

MỤC LỤC

Lời nói đầu	3
Phần I. Xác suất	4
1 Biến cố và xác suất	5
1.1 Bỏ túc về giải tích tổ hợp	5
1.2 Phép thử ngẫu nhiên và biến cố	8
1.3 Xác suất của biến cố	11
1.4 Xác suất có điều kiện	17
1.5 Dãy phép thử Bernoulli	22
Hướng dẫn học viên tự học Chương 1	25
Bài tập	26
2 Đại lượng ngẫu nhiên và phân phối xác suất	29
2.1 Đại lượng ngẫu nhiên	29
2.2 Các số đặc trưng của đại lượng ngẫu nhiên	33
2.3 Một số phân phối xác suất quan trọng	39
2.4 Vectơ ngẫu nhiên	48
Hướng dẫn học viên tự học Chương 2	55
Bài tập	56
Phần II. Thống kê	60
3 Lý thuyết mẫu	61
3.1 Khái niệm mẫu và phương pháp lấy mẫu	61
3.1.1 Khái niệm mẫu	62
3.1.2 Các phương pháp lấy mẫu	62
3.2 Cách biểu diễn mẫu	63
3.2.1 Bảng tần số và bảng tần suất	63
3.2.2 Đa giác tần số và tổ chức đồ	64
3.3 Các đặc trưng của mẫu	65
3.3.1 Hàm phân phối mẫu	66
3.3.2 Trung bình mẫu	66
3.3.3 Phương sai mẫu và phương sai hiệu chỉnh mẫu	67
Hướng dẫn học viên tự học Chương 3	70
Bài tập	71

4	Ước lượng tham số	73
4.1	Ước lượng điểm	73
4.1.1	Định nghĩa	73
4.1.2	Ước lượng điểm cho kỳ vọng, xác suất và phương sai	74
4.2	Ước lượng khoảng	76
4.2.1	Khái niệm về khoảng tin cậy	76
4.2.2	Khoảng tin cậy cho giá trị trung bình	76
4.2.3	Khoảng tin cậy cho tỉ lệ	80
4.2.4	Độ chính xác của ước lượng	81
	Hướng dẫn học viên tự học Chương 4	83
	Bài tập	84
5	Kiểm định giả thiết	87
5.1	Các khái niệm cơ bản	87
5.1.1	Giả thiết thống kê	87
5.1.2	Tiêu chuẩn kiểm định giả thiết thống kê	88
5.2	Kiểm định giả thiết về giá trị trung bình và về tỉ lệ	89
5.2.1	Kiểm định giả thiết về giá trị trung bình	89
5.2.2	Kiểm định giả thiết về tỉ lệ	91
5.3	So sánh các giá trị trung bình và các giá trị tỉ lệ	93
5.3.1	So sánh hai giá trị trung bình	93
5.3.2	So sánh hai tỉ lệ	95
	Hướng dẫn học viên tự học Chương 5	97
	Bài tập	98
6	Hồi quy và tương quan	100
6.1	Hệ số tương quan mẫu	100
6.1.1	Mở đầu	100
6.1.2	Hệ số tương quan mẫu	100
6.2	Phương trình hồi quy bình phương trung bình tuyến tính	102
6.2.1	Phương trình hồi quy	102
6.2.2	Ước lượng hệ số hồi quy tuyến tính thực nghiệm	103
	Hướng dẫn học viên tự học Chương 6	105
	Bài tập	106
	Tài liệu tham khảo	108
	Các bảng số thông dụng	109

LỜI NÓI ĐẦU

Giáo trình này được viết dựa trên đề cương chi tiết học phần xác suất thống kê dành cho sinh viên các ngành khối A nói chung và các ngành Công nghệ nói riêng. Tác giả có điều chỉnh cho phù hợp với đối tượng người học là những người tốt nghiệp Trung học phổ thông.

Giáo trình gồm 6 chương chia thành 2 phần. Phần 1 gồm 2 chương, trình bày các kiến thức cơ sở của lý thuyết xác suất. Trong chương 1, chúng tôi trình bày về một số khái niệm và tính chất mở đầu của lý thuyết xác suất: phép thử, biến cố, xác suất của biến cố, xác suất có điều kiện, tính độc lập của các biến cố, dãy phép thử Bernoulli, ... Các khái niệm và tính chất này sẽ được dùng nhiều ở các chương sau. Chương 2 trình bày các vấn đề liên quan đến đại lượng ngẫu nhiên và vectơ ngẫu nhiên: Khái niệm đại lượng ngẫu nhiên, các loại đại lượng ngẫu nhiên, hàm phân phối, bảng phân phối và hàm mật độ xác suất, các số đặc trưng của đại lượng ngẫu nhiên, ...

Phần 2 gồm 4 chương, trình bày về những vấn đề cơ bản của thống kê ứng dụng. Cụ thể là Chương 3 trình bày về lý thuyết mẫu; Chương 4 trình bày về lý thuyết ước lượng; Chương 5 trình bày về lý thuyết kiểm định và Chương 6 trình bày về lý thuyết tương quan và hồi quy. Trong mỗi chương của phần này, chúng tôi đều đưa ra những ứng dụng của các vấn đề nêu ra vào việc giải quyết các vấn đề của thực tế.

Cuối mỗi chương đều có hệ thống câu hỏi ôn tập và phần hướng dẫn học viên tự học.

Tác giả xin cảm ơn các đồng nghiệp ở bộ môn Xác suất - Thống kê và Toán ứng dụng, Khoa Toán, Trường Đại học Vinh đã quan tâm động viên tác giả hoàn thành giáo trình này.

Mặc dù tác giả đã rất cố gắng nhưng chắc chắn giáo trình vẫn còn nhiều khiếm khuyết, mong được sự góp ý của bạn đọc.

Tác giả

PHẦN I. XÁC SUẤT

TaiLieu.vn

CHƯƠNG 1

BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT

1.1 Bổ túc về giải tích tổ hợp

Trong lý thuyết xác suất, nhiều khi phải tính số phần tử của một tập hợp. Giải tích tổ hợp cho ta một phương pháp tính số phần tử đó một cách nhanh chóng và chính xác. Trong mục này chúng tôi sẽ trình bày một số vấn đề cơ bản của giải tích tổ hợp được sử dụng nhiều trong các mục sau.

Trước hết, chúng ta nghiên cứu quy tắc nhân và quy tắc cộng. Có nhiều cách trình bày các quy tắc này. Dưới đây là các trình bày mà theo chúng tôi là tương đối đơn giản và dễ vận dụng.

1.1.1 Quy tắc nhân

Quy tắc. Giả sử một hành động có thể được thực hiện qua k bước liên tiếp. Bước 1 có thể được thực hiện bằng n_1 cách, bước 2 có thể được thực hiện bằng n_2 cách, ... bước k có thể được thực hiện bằng n_k cách. Khi đó, số cách để thực hiện hành động đó là

$$n = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k.$$

Như vậy, khi một hành động có thể chia nhỏ thành nhiều bước, thì số cách thực hiện hành động đó bằng tích số cách thực hiện các bước.

