V là không gian vector và W là một không gian vector con của V , khi đó vector θ thuộc W . Nói khác đi, vector không của V cũng là vector không của W .

Chứng minh. Gọi ρ là vector không của không gian vector W , khi đó: $\theta = \theta + \rho = \rho$.

Do đó, $\rho = \theta$.

2.4.18. Định lý. (Tiêu chuẩn không gian vector con). Tập con không rỗng W của V là không gian vector con của V khi và chỉ khi W là tập con ổn định của V , nghĩa là

$$i) \alpha + \beta \in W; \quad \forall \alpha, \beta \in W.$$

$$ii) \lambda \alpha \in W; \quad \forall \lambda \in W, \forall \alpha \in W.$$