

LỜI NÓI ĐẦU

Giáo trình này được viết cho sinh viên hệ đào tạo đại học từ xa các ngành kinh tế, kỹ thuật và được biên soạn theo đề cương chi tiết học phần Toán cao cấp, trong phương thức đào tạo theo hệ thống tín chỉ của Trường Đại học Vinh. Vì đặc thù ngành học và thời lượng hạn chế trong hai tín chỉ, nên chúng tôi không đi sâu vào những vấn đề nặng về lý thuyết mà tập trung vào những kết quả và ứng dụng của nó. Bên cạnh đó, chúng tôi cũng chỉ ra những tài liệu cần thiết để những người học tìm đọc.

Nội dung chính của giáo trình này là những vấn đề mở đầu của đại số tuyến tính, giải tích cổ điển và được trình bày trong bốn chương. Chương 1 trình bày các kiến thức về tập hợp quan hệ và ánh xạ. Chương 2 trình bày về định thức, ma trận và hệ phương trình tuyến tính. Chương 3 trình bày về phép tính vi phân hàm một biến. Chương 4 trình bày về phép tính tích phân hàm một biến.

Một số vấn đề, trong đó học viên đã được làm quen ở chương trình phổ thông. Trong giáo trình này, chúng tôi vẫn trình bày đầy đủ các vấn đề trên nhưng ở mức độ sâu và tổng quát hơn. Để tạo điều kiện thuận lợi cho người đọc, sau các định nghĩa, định lý chúng tôi đưa ra nhiều ví dụ minh họa, sau mỗi chương có đưa ra hướng dẫn tự học các vấn đề trọng tâm và hệ thống các bài tập.

Mặc dù chúng tôi đã có rất nhiều cố gắng nhưng chắc rằng còn có những thiếu sót. Chúng tôi rất mong nhận được sự góp ý, phê bình của bạn đọc.

CÁC TÁC GIẢ

CHƯƠNG 1 TẬP HỢP- QUAN HỆ - ÁNH XẠ

1.1. Tập hợp- tập con- các tập bằng nhau

1.1.1. Khái niệm chung

Chúng ta trình bày lý thuyết về tập hợp theo quan điểm "ngây thơ". Cụ thể, tập hợp (set) là một khái niệm toán học được xem như là khái niệm gốc xuất phát (nguyên thủy), không được định nghĩa mà chỉ mô tả. Chẳng hạn, tập hợp điểm, tập hợp các đường thẳng, tập hợp số. Trong thực tế thường dùng các từ đồng nghĩa: lớp, họ, bộ, toàn thể ... Tập hợp thường được gọi ngắn gọn là tập: tập A, tập đóng, tập chỉ số... Để biểu thị một tập hợp ta dùng các chữ viết in hoa như A, B, C,..., X, Y, Z... Các đối tượng hợp thành tập hợp gọi là các *phần tử* của nó. Nếu x là phần tử của A ta viết $x \in A$ và nói là x thuộc A. Nếu phần tử y không là phần tử của A thì ta viết $y \notin A$ và nói y không thuộc A. Các phần tử của một tập hợp có thể là các đối tượng cụ thể hoặc trừu tượng như người, vật thể hoặc các hàm số, số tự nhiên ...

Một tập hợp được coi là hoàn toàn xác định nếu ta có thể phân biệt các đối tượng nào thuộc nó và những đối tượng không thuộc nó. Thông thường có thể đưa ra một tập hợp bởi một trong hai cách:

a) Liệt kê các phần tử của tập, ví dụ

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}.$$

b) Chỉ ra một số tính chất chung cho mọi phần tử thuộc tập, ví dụ

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 1\}$$

Tập X gồm các phần tử x có tính chất P(x) được ký hiệu là:

$$X = \{x \mid P(x)\}.$$

Một tập hợp có thể chỉ gồm một số hữu hạn phần tử hoặc gồm vô hạn phần tử, tương ứng gọi là *tập hữu hạn* (finite set) và *tập vô hạn* (infinite set).

Tập hợp rỗng (empty set), ký hiệu bởi $\emptyset$, là tập hợp không chứa phần tử nào. Tập có duy nhất một phần tử gọi là tập đơn tử. Ví dụ: $\{\emptyset\}$.