Ví dụ.

1. Một đội văn nghệ đã chuẩn bị được 2 vở kịch, 5 bài hát, 3 điệu múa. Hội diễn chỉ cho phép đội trình diễn một vở kịch, một bài hát, một điệu múa. Hỏi đội có bao nhiêu cách chọn chương trình biểu diễn của mình, biết rằng chất lượng các vở kịch, bài hát, điệu múa là như nhau.

Giải. Việc chọn chương trình biểu diễn có thể được thực hiện qua 3 bước

Bước 1: Chọn 1 vở kịch trong 2 vở kịch. Có 2 cách.

Bước 2: Chọn 1 bài hát trong 5 bài hát. Có 5 cách.

Bước 3: Chọn 1 điệu múa trong 3 điệu múa. Có 3 cách.

Từ đó, áp dụng quy tắc nhân suy ra đội văn nghệ có $n = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ cách chọn chương trình biểu diễn.

2. Với các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, có thể lập được bao nhiêu số chẵn gồm 4 chữ số khác nhau?

Giải. Mỗi số cần tìm có dạng $x = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4}$ với

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Muốn xác định x , ta phải chọn a_1, a_2, a_3, a_4 (4 bước). Vì x là số chẵn, nên ta chọn a_4 trước, rồi chọn a_1, a_2, a_3 .

Bước 1: Chọn a_4 . Vì x là số chẵn, nên $a_4 = 2$ hoặc $a_4 = 4$. Có 2 cách chọn a_4 .

Bước 2: Chọn a_1 . Vì $a_1 \neq a_4$, nên có 4 cách chọn a_1 .

Bước 3: Chọn a_2 . Vì $a_2 \neq a_4$, $a_2 \neq a_1$ nên còn 3 cách chọn a_2 .

Bước 4: Chọn a_3 . Vì $a_3 \neq a_4$, $a_3 \neq a_1$ và $a_3 \neq a_2$ nên còn 2 cách chọn a_3 .

Từ đó, áp dụng quy tắc nhân suy ra số các số cần tìm là $n = 2.4.3.2 = 48$.

1.1.2 Quy tắc cộng

Quy tắc. Giả sử các phần tử của một tập hợp có thể được chia thành k loại khác nhau; loại 1 có n_1 phần tử, loại 2 có n_2 phần tử...loại k có n_k phần tử. Khi đó số phần tử của tập hợp đó là

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k.$$

Dựa vào quy tắc cộng, ta có thể chuyển bài toán về tính số phần tử của một tập hợp phức tạp về các bài toán tính số phần tử của các tập hợp đơn giản hơn.

Ví dụ. Có bao nhiêu số có các chữ số khác nhau được lập thành từ 4 chữ số 1, 2, 3, 4.

Giải. Tập hợp các số cần lập có thể chia làm 4 loại

Loại 1: Các số có 1 chữ số. Có $n_1 = 4$ số: 1, 2, 3, 4.

Loại 2: Các số có 2 chữ số khác nhau. Có $n_2 = 4.3 = 12$ số.

Loại 3: Các số có 3 chữ số khác nhau. Có $n_3 = 4.3.2 = 24$ số.

Loại 4: Các số có 4 chữ số khác nhau. Có $n_4 = 4.3.2.1 = 24$ số.

Từ đó, áp dụng quy tắc cộng, suy ra số các số cần tìm là

$$n = 4 + 12 + 24 + 24 = 64.$$

1.1.3 Hoán vị

Định nghĩa. Mỗi cách sắp xếp n phần tử cho trước theo một thứ tự nhất định gọi là một hoán vị của n phần tử đó.

Kí hiệu số các hoán vị của n phần tử đã cho là P_n .

Định lý. Số hoán vị của n phần tử là

$$P_n = n!.$$

Chứng minh. Mỗi hoán vị của n phần tử là kết quả của phép chọn gồm n bước.

Bước 1: Chọn phần tử đầu tiên cho hoán vị. Có n cách chọn.

Bước 2: Chọn phần tử thứ hai cho hoán vị. Có $(n - 1)$ cách chọn.

...

Bước k : Chọn phần tử thứ k cho hoán vị. Có $(n - k + 1)$ cách chọn.

...

Bước n : Chọn phần tử thứ n cho hoán vị. Có $(n - n + 1) = 1$ cách chọn.

Do đó, theo qui tắc nhân, số hoán vị của n phần tử là

$$P_n = n(n - 1) \dots (n - k + 1) \dots 1 = n!.$$

Ví dụ. Giả sử một lớp có 25 sinh viên. Khi đó, số cách sắp xếp chỗ ngồi cho 25 sinh viên đó là $P_{25} = 25!$.

1.1.4 Chỉnh hợp

Định nghĩa. Mỗi bộ sắp thứ tự gồm k phần tử khác nhau, lấy từ n phần tử đã cho gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử đó ($0 \leq k \leq n$).

Ký hiệu số các chỉnh hợp chập k của n phần tử là A_n^k . Bằng lập luận tương tự như đối với hoán vị, ta được

Định lý. Số chỉnh hợp chập k của n phần tử là

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-k+1).$$

Ví dụ. Có bao nhiêu số khác nhau gồm 3 chữ số được lập từ 4 chữ số 1, 2, 3, 4?

Giải. Mỗi số như vậy là một chỉnh hợp chập 3 của 4 phần tử. Do đó số các số như vậy là

$$A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = 4! = 24.$$

1.1.5 Chỉnh hợp lặp

Định nghĩa. Một bộ sắp thứ tự gồm k phần tử (không nhất thiết khác nhau) lấy từ n phần tử đã cho gọi là một *chỉnh hợp lặp chập k* của n phần tử đó ($k \geq 0$).

Như vậy, khác với chỉnh hợp, trong mỗi chỉnh hợp lặp, không đòi hỏi các phần tử phải khác nhau. Chẳng hạn tất cả các chỉnh hợp lặp chập 2 của 3 phần tử của tập $M = \{1, 2, 3\}$ là

$$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3).$$

Số các chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử được kí hiệu là $\tilde{A}_n^k$.

Định lý. Số các chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử đã cho là

$$\tilde{A}_n^k = n^k.$$

Chứng minh. Mỗi chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử là kết quả của hành động chọn gồm k bước. Mỗi bước đều có n cách thực hiện (vì không đòi hỏi các phần tử phải khác nhau). Từ đó, theo qui tắc nhân, ta có

$$\tilde{A}_n^k = n.n....n = n^k.$$

Trong ví dụ trên, ta có $n = 3, k = 2$. Vậy số các chỉnh hợp lặp chập 2 của 3 phần tử là

$$\tilde{A}_3^2 = 3^2 = 9.$$

Ví dụ. Có bao nhiêu cách sắp xếp ngẫu nhiên 15 hành khách lên ba toa tàu?

Giải. Mỗi cách sắp xếp như vậy là một chỉnh hợp lặp chập 15 của 3 phần tử. Do đó số cách sắp xếp là

$$\tilde{A}_{15}^3 = 3^{15}.$$

1.1.6 Tổ hợp

Định nghĩa. Một tập con (không kể thứ tự) gồm k phần tử lấy từ n phần tử đã cho gọi là một *tổ hợp chập k* của n phần tử đó ($0 \leq k \leq n$).

Ký hiệu C_n^k là số các tổ hợp chập k của n phần tử đã cho.

Định lý. Số tổ hợp chập k của n phần tử là

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (\text{quy ước } 0! = 1).$$

Chứng minh. Mỗi tổ hợp chập k của n phần tử sinh ra $k!$ chỉnh hợp chập k khác nhau của n phần tử đó (các chỉnh hợp này chỉ khác nhau ở thứ tự sắp xếp của các phần tử). Do đó ta có

$$A_n^k = k!C_n^k.$$

Suy ra

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}.$$

Định lý được chứng minh.

Từ công thức nêu trong định lý trên, dễ dàng suy ra các công thức sau đây

$$C_n^k = C_n^{n-k},$$

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k.$$

Ví dụ. Có bao nhiêu cách sắp xếp ngẫu nhiên 15 hành khách lên 3 toa tàu mà toa thứ nhất có đúng 3 hành khách?

Giải. Ta thấy có C_{15}^3 cách lấy 3 trong 15 hành khách cho vào toa I. Số cách phân ngẫu nhiên 12 người còn lại lên hai toa kia là 2^{12} . Vậy số cách phân ngẫu nhiên 15 hành khách lên 3 toa tàu mà toa I có đúng 3 hành khách là $C_{15}^3 \cdot 2^{12}$.

1.1.7 Công thức nhị thức Newton

Trên tập số thực, ta đã rất quen thuộc với các hằng đẳng thức

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Bằng qui nạp có thể chứng minh được công thức sau đây, gọi là *công thức nhị thức Newton*

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} \quad (\forall a, b \in \mathbb{R}).$$

Đặc biệt, với $a = b = 1$ ta có $2^n = \sum_{k=0}^n C_n^k$.

Với $a = 1, b = -1$ ta có $0 = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k$.

Nếu thay b bởi $-b$ thì ta có công thức

$$(a - b)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k a^k b^{n-k} \quad (\forall a, b \in \mathbb{R}).$$

1.2 Phép thử ngẫu nhiên và biến cố

1.2.1 Tất nhiên và ngẫu nhiên

Như ta đã biết, các hiện tượng trong tự nhiên và xã hội có thể được chia làm hai loại: tất nhiên và ngẫu nhiên.

Hiện tượng tất nhiên là hiện tượng chắc chắn xảy ra khi có một họ điều kiện nào đó được thực hiện. Chẳng hạn, với điều kiện áp suất bình thường của khí quyển và nhiệt độ 100°C nước chắc chắn sôi; với điều kiện cho axit clohidric (HCl) tác dụng với natri hiđrôxit (NaOH) chắc chắn xuất hiện muối ăn và nước...

Hiện tượng ngẫu nhiên là hiện tượng có thể xảy ra hoặc không xảy ra khi có một họ điều kiện nào đó được thực hiện. Chẳng hạn, khi ta gieo một đồng tiền đối

xúng, ta không thể biết được mặt sấp hay mặt ngửa sẽ xuất hiện. Như vậy, các hiện tượng "Mặt sấp xuất hiện" và "Mặt ngửa xuất hiện" là các hiện tượng ngẫu nhiên. Kết quả của một lần kiểm tra chất lượng sản phẩm, kết quả của một lần bắn bia...cũng là những hiện tượng ngẫu nhiên.

Tính bất định của sự xuất hiện của các hiện tượng ngẫu nhiên làm nảy sinh nhu cầu nghiên cứu khả năng xuất hiện của chúng. Đây chính là một trong những nguyên nhân ra đời và phát triển của lý thuyết xác suất.

1.2.2 Phép thử ngẫu nhiên và không gian biến cố sơ cấp

Để nghiên cứu các hiện tượng ngẫu nhiên, người ta thường phải tiến hành các phép thử ngẫu nhiên. *Phép thử ngẫu nhiên* là một hành động mà kết quả của nó là ngẫu nhiên, không thể dự báo trước được. Khi thực hiện phép thử ngẫu nhiên thì các kết quả của nó không thể xác định trước được. Tuy nhiên, ta có thể xác định được tập hợp tất cả các kết quả có thể có của nó. Tập hợp đó được gọi là *không gian biến cố sơ cấp* và được ký hiệu bởi chữ Ω . Mỗi phần tử ω của Ω sẽ được gọi là *một biến cố sơ cấp* (BCSC).

Ví dụ. Khi tung một đồng tiền cân đối đồng chất ta không biết trước kết quả là xuất hiện mặt sấp (S) hay mặt ngửa (N). Tuy nhiên, có thể xác định được các kết quả có thể có là S và N. Vậy hành động tung đồng tiền là một phép thử ngẫu nhiên và không gian biến cố sơ cấp của phép thử này là $\Omega = \{S, N\}$.

Tương tự, hành động tung một con xúc xắc cân đối đồng chất, hành động kiểm tra ngẫu nhiên chất lượng sản phẩm của một nhà máy... cũng là những phép thử ngẫu nhiên.

1.2.3 Biến cố

Giả sử G là một phép thử ngẫu nhiên. Một sự kiện, mà việc xảy ra hay không xảy ra của nó phụ thuộc hoàn toàn vào kết quả của G, được gọi là một *biến cố* của G.

Một BCSC ω của G được gọi là thuận lợi cho biến cố A nếu khi kết quả của G là ω thì A xảy ra.

Ví dụ. Xét phép thử: Tung một con xúc xắc cân đối, đồng chất. Gọi M_i là biến cố "xuất hiện mặt i chấm", C là biến cố "xuất hiện mặt có số chấm chẵn", L là biến cố "xuất hiện mặt có số chấm lẻ". Vậy thì

Không gian các BCSC là $\Omega = \{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6\}$.

Tập hợp các BCSC thuận lợi cho C là $\{M_2, M_4, M_6\}$.

Tập hợp các BCSC thuận lợi cho L là $\{M_1, M_3, M_5\}$.

Nhận xét rằng một biến cố được xác định hoàn toàn với tập hợp các BCSC thuận lợi cho nó. Vì lý do đó, trong lý thuyết xác suất; người ta đồng nhất một biến cố với tập con của Ω gồm các BCSC thuận lợi cho biến cố đó. Chẳng hạn, trong ví dụ trên

$$C = \{M_2, M_4, M_6\} \quad L = \{M_1, M_3, M_5\}$$

Như vậy, có thể hiểu nôm na là, các biến cố được tạo nên từ các BCSC.