1.1.2. Tập con. Sự bằng nhau giữa các tập

Ta nói tập A gọi là *tập con* (subset) của tập B nếu mỗi phần tử của A đều là phần tử của B nghĩa là nếu $x \in A$ thì $x \in B$, ký hiệu $A \subseteq B$ hoặc $B \supseteq A$.

Ta quy ước tập rỗng là tập con của mọi tập: $\emptyset \subseteq A$.

Nếu đồng thời $A \subseteq B$ và $B \subseteq A$, thì ta nói A bằng B và ký hiệu: $A = B$. Như vậy, ta có:

$$A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

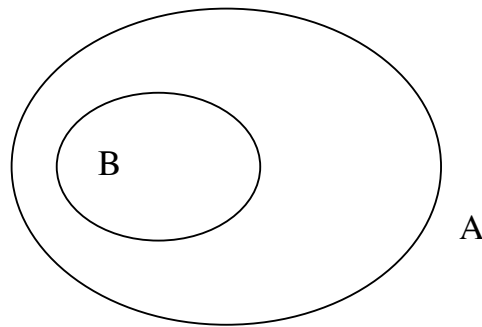
Ta nói tập A là *tập con thực sự* (proper subset) của tập B nếu A là tập con của B và $A \neq B$, ký hiệu $A \subset B$. Ví dụ: $\{x, y\} \subset \{x, y, z\}$.

Mỗi tập hợp mà mỗi phần tử là một tập con của tập A được gọi là *họ các tập hợp con* (family of subsets) của A , ký hiệu $P(A)$.

Nhận xét: Nếu tập A gồm n phần tử thì tập $P(A)$ gồm 2^n phần tử (chứng minh nhận xét này dành cho bạn đọc như một bài tập).

1.1.3. Sơ đồ Ven (Venn schema)

Để thể hiện tập hợp một cách trực quan người ta vẽ một đường cong đơn kín (chẳng hạn đường tròn hay elip) và coi tập A là miền phẳng giới hạn bởi đường cong đó. Tập con B của A sẽ được biểu thị bởi một miền con của A .



1.1.4. Các tập hợp số

Tập hợp $\mathbb{N}$ các số tự nhiên (The set of natural numbers):

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Tập $\mathbb{Z}$ các số nguyên (The set of integer numbers):

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

Tập hợp $\mathbb{Q}$ các số hữu tỉ (The set of rational numbers):

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

Tập hợp **I** các số vô tỉ (The set of irrational numbers);

Tập $\mathbb{R}$ các số thực (The set of real numbers);

Tập $\mathbb{C}$ các số phức (The set of complex numbers):

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}, i^2 = -1.$$

Tập **P** các số nguyên tố (The set of prime numbers).

1.1.5. Các phép toán liên kết các tập hợp

Từ các tập hợp cho trước có thể tạo nên các tập hợp mới nhờ những phép toán sau đây:

1.1.5.1. Phép hợp

Hợp của hai tập A, B ký hiệu $A \cup B$ là tập hợp gồm mọi phần tử thuộc A hoặc thuộc B , tức là:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}.$$

Từ định nghĩa ta suy ra các tính chất sau:

- a) $A \cup A = A$
- b) $A \cup B = B \cup A$
- c) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- d) $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B.$

Phép chứng minh xem như bài tập. Do tính chất c) Ta có thể bỏ dấu ngoặc khi viết hợp của ba hay nhiều tập.

Tổng quát hơn cho một họ tập $\{A_i, i \in M\}$. Hợp $\bigcup_{i \in M} A_i$ là tập hợp gồm mọi phần tử thuộc ít nhất một trong các tập A_i :

$$\bigcup_{i \in M} A_i = \{x \mid \exists i \in M : x \in A_i\}.$$

1.1.5.2. Phép giao

Giao của hai tập A, B , ký hiệu $A \cap B = \{x \mid x \in A; x \in B\}$.

Từ định nghĩa dễ dàng chứng minh các tính chất:

- a) $A \cap A = A.$
- b) $A \cap B = B \cap A.$
- c) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$

Do c) ta không cần viết dấu ngoặc khi biểu thị hợp của ba hay nhiều tập.

d) Nếu $A \supset B$ thì $A \cap B = B$.