Các loại biến cố

Một biến cố được gọi là *biến cố không thể có*, nếu nó không thể xảy ra khi phép thử được thực hiện. Như vậy không có BCSC nào của Ω thuận lợi cho biến cố không thể có. Do đó, biến cố không thể có được đồng nhất với tập $\emptyset$.

Một biến cố được gọi là *biến cố chắc chắn*, nếu nó chắc chắn xảy ra khi phép thử được thực hiện. Mọi BCSC của phép thử đều thuận lợi cho biến cố chắc chắn. Do đó, biến cố chắc chắn được đồng nhất với toàn bộ tập Ω .

Một biến cố được gọi là *biến cố ngẫu nhiên*, nếu nó có thể xảy ra hoặc không xảy ra khi phép thử được thực hiện. Biến cố ngẫu nhiên thường được ký hiệu bởi các chữ in $A, B, C, \dots$. Chẳng hạn, trong ví dụ trên

Biến cố "Số chấm xuất hiện > 6 " là biến cố không thể có ($\emptyset$)

Biến cố "Số chấm xuất hiện ≤ 6 " là biến cố chắc chắn (Ω)

Các biến cố $C = \{M_2, M_4, M_6\}$ và $L = \{M_1, M_3, M_5\}$ là các biến cố ngẫu nhiên.

1.2.4 Quan hệ và phép toán giữa các biến cố

Quan hệ thuận lợi. Ta nói biến cố A *thuận lợi* cho biến cố B nếu khi A xảy ra thì B xảy ra. Rõ ràng, A thuận lợi cho B khi và chỉ khi tập hợp các BCSC thuận lợi cho A là tập con của tập hợp các BCSC thuận lợi cho B . Do đó, nếu A thuận lợi cho B thì ta kí hiệu

$$A \subset B$$

Quan hệ bằng nhau. Hai biến cố A và B gọi là *bằng nhau* (hay *tương đương*) nếu A xảy ra khi và chỉ khi B xảy ra. Nói cách khác, A và B bằng nhau khi và chỉ khi $A \subset B$ và $B \subset A$. Nếu A và B bằng nhau thì ta kí hiệu

$$A = B.$$

Hợp của các biến cố. Biến cố A được gọi là *hợp* của 2 biến cố B và C nếu A xảy ra khi và chỉ khi ít nhất một trong 2 biến cố B hoặc C xảy ra. Lúc đó ta có kí hiệu

$$A = B \cup C$$

Tổng quát. Biến cố A được gọi là *hợp* của họ biến cố $A_i (i \in I)$ nếu A xảy ra khi và chỉ khi ít nhất một trong các biến cố $A_i (i \in I)$ xảy ra. Kí hiệu

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i.$$

Giao các biến cố. Biến cố A được gọi là *giao* (tích) của 2 biến cố B và C nếu A xảy ra khi và chỉ khi B và C đồng thời xảy ra. Kí hiệu

$$A = B \cap C \quad (A = B.C).$$

Tổng quát. Biến cố A được gọi là *giao* (tích) của họ các biến cố $A_i, (i \in I)$ nếu A xảy ra khi và chỉ khi tất cả các $A_i, (i \in I)$ đều xảy ra. Kí hiệu

$$A = \bigcap_{i \in I} A_i \quad (A = \prod_{i \in I} A_i).$$

Hiệu các biến cố. Biến cố A được gọi là *hiệu* của biến cố B với biến cố C nếu A xảy ra khi và chỉ khi B xảy ra và C không xảy ra. Kí hiệu

$$A = B \setminus C.$$

Các biến cố xung khắc. Hai biến cố A và B được gọi là *xung khắc* nếu chúng không thể đồng thời xảy ra. Nói cách khác, A và B được gọi là xung khắc nếu

$$A.B = \emptyset.$$

Biến cố đối lập. Biến cố $\overline{A}$ được gọi là *biến cố đối lập* của biến cố A nếu $\overline{A}$ xảy ra khi và chỉ khi A không xảy ra. Rõ ràng lúc đó ta có

$$A = \overline{\overline{A}}, \quad A = \Omega \setminus \overline{A}, \quad A = \overline{\overline{A}}.$$

Họ đầy đủ các biến cố. Họ n biến cố $H_1, H_2, \dots, H_n$ được gọi là *họ đầy đủ các biến cố* nếu chúng thoả mãn đồng thời hai điều kiện sau

1. Chúng xung khắc với nhau đôi một. Tức là

$$H_i H_j = \emptyset, \quad (i \neq j)$$

2. Hợp của chúng là biến cố chắc chắn. Tức là

$$H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n = \Omega.$$

Nói cách khác, $H_1, H_2, \dots, H_n$ là họ đầy đủ các biến cố nếu khi phép thử được thực hiện thì có một và chỉ một trong các biến cố đó xảy ra. Chẳng hạn nếu A là biến cố bất kì thì A và $\overline{A}$ lập thành một họ đầy đủ.

Ví dụ. Hai người cùng bắn, mỗi người bắn một viên vào bia. A_i là biến cố “Người thứ i bắn trúng” ($i = 1, 2$). Vậy thì

$A_1 A_2$ là biến cố “cả hai người cùng bắn trúng”.

$A_1 \overline{A_2} \cup \overline{A_1} A_2$ là biến cố “có đúng một người bắn trúng”.

$\overline{A_1} \overline{A_2}$ là biến cố “không ai bắn trúng”.

Họ đầy đủ các biến cố là: $A_1, \overline{A_1}$ hoặc $\overline{A_1} \overline{A_2}, \overline{A_1} A_2, A_1 \overline{A_2}, A_1 A_2$.

Chú ý. Quan hệ và phép toán trên tập hợp các biến cố có tất cả các tính chất của quan hệ và phép toán trên các tập hợp. Chẳng hạn

1. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (AB)C = A(BC).$
2. $A(B \cup C) = AB \cup AC, \quad (A \cup B)C = AC \cup BC.$
3. $A\Omega = A, \quad A \cup \Omega = \Omega.$
4. $A \cup \emptyset = A, \quad A\emptyset = \emptyset.$
5. (Công thức De-Morgan) $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}.$

1.3 Xác suất của biến cố

Nói chung, một biến cố có thể xảy ra hoặc không xảy ra khi phép thử được thực hiện. Do đó, nảy sinh nhu cầu đo lường khả năng xuất hiện của nó. Số biểu thị khả năng xuất hiện của biến cố A gọi là xác suất của biến cố đó và được kí hiệu là $\mathbb{P}(A)$.

Có nhiều cách định nghĩa xác suất. Dưới đây sẽ trình bày một số định nghĩa quan trọng.

1.3.1 Định nghĩa xác suất cổ điển

Định nghĩa. Giả sử không gian BCSC của phép thử có n BCSC có cùng khả năng xuất hiện; trong đó có m BCSC thuận lợi cho biến cố A . Khi đó, số

$$\mathbb{P}(A) = \frac{m}{n}.$$

được gọi là *xác suất* của biến cố A .

Các biến cố có cùng khả năng xuất hiện được gọi là các biến cố đồng khả năng.

Ví dụ.

1. Xét phép thử tung một con xúc xắc cân đối đồng chất. Rõ ràng

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(L) = \frac{1}{2}.$$

2. Một nhóm học tập có 10 học sinh trong đó có 7 học sinh yếu. Kiểm tra ngẫu nhiên 3 em. Tính xác suất để

- Cả 3 em được kiểm tra đều là học sinh yếu.
- Trong 3 em được kiểm tra có một học sinh yếu.
- Có ít nhất một học sinh yếu được kiểm tra.

Giải. Gọi A, B, C là các biến cố nêu trong các câu a, b, c tương ứng. Số cách chọn 3 em trong 10 em là $n = C_{10}^3$

a. Số cách chọn cả 3 em yếu là C_7^3 . Do đó

$$\mathbb{P}(A) = \frac{C_7^3}{C_{10}^3}.$$

b. Số cách chọn 3 em trong đó có 1 em yếu là $C_7^1 C_3^2$. Do đó

$$\mathbb{P}(B) = \frac{C_7^1 C_3^2}{C_{10}^3}.$$

c. Chỉ có một cách chọn 3 em đều không học yếu. Do đó

$$\mathbb{P}(C) = \frac{C_{10}^3 - 1}{C_{10}^3}.$$

Chú ý. Trong định nghĩa xác suất cổ điển, đòi hỏi số BCSC của phép thử phải hữu hạn và các BCSC phải có cùng khả năng xuất hiện. Đòi hỏi này thường được thoả mãn trong các trò chơi may rủi, hoặc trong các phép thử mà việc chọn lựa là vô tư, ngẫu nhiên và các dụng cụ thử là cân đối, đồng chất. Nếu số BCSC là vô hạn, hoặc hữu hạn nhưng không đồng khả năng xuất hiện, thì cách tính xác suất cổ điển không còn đúng nữa.

1.3.2 Định nghĩa xác suất bằng tần suất

Tần suất của một biến cố. Giả sử phép thử G có thể lặp đi lặp lại nhiều lần độc lập nhau; A là một biến cố của G . Thực hiện G n lần. Giả sử trong n lần đó, A xuất hiện $k_n(A)$ lần. Khi đó tỉ số

$$f_n(A) = \frac{k_n(A)}{n}$$

được gọi là *tần suất* xuất hiện của biến cố A trong n phép thử. Có thể dễ dàng nhận thấy rằng tần suất có những tính chất sau đây

- $0 \leq f_n(A) \leq 1$.
- $f_n(\Omega) = 1$.
- Nếu $AB = \emptyset$ thì $f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B)$.

Định nghĩa xác suất theo tần suất. Người ta nhận thấy rằng khi số phép thử tăng lên vô hạn, tần suất của $f_n(A)$ luôn dần tới một giới hạn xác định. Giới hạn đó được định nghĩa là xác suất của biến cố A và được ký hiệu là $\mathbb{P}(A)$.

Trên thực tế $\mathbb{P}(A)$ được tính xấp xỉ bởi $f_n(A)$ với n đủ lớn. Chẳng hạn, khi tiến

hành thí nghiệm tung đồng tiền nhiều lần, ta thấy tần suất xuất hiện mặt sấp (S) xấp xỉ 0,5. Do đó, ta định nghĩa $\mathbb{P}(S) = 0,5$.

Định nghĩa xác suất bằng tần suất chỉ áp dụng được cho các phép thử ngẫu nhiên có thể lặp đi lặp lại nhiều lần độc lập nhau trong những điều kiện giống hệt nhau. Ngoài ra, ta chỉ có thể xác định được tương đối chính xác giá trị của xác suất khi tiến hành một số đủ nhiều các phép thử; mà điều này đôi khi không thể làm được vì hạn chế về thời gian và kinh phí.

1.3.3 Định nghĩa xác suất hình học

Trong trường hợp không gian BCSC Ω của phép thử G có vô số BCSC có cùng khả năng xuất hiện và Ω có thể biểu diễn bởi một tập đo được thì ta có định nghĩa sau đây.

Định nghĩa. Giả sử không gian BCSC Ω của phép thử có vô số BCSC có cùng khả năng xuất hiện và Ω được biểu diễn bởi một tập đo được H_Ω . Khi đó nếu biến cố A được biểu diễn bởi một tập đo được H_A thì số

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{độ đo } H_A}{\text{độ đo } H_\Omega}$$

được gọi là *xác suất* của biến cố A .

Trong đó "tập đo được" là tập trên đường thẳng (mặt phẳng, không gian) có độ dài (diện tích, thể tích) còn "độ đo" của một tập là độ dài (diện tích, thể tích) của tập đó.

Ví dụ. Hai người bạn hẹn gặp nhau trong không thời gian từ 7 đến 8 giờ. Biết rằng khả năng họ đến điểm hẹn vào mọi thời điểm trong thời gian hẹn là như nhau. Ngoài ra; người đến trước đợi người đến sau đúng 20 phút, nếu không gặp sẽ bỏ đi. Tìm xác suất để 2 người gặp nhau.

Giải. Gọi thời điểm đến điểm hẹn của người thứ nhất là x , của người thứ 2 là y ($7 \leq x \leq 8, 7 \leq y \leq 8$). Vậy thì có thể biểu diễn BCSC "người thứ nhất đến vào thời điểm x , người thứ 2 đến vào thời điểm y " bởi cặp số (x, y) . Khi đó, không gian BCSC Ω được biểu diễn bởi hình vuông

$$H_\Omega = \{(x, y) : 7 \leq x \leq 8, 7 \leq y \leq 8\}.$$

Biến cố $A =$ "2 người gặp nhau" được biểu diễn bởi tập

$$H_A = \{(x, y) \in H_\Omega : |x - y| \leq \frac{1}{3}\},$$

(20 phút = $\frac{1}{3}$ giờ). Vậy

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{d.tích } H_A}{\text{d.tích } H_\Omega} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}.$$

1.3.4 Định nghĩa xác suất bằng phương pháp tiên đề

Các định nghĩa xác suất trình bày ở trên có ưu điểm là khá trực quan và rất tiện lợi trong việc giải một số lớp bài toán ứng dụng cụ thể. Tuy nhiên, chúng đều có hạn chế là không tổng quát và cũng không thật chặt chẽ. Để khắc phục hạn chế này, năm 1933, nhà toán học Nga Kolmogorov đã xây dựng xác suất bằng một hệ tiên đề. Trước hết, chúng ta đề cập đến một số khái niệm liên quan.