Các phép toán hợp và giao liên hệ nhau bởi tính phân bố:

$$e) (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

$$f) (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Ta chứng minh một tính chất, chẳng hạn tính chất e):

$$\bullet \text{ Nếu } x \in (A \cup B) \cap C \Rightarrow x \in (A \cup B); x \in C$$

$$\Rightarrow x \in (A \cap C) \text{ hoặc } x \in (B \cap C) \Rightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$\bullet \text{ Nếu } x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$\Rightarrow x \in (A \cap C) \text{ hoặc } x \in (B \cap C)$$

$$\Rightarrow x \in (A \cup B) \text{ và } x \in C \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap C. \quad \blacksquare$$

Có thể mở rộng định nghĩa phép giao từ hai sang một họ tập tùy ý. Giao của họ một tập $\{A_i, i \in M\}$ là tập hợp gồm các phần tử chung của họ A_i , tức là:

$$\bigcap_{i \in M} A_i = \{x | x \in A_i, \forall i \in M\}.$$

Nếu $A \cap B = \emptyset$ ta nói các tập A, B rời nhau hoặc không giao nhau. Họ tập $\{A_i, i \in M\}$ gọi là rời nhau từng đôi một nếu bất kỳ hai tập nào trong chúng là rời nhau.

1.1.5.3. Phép trừ

Ta gọi hiệu của tập A và tập B (theo thứ tự đó), ký hiệu $A \setminus B$ là tập gồm mọi phần tử thuộc A nhưng không thuộc B:

$$A \setminus B = \{x | x \in A, x \notin B\}.$$

Nhận thấy rằng, phép trừ không có tính chất giao hoán, nghĩa là nói chung

$$B \setminus A \neq A \setminus B.$$

Nếu $B \subset A$ thì hiệu $A \setminus B$ gọi là *phần bù* (complement) của B trong A, ký hiệu $C_A(B)$. Đặc biệt, khi mọi tập được xét đều là các tập con của một tập cố định X thì ta viết $C(B)$ thay cho $C_X(B)$ và gọi vắn tắt là phần bù của B trong X. Bên cạnh ký hiệu $C(B)$ ta còn dùng ký hiệu $\overline{B}$ để chỉ phần của B trong X.

1.1.5.4. Hiệu đối xứng

Hiệu đối xứng của tập A và tập B , ký hiệu $A \div B$ được định nghĩa bởi:

$$A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Ta có $B \div A = A \div B$ và đó là lý do phép toán này có tên "hiệu đối xứng". Ngoài ra hiệu đối xứng cũng có tính chất kết hợp (xem phần bài tập ở cuối tiết này).

1.1.6. Công thức Demorgan

Giữa các phép toán hợp, giao và bổ sung có các mối liên hệ sau gọi là công thức Demorgan.

Các tập được nêu đều là các tập con của mỗi tập hợp cố định cho trước.

$$a) \overline{\bigcup_{i \in M} A_i} = \bigcap_{i \in M} \overline{A_i}$$

$$b) \overline{\bigcap_{i \in M} A_i} = \bigcup_{i \in M} \overline{A_i}$$

Nói riêng

$$\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$$

$$\overline{A_1 \cap A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$$

Phép chứng minh các tính chất này coi như bài tập dành cho người đọc.

1.1.7. Tích Descartes của các tập hợp.

Tích Descartes của các tập A và B được ký hiệu $A \times B$ là tập hợp mọi cặp có thứ tự (a, b) mà $a \in A, b \in B$:

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}.$$

Nói riêng $A^2 = A \times A$ là bình phương Descartes của A .

Ví dụ. 1. Cho $A = \{a, b, c\}$ và $B = \{x, y\}$, ta có:

$$A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y), (c, x), (c, y)\}.$$

Nhận xét. Nếu A, B là các tập hữu hạn có số phần tử tương ứng là m và n thì tích $A \times B$ gồm mn phần tử.

2. Gọi $\mathbb{R}$ là tập các số thực, khi đó $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ là tập hợp mọi cặp có thứ tự (x, y) với x, y là các số thực. Như vậy, $\mathbb{R}^2$ biểu thị tập mọi điểm của mặt phẳng tọa độ, còn $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ là tập mọi bộ ba có thứ tự các số thực, tức mọi điểm của không gian ba chiều thông thường.

3. Nếu $A = [a, b], B = [c, d]$ là các đoạn thẳng, thì tích Descartes $A \times B$ biểu thị tập mọi điểm của hình chữ nhật.

4. Cho A là tập mọi điểm của hình tròn tâm O thuộc mặt phẳng Oxy , B là tập mọi điểm của đoạn thẳng $[O, h]$ của trục Oz trong hệ tọa độ vuông góc $Oxyz$ thì $A \times B$ biểu thị tập hợp mọi điểm của hình trụ có chiều cao bằng h , đáy là hình tròn A .

Tailieu.vn

1.2. Quan hệ hai ngôi

1.2.1. Quan hệ hai ngôi trên một tập hợp

Cho tập X khác rỗng. Ta gọi một *quan hệ hai ngôi* trên tập X là tập con $\mathfrak{R}$ của tập tích $X \times X$. Nếu cặp phần tử (a, b) thuộc $\mathfrak{R}$ thì ta nói a có quan hệ $\mathfrak{R}$ với b và viết $a\mathfrak{R}b$.

Ví dụ. 1. Trong tập $\mathbb{R}$ mọi số thực, quan hệ " $a = b$ " hoặc quan hệ " $a \leq b$ " là các quan hệ hai ngôi.

2. Trên tập mọi đường thẳng trên mặt phẳng, quan hệ vuông góc hoặc quan hệ song song giữa hai đường thẳng là các quan hệ hai ngôi.

3. Trên tập hợp $\mathbb{N}^*$ các số nguyên dương, quan hệ " a là ước của b " là một quan hệ hai ngôi.

4. Trên tập $P(X)$ các tập con của tập X , quan hệ bao hàm $A \subseteq B$ là một quan hệ hai ngôi.

Chú ý: Tính chất đặc trưng cho quan hệ $\mathfrak{R}$ không nhất thiết thoả mãn đối với mọi cặp phần tử của X , xem ở ví dụ 2, 3 hoặc 4.

1.2.2. Đồ thị của một quan hệ hai ngôi

Cho $\mathfrak{R}$ là một quan hệ hai ngôi trên tập X . Nếu a và b là hai phần tử của X sao cho $a\mathfrak{R}b$ thì có cặp thứ tự (a, b) là một phần tử của tích Descartes $X \times X$. Gọi $G \subset X \times X$ là tập hợp các cặp (a, b) thoả mãn quan hệ $\mathfrak{R}$. Ta nói G là *đồ thị* của quan hệ hai ngôi $\mathfrak{R}$.

Ví dụ. 1. Đồ thị của quan hệ " $a = b$ " trên tập $\mathbb{R}$ mọi số thực là đường phân giác của các góc vuông I và III trên mặt phẳng toạ độ.

2. Đồ thị của quan hệ " $a \leq b$ " trên tập $\mathbb{R}$ là nửa mặt phẳng kể cả biên nằm dưới đường phân giác nói ở ví dụ 1.

3. Đồ thị của quan hệ " $a^2 + b^2 = 1$ " là đường tròn bán kính, tâm tại gốc trên mặt phẳng toạ độ.

1.2.3. Các tính chất có thể có của quan hệ hai ngôi trong một tập hợp

Quan hệ $\mathfrak{R}$ trong tập X ($\mathfrak{R} \subseteq X^2$) có thể có các tính chất sau:

- Tính phản xạ : $a\mathfrak{R}a, \forall a \in X$ (tức là $(a, a) \in \mathfrak{R}, \forall a \in X$).
- Tính đối xứng : $a\mathfrak{R}b \Rightarrow b\mathfrak{R}a$ (tức là nếu $(a, b) \in \mathfrak{R}$ thì $(b, a) \in \mathfrak{R}$).

- Tính phản đối xứng: $(a\mathcal{R}b \text{ và } b\mathcal{R}a) \Rightarrow a = b$.

- Tính bắc cầu: $(a\mathcal{R}b) \text{ và } (b\mathcal{R}c) \Rightarrow a\mathcal{R}c$.

Ví dụ. - Trong tập hợp $P(X)$ các tập con của tập hợp X quan hệ bao hàm $A \subseteq B$ có tính phản xạ, phản đối xứng và bắc cầu mà không có tính đối xứng.

- Trong tập hợp mọi đa thức của một biến số thực, quan hệ bằng nhau có mọi tính chất nêu trên.

Các quan hệ định nghĩa trong các mục dưới đây có vai trò đặc biệt quan trọng trong nhiều lĩnh vực toán học.

1.2.4. Quan hệ tương đương

Quan hệ $\mathcal{R}$ trong tập X gọi là *quan hệ tương đương* (equivalence relation) nếu nó có tính phản xạ, đối xứng, bắc cầu.