σ -đại số

Giả sử Ω là một tập hợp bất kì khác rỗng. Một họ $\mathcal{F}$ gồm các tập con nào đó của Ω được gọi là một σ -đại số, nếu

- i. $\Omega \in \mathcal{F}$
 - ii. Nếu $A \in \mathcal{F}$ thì $\Omega \setminus A \in \mathcal{F}$
 - iii. Nếu $A_n \in \mathcal{F}$ ($n = 1, 2, \dots$) thì $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.
- σ -đại số còn được gọi là σ -trường.

Không gian đo và độ đo xác suất

Giả sử Ω là một tập khác rỗng, $\mathcal{F}$ là một σ -đại số các tập con của Ω . Khi đó, cặp $(\Omega, \mathcal{F})$ được gọi là một *không gian đo*.

Giả sử $(\Omega, \mathcal{F})$ gọi là một không gian đo. Một ánh xạ $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là *độ đo xác suất* trên $\mathcal{F}$ nếu

- i. $\mathbb{P}(A) \geq 0$ với $\forall A \in \mathcal{F}$ (tính không âm)
- ii. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (tính chuẩn hoá)
- iii. Nếu $A_n \in \mathcal{F}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), $A_i \cap A_j = \emptyset$ ($i \neq j$) thì $\mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$ (tính cộng tính đếm được).

Bây giờ, giả sử Ω là tập bất kỳ khác rỗng, $\mathcal{F}$ là một σ -đại số các tập con của Ω , $\mathbb{P}$ là độ đo xác suất trên $\mathcal{F}$. Khi đó, bộ ba $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ được gọi là *không gian xác suất*.

Tập Ω được gọi là *không gian biến cố sơ cấp*.

σ -đại số $\mathcal{F}$ được gọi là *đại số các biến cố*.

Mỗi $A \in \mathcal{F}$ được gọi là một *biến cố*.

Nếu $A \cap B = \emptyset$ thì A, B được gọi là các *biến cố xung khắc*.

Biến cố $\Omega \in \mathcal{F}$ gọi là *biến cố chắc chắn*.

Biến cố $\emptyset \in \mathcal{F}$ gọi là *biến cố không thể có*.

Biến cố $\bar{A} = \Omega \setminus A$ được gọi là *biến cố đối lập* của biến cố A .

Không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ gọi là *không gian xác suất đầy đủ* nếu mọi tập con của biến cố có xác suất không đều là biến cố. Để đơn giản, từ nay về sau, khi nói đến không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, ta luôn xem đó là không gian xác suất đầy đủ.

Chú ý. Điều kiện (ii) trong định nghĩa trên đảm bảo rằng biến cố chắc chắn có xác suất bằng 1. Tuy nhiên, sau này ta sẽ gặp những biến cố có xác suất bằng 1 nhưng chưa chắc đã là biến cố chắc chắn. Những biến cố như vậy gọi là *biến cố hầu chắc chắn*.

Ví dụ.

1. Giả sử G là một phép thử mà không gian BCSC Ω của nó gồm n BCSC có cùng khả năng xuất hiện. Gọi $\mathcal{F}$ là họ tất cả các tập con của Ω . Với mỗi $A \in \mathcal{F}$ đặt

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Trong đó $|A|$ là số phần tử của A .

Rõ ràng $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn các tiên đề xác suất. Đây chính là định nghĩa xác suất cổ điển. Như vậy, trong mô hình cổ điển, mọi tập $A \subset \Omega$ đều là biến cố.

2. Giả sử G là một phép thử mà không gian các BCSC của nó có vô số BCSC có cùng khả năng xuất hiện và được biểu diễn bởi một tập đo được H_Ω . Gọi $\mathcal{F}$ là họ tất cả các tập con đo được của H_Ω . Mỗi $H \in \mathcal{F}$ đặt

$$\mathbb{P}(H) = \frac{\text{độ đo}(H)}{\text{độ đo}(H_\Omega)}.$$

Dễ thấy $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ lập thành một không gian xác suất.

Bây giờ, giả sử A là một biến cố của phép thử. Nếu A được biểu diễn bởi tập đo được H_A thì ta đặt

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(H_A).$$

Đây chính là định nghĩa xác suất hình học.

3. Giả sử Ω là một tập vô hạn đếm được $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots)$ còn (p_n) là một dãy số không âm thoả mãn điều kiện $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$. Gọi $\mathcal{F}$ là σ - đại số tất cả các tập con của Ω . Với mỗi $A \in \mathcal{F}$ đặt

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i.$$

Dễ thấy ánh xạ $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định như trên là xác suất và $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ trở thành một không gian xác suất. Mô hình này được gọi là mô hình xác suất rời rạc.

Như vậy, có nhiều cách định nghĩa xác suất thoả mãn tiên đề Kolmogorov. Vấn đề là ở chỗ cần định nghĩa xác suất sao cho phù hợp với thực tiễn khách quan.

1.3.5 Các tính chất của xác suất

Giả sử $A, B, C, \dots$ là những biến cố. Khi đó, xác suất của chúng có các tính chất sau

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

Thật vậy, đặt $A_1 = \Omega$; $A_n = \emptyset (\forall n > 1)$. Khi đó, sử dụng (iii) ta được

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\Omega) + \sum_{n=2}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Suy ra

$$\sum_{n=2}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0.$$

Điều này, cùng với (i) cho ta

$$\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(A_n) = 0 (\forall n > 1).$$

2. Nếu $AB = \emptyset$ thì $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Tính chất này là hệ quả trực tiếp của tiên đề về tính cộng tính đếm được của độ đo xác suất và tính chất 1.

3. $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Thật vậy, ta có

$$A \cup \overline{A} = \Omega, \quad A\overline{A} = \emptyset.$$

Suy ra

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup \overline{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}).$$

Nên

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A).$$

4. Nếu $A \subset B$ thì $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$ và do đó $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

Thật vậy

$$B = A \cup (B \setminus A), \quad A(B \setminus A) = \emptyset.$$

Nên

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \geq \mathbb{P}(A).$$

Suy ra

$$\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A).$$

$$5. \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB).$$

Thật vậy, ta có

$$A \cup B = A \cup (B \setminus AB); \quad A(B \setminus AB) = \emptyset; \quad AB \subset B.$$

Suy ra

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus AB) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB).$$

$$6. \quad \mathbb{P}(\cup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) - \sum_{1 \leq k < i \leq n} \mathbb{P}(A_k A_i) + \sum_{1 \leq k < l < m \leq n} \mathbb{P}(A_k A_l A_m) - \dots + (-1)^{n-1} \mathbb{P}(A_1 A_2 \dots A_n).$$

Thật vậy, với $n = 2$, công thức trên chính là tính chất (5). Bằng phương pháp quy nạp toán học, sẽ chứng minh được kết quả cho trường hợp $n > 2$.

$$7. \mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Thật vậy, đặt

$$B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus B_1, \dots, B_n = A_n \setminus \cup_{k=1}^{n-1} B_k.$$

Lúc đó

$$\mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

8. (Tính liên tục của xác suất)

i. Nếu (A_n) là dãy đơn điệu tăng, $A_1 \subset A_2 \subset \dots A_n \subset \dots$, thì tồn tại

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n).$$

ii. Nếu (A_n) là dãy đơn điệu giảm, $A_1 \supset A_2 \supset \dots A_n \supset \dots$, thì tồn tại

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\cap_{n=1}^{\infty} A_n).$$

Thật vậy, giả sử (A_n) là dãy tăng. Đặt

$$B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus B_1, \dots, B_n = A_n \setminus A_{n-1} = A_n \setminus \cup_{k=1}^{n-1} B_k.$$

Lúc đó

$$\cup_{k=1}^n B_k = \cup_{k=1}^n A_k = A_n, \cup_{n=1}^{\infty} B_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n, B_i \cap B_j = \emptyset.$$

Suy ra

$$\mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\cup_{k=1}^n B_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Bây giờ giả sử (A_n) là dãy đơn điệu giảm. Vậy thì $(\overline{A_n})$ là dãy đơn điệu tăng, nên theo (i) ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\overline{A_n}) = \mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}) = \mathbb{P}(\overline{\cap_{n=1}^{\infty} A_n}) = 1 - \mathbb{P}(\cap_{n=1}^{\infty} A_n).$$

Suy ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \mathbb{P}(\overline{A_n})) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\overline{A_n}) = 1 - (1 - \mathbb{P}(\cap_{n=1}^{\infty} A_n)) = \mathbb{P}(\cap_{n=1}^{\infty} A_n).$$

Đó là điều cần chứng minh.

1.4 Xác suất có điều kiện

1.4.1 Định nghĩa và ví dụ

Trong thực tế, nhiều khi ta phải tính xác suất của một biến cố khi biết một biến cố khác đã xảy ra. Xác suất đó gọi là xác suất có điều kiện và được định nghĩa như sau.

Định nghĩa 1. Giả sử A và B là các biến cố. Xác suất của B được tính với giả thiết A đã xảy ra được gọi là *xác suất của B với điều kiện A* và được kí hiệu là $\mathbb{P}(B/A)$.

Xác suất của B với điều kiện A còn được gọi là *xác suất có điều kiện của A đối với B* .

Ví dụ. Một lớp học có n học sinh, trong đó có m học sinh nữ ($m \leq n$). Trong m học sinh nữ đó có k em học yếu ($k \leq m$). Kiểm tra ngẫu nhiên một học sinh. Gọi A là biến cố “học sinh đó là nữ”, B là biến cố “học sinh đó học yếu”. Vậy thì rõ ràng $\mathbb{P}(B/A)$ là tỉ lệ học sinh nữ học yếu. Do đó

$$\mathbb{P}(B/A) = \frac{k}{m}.$$

Mặt khác, dễ dàng nhận thấy rằng

$$\mathbb{P}(A) = \frac{m}{n}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{k}{n}.$$

Suy ra

$$\mathbb{P}(B/A) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Qua kiểm nghiệm thực tế, người ta nhận thấy công thức trên luôn luôn đúng. Điều này gợi ý cho ta đi đến định nghĩa sau

Định nghĩa 2. Giả sử $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ là không gian xác suất. $A, B \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) > 0$. Khi đó số

$$\mathbb{P}(B/A) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(A)} \tag{1}$$

được gọi là *xác suất của B với điều kiện A* .

Chú ý.

1. Nếu $\mathbb{P}(A) = 0$ thì vẫn có $\mathbb{P}(B/A)$ nhưng không thể áp dụng công thức (1).

2. Tùy theo tình huống cụ thể mà có thể tính $\mathbb{P}(B/A)$ theo một trong hai định nghĩa trên.

1.4.2 Tính chất.

1. $\mathbb{P}(B/A) \geq 0$. (Hiển nhiên).

2. Nếu $B \supset A$ thì $\mathbb{P}(B/A) = 1$. Đặc biệt $\mathbb{P}(\Omega/A) = 1$.

Chứng minh.

$$B \supset A \Rightarrow AB = A \Rightarrow \mathbb{P}(B/A) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = 1.$$

3. Nếu (B_n) là dãy các biến cố đôi một xung khắc thì

$$\mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} B_n/A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n/A).$$

Chứng minh. Trước hết nhận xét rằng nếu (B_n) là dãy biến cố đôi một xung khắc thì (AB_n) cũng là dãy biến cố đôi một xung khắc. Do đó

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} B_n/A) &= \frac{\mathbb{P}((\cup_{n=1}^{\infty} B_n)A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} (AB_n))}{\mathbb{P}(A)} \\ &= \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(AB_n)}{\mathbb{P}(A)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{P}(AB_n)}{\mathbb{P}(A)} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n/A).\end{aligned}$$

Từ (1)- (3) suy ra rằng, Nếu A là một biến cố, $\mathbb{P}(A) > 0$ thì ánh xạ $\mathbb{P}_A : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi công thức

$$\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B/A) \quad (\forall B \in \mathcal{F})$$

cũng là xác suất trên $\mathcal{F}$.

1.4.3 Quy tắc nhân

Định lý. Giả sử $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n \geq 2$), là n biến cố bất kì sao cho $\mathbb{P}(A_1 A_2 \dots A_{n-1}) > 0$. Khi đó

$$\mathbb{P}(A_1 A_2 \dots A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2/A_1) \dots \mathbb{P}(A_n/A_1 \dots A_{n-1}). \quad (2)$$

Chứng minh. Ta chứng minh quy nạp theo n . Ta có, với mọi $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}(A_2/A_1) = \frac{\mathbb{P}(A_1 A_2)}{\mathbb{P}(A_1)}$$

Do đó

$$\mathbb{P}(A_1 A_2) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2/A_1).$$

Vậy (2) đúng với $n = 2$.

Giả sử (2) đúng đến $n = k$ ta chứng minh nó đúng đến $n = k + 1$. Giả sử $A_i \in \mathcal{F}; i = 1, 2, \dots, k, k + 1$. Lúc đó

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 A_2 \dots A_k A_{k+1}) &= \mathbb{P}[(A_1 A_2 \dots A_k) A_{k+1}] \\ &= \mathbb{P}(A_1 A_2 \dots A_k) \cdot \mathbb{P}(A_{k+1}/A_1 A_2 \dots A_k).\end{aligned}$$

Mặt khác, do giả thiết qui nạp

$$\mathbb{P}(A_1 A_2 \dots A_k) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2/A_1) \dots \mathbb{P}(A_k/A_1 A_2 \dots A_{k-1}).$$

Suy ra

$$\mathbb{P}(A_1 A_2 \dots A_k A_{k+1}) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2/A_1) \dots \mathbb{P}(A_{k+1}/A_1 A_2 \dots A_k).$$

Ví dụ. Một tủ kho có một chùm chìa khoá gồm 9 chiếc bề ngoài giống hệt nhau nhưng chỉ có 2 chìa mở được kho. Anh ta thử ngẫu nhiên từng chìa (chìa nào không mở được thì bỏ ra). Tìm xác suất để anh ta mở được cửa ở lần mở thứ 3?