Trong trường hợp này, ta viết $a \sim b$ thay vì $a\mathcal{R}b$.

Ví dụ 1. Quan hệ song song giữa các đường thẳng trong tập mọi đường thẳng của không gian (coi 2 đường thẳng trùng nhau là song song); quan hệ đồng dạng giữa các tam giác; quan hệ cùng tỉnh (đồng hương tỉnh) của tập hợp dân trên thành phố Vinh là các ví dụ trực quan của quan hệ tương đương.

Ví dụ 2. Cho p là số nguyên lớn hơn 1 cố định. Ta xác định một quan hệ $\sim$ trong tập $\mathbb{Z}$ mọi số nguyên bởi: $a \sim b$ khi và chỉ khi $a - b$ chia hết cho p , tức a và b có cùng phần dư với nhau trong phép chia cho p .

Để nghiệm lại rằng quan hệ này có các tính phản xạ, đối xứng, bắc cầu nên nó là quan hệ tương đương, ta gọi nó là quan hệ đồng dư theo modulo p và viết: $a \equiv b \pmod{p}$.

Để nghiên cứu sâu hơn quan hệ tương đương ta cần khái niệm phân hoạch của một tập hợp được định nghĩa như sau:

1.2.5. Phân hoạch của một tập

Cho tập X khác rỗng. Ta gọi phân hoạch của X là một họ các tập con khác rỗng của X , từng đôi một không giao nhau sao cho hợp của mọi tập con của họ bằng X .

Số các phần tử (tập con của X) thuộc họ này có thể hữu hạn hay vô hạn miễn là không giao nhau từng cặp và toàn bộ hệ đó phải “lấp kín” tập X .

Như sẽ thấy trong mục dưới, mỗi quan hệ tương đương trong tập X định ra một phân hoạch của X .

1.2.6. Các lớp tương đương

Giả sử $\sim$ là một quan hệ tương đương trên tập X . Với mỗi phần tử $a \in X$, ký hiệu $C(a)$ là tập hợp mọi phần tử thuộc X tương đương với a , gọi $C(a)$ là lớp tương đương chứa a :

$$C(a) = \{x \in X \mid x \sim a\}.$$

Do tính phản xạ: $a \sim a$ nên mỗi tập con $C(a)$ không rỗng. Hơn nữa, nếu $C(a) \cap C(b) \neq \emptyset$ thì $C(a) = C(b)$.

Thật vậy, giả sử $c \in C(a) \cap C(b)$, thế thì có: $c \in C(a)$ và $c \in C(b)$.

Tức là $c \sim a$, $c \sim b$ hay $b \sim c \sim a$. Từ đó, do tính chất bắc cầu suy ra $b \sim a$, vậy $b \in C(a)$. Lập luận tương tự cũng có $a \in C(b)$, tức là $C(a) = C(b)$.

Ta thu được định lý:

Một quan hệ tương đương trong X xác định một phân hoạch của X , mỗi phần tử của phân hoạch này là một lớp tương đương.

Họ các lớp tương đương này được gọi là *tập thương*, ký hiệu $X/\sim$.

Để hình dung được rõ nét hơn về cấu trúc này ta xét một ví dụ tiêu biểu về tập thương các lớp đồng dư trong tập $\mathbb{Z}$ mọi số nguyên.

Ví dụ. Ta xét quan hệ đồng dư đã gặp ở phần trên trong tập $\mathbb{Z}$ mọi số nguyên, quan hệ $a \equiv b \pmod{p}$. Xác định các lớp tương đương sau đây:

$$C(0), C(1), C(2), \dots, C(p-1)$$

trong đó $C(r)$, $0 \leq r \leq p-1$, là lớp tương đương gồm mọi số nguyên khi chia cho p còn dư r . Các lớp tương đương này được gọi là các lớp đồng dư theo mod p . Trong trường hợp này, tập thương $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/\sim$ là tập hữu hạn.

Đối với quan hệ song song, mỗi lớp tương đương là tập hợp mọi đường thẳng cùng phương, mỗi đường thẳng thuộc lớp này có thể đại diện cho phương của lớp, tức là khái niệm phương thực chất là lớp tương đương các đường thẳng song song. Trong ví dụ này tập thương $X/\sim$ là tập vô hạn.

1.2.7. Quan hệ thứ tự