Giải. Gọi A_i là biến cố “thử đúng chìa ở lần thứ i ”. Ta phải tính $\mathbb{P}(\overline{A_1} \overline{A_2} A_3)$. Áp dụng qui tắc nhân, ta có

$$\mathbb{P}(\overline{A_1} \overline{A_2} A_3) = \mathbb{P}(\overline{A_1}) \mathbb{P}(\overline{A_2}/\overline{A_1}) \mathbb{P}(A_3/\overline{A_1} \overline{A_2}).$$

Dễ thấy

$$\mathbb{P}(\overline{A_1}) = \frac{7}{9}, \quad \mathbb{P}(\overline{A_2}/\overline{A_1}) = \frac{6}{8}, \quad \mathbb{P}(A_3/\overline{A_1}\overline{A_2}) = \frac{2}{7}.$$

Do đó

$$\mathbb{P}(\overline{A_2}\overline{A_1}A_3) = \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{6}.$$

1.4.4 Công thức xác suất đầy đủ và công thức Bayes

Định lý. Giả sử $H_1, H_2, \dots, H_n$ là họ đầy đủ các biến cố và $\mathbb{P}(H_i) > 0, (\forall i = 1, 2, \dots, n)$.

Khi đó, với biến cố A bất kì, ta có

i) $\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A/H_i)\mathbb{P}(H_i)$.

ii) Nếu $\mathbb{P}(A) > 0$ thì

$$\mathbb{P}(H_k/A) = \frac{\mathbb{P}(A/H_k)\mathbb{P}(H_k)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A/H_i)\mathbb{P}(H_i)} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Chứng minh.

i) Ta có

$$A = A\Omega = A(\cup_{i=1}^n H_i) = \cup_{i=1}^n AH_i \\ (AH_i)(AH_j) = A(H_i H_j) = A\emptyset = \emptyset \quad (i \neq j).$$

Do đó

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A(\cup_{i=1}^n H_i)) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(AH_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A/H_i)\mathbb{P}(H_i).$$

ii) $\mathbb{P}(H_k/A) = \frac{\mathbb{P}(AH_k)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A/H_k)\mathbb{P}(H_k)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A/H_i)\mathbb{P}(H_i)}.$

Công thức (i) gọi là công thức xác suất đầy đủ còn công thức (ii) gọi là công thức Bayes.

Ví dụ. Trong một trường PTTH số học sinh các khối 10, 11, 12 tương ứng chiếm 40%, 35% và 25% tổng số học sinh của trường. Tỷ lệ học sinh yếu của khối lớp 10 là 25%, khối lớp 11 là 20% và của khối lớp 12 là 10%. Kiểm tra ngẫu nhiên một học sinh của trường

a. Tính xác suất để em đó là học sinh yếu?

b. Giả sử biết rằng em đó là học sinh yếu. Tính xác suất để em đó là học sinh khối 12?

Giải. Kí hiệu A, H_1, H_2, H_3 là các biến cố sau

A "học sinh được kiểm tra là học sinh yếu"

H_1 "học sinh được kiểm tra là học sinh yếu khối 10".

H_2 "học sinh được kiểm tra là học sinh yếu khối 11".

H_3 "học sinh được kiểm tra là học sinh yếu khối 12".

Khi đó H_1, H_2, H_3 lập thành họ đầy đủ và $\mathbb{P}(H_1) = 0,4; \mathbb{P}(H_2) = 0,35; \mathbb{P}(H_3) = 0,25; \mathbb{P}(A/H_1) = 0,25; \mathbb{P}(A/H_2) = 0,2; \mathbb{P}(A/H_3) = 0,1$.

Ta cần tính $\mathbb{P}(A)$ và $\mathbb{P}(H_3/A)$.

Áp dụng công thức xác suất đầy đủ, ta có

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A/H_1).\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A/H_2).\mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}(A/H_3).\mathbb{P}(H_3) \\ &= 0,25.0,4 + 0,2.0,35 + 0,1.0,25 = 0,195 = 19,5\%. \end{aligned}$$

(Đây chính là tỉ lệ học sinh yếu của trường!).

Áp dụng công thức Bayes, ta có

$$\mathbb{P}(H_3/A) = \frac{\mathbb{P}(A/H_3)\mathbb{P}(H_3)}{\mathbb{P}(H_3)} = \frac{0,1 \cdot 0,25}{0,195} \approx 0,128 = 12,8\%.$$

(Điều này có nghĩa là số học sinh yếu của lớp 12 chiếm 12,8% số học sinh yếu của trường!).

1.4.5 Tính độc lập của các biến cố

Định nghĩa 1. Hai biến cố A và B được gọi là độc lập nếu

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Tính chất

1. A, B độc lập khi và chỉ khi $\mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}(A)$ hoặc $\mathbb{P}(B/A) = \mathbb{P}(B)$.

Chứng minh. Giả sử A, B độc lập. Khi đó

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Mặt khác theo công thức nhân

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A/B)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B/A)\mathbb{P}(A)$$

Suy ra

$$\mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}(A); \quad \mathbb{P}(B/A) = \mathbb{P}(B).$$

Ngược lại, giả sử chẳng hạn $\mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}(A)$. Khi đó

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A/B)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Nhận xét. Qua chứng minh trên, ta thấy rằng hai đẳng thức $\mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}(A)$ và $\mathbb{P}(B/A) = \mathbb{P}(B)$ đều tương đương với định nghĩa độc lập và do đó tương đương với nhau.

2. Hai biến cố A và B độc lập khi và chỉ khi một trong các điều kiện sau thoả mãn

i) $\bar{A}, B$ độc lập;

ii) $A, \bar{B}$ độc lập;

iii) $\bar{A}, \bar{B}$ độc lập.

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh trường hợp i) các trường hợp còn lại chứng minh tương tự. Giả sử A, B độc lập. Vậy thì

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\bar{A}B) &= \mathbb{P}(B \setminus AB) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB) \\ &= \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B)(1 - \mathbb{P}(A)) = \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}(B). \end{aligned}$$

Do đó $\bar{A}, B$ độc lập. Ngược lại nếu $\bar{A}, B$ độc lập thì

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(AB) &= \mathbb{P}(B \setminus \bar{A}B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(\bar{A}B) \\ &= \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B)(1 - \mathbb{P}(\bar{A})) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B). \end{aligned}$$