

## Chương 5

# Tích phân Lebesgue trừu tượng. Hàm khả tích

Bây giờ, ta xét trường hợp các hàm  $f$  định nghĩa trên  $E$  nhận giá trị trong  $\mathbb{R}$ ,  $\overline{\mathbb{R}}$  hoặc  $\mathbb{C}$ .

### 5.1 Định nghĩa và tính chất

#### 5.1.1 Định nghĩa

Hàm  $f$  đo được từ  $(E, \mathcal{B}, \mu)$  vào  $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$  gọi là  $\mu$ -khả tích nếu  $\int_E^* f^+ d\mu < +\infty$  và  $\int_E^* f^- d\mu < +\infty$ .

Ta đặt:

$$\begin{aligned} L(f) &= \int_E f d\mu = \int_E^* f^+ d\mu - \int_E^* f^- d\mu \\ &= \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu \end{aligned}$$

Điều này mở rộng trường hợp một hàm  $f \geq 0$  ( $f^- = 0$ ).  $L(f)$  gọi là tích phân Lebesgue trừu tượng của  $f$  trên  $E$ . (Ta chỉ cần xét trường hợp  $E$  vì trên  $A \in \mathcal{B}$  hệ thức:

$$\int_A f d\mu = \int_E f \cdot \mathbf{1}_A d\mu$$

đã thiết lập cho trường hợp hàm dương được suy rộng cho trường hợp tổng quát này).

#### 5.1.2 Ví dụ

Ta lấy lại các ví dụ đã nêu ở chương 4.

**Độ đo Dirac:**  $\delta_a$  khối lượng tại một điểm  $a$ . Với mọi  $A$ , ta có:

$$\int_E^* \mathbf{1}_A d\delta_a = \mathbf{1}_A(a) = \delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } a \in A \\ 0 & \text{nếu } a \notin A \end{cases}$$

Mặt khác giả sử  $f \geq 0$ .  $f \mapsto f(a)$  thỏa mãn điều kiện (i) và (ii) của định lý tồn tại, đẳng thức trên chứng tỏ nó cũng thỏa mãn cả (iii), do đó:

$$\int_E^* f d\delta_a = f(a)$$

Vậy  $f$  là  $\delta_a$ -khả tích khi và chỉ khi  $f(a) < +\infty$ . ( $f \geq 0$ ). Với  $f$  bất kỳ,  $f$  là  $\delta_a$ -khả tích khi và chỉ khi  $|f(a)| < \infty$ .

**Độ đo rời rạc:**  $\mu$  hình thành bởi khối lượng  $\alpha_n$  đặt ở điểm  $x_n$  với cùng phương pháp, ta có kết quả:

$$\int_E^* f d\mu = \sum_n \alpha_n \cdot f(x_n)$$

Như vậy  $f$  là  $\mu$ -khả tích khi và chỉ khi  $\sum_n \alpha_n \cdot |f(x_n)| < \infty$ , tức là họ này khả

tổng. Trường hợp riêng  $\int_{\mathbb{N}}^* f d\mu_d = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ .  $f$  là  $\mu$ -khả tích khi và chỉ khi chuỗi  $\{f(n)\}$  hội tụ tuyệt đối.

**Độ đo Borel và Lebesgue trên  $\mathbb{R}$ :** Đối với các độ đo này, ta sẽ thấy sau này một lớp quan trọng các hàm mà tích phân định nghĩa ở đây chính là tích phân Riemann. Tương tự đối với độ đo Borel-Stieltjes trên  $\mathbb{R}$  với tích phân Riemann-Stieltjes.

### 5.1.3 Hệ quả

Suy từ các tính chất của  $f^+$  và  $f^-$ :

1. Nếu  $f$  là một hàm giá trị thực (chứ không dương) thì ánh xạ  $v : A \mapsto v(A) = \int_A f d\mu$  không còn là một độ đo dương nữa (mà có dấu). Nhưng nó vẫn luôn là một hàm tập  $\sigma$ -cộng tính, tức là:

$$\int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} f d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f d\mu, \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j.$$

2. Mọi hàm  $f$   $\mu$ -khả tích là hữu hạn  $\mu$ -hkn.
3. Nếu  $f = g$   $\mu$ -hkn và nếu  $f$  là  $\mu$ -khả tích thì  $g$   $\mu$ -khả tích và ta có:  $L(f) = L(g)$ .

**Định lý 5.1.** (i) Không gian của các hàm thực  $\mu$ -khả tích là một  $\mathbb{R}$ -không gian tuyến tính và ánh xạ  $L : f \mapsto L(f) = \int_E f \, d\mu$  là một phiếm hàm tuyến tính trên không gian này.

(ii) Nếu  $f$  là đo được,  $g$  là  $\mu$ -khả tích và  $|f| \leq g$ . Khi đó,  $f$  là  $\mu$ -khả tích.

(iii) Hàm  $f$  đo được là  $\mu$ -khả tích khi và chỉ khi  $|f|$  cũng thế. Với mọi hàm  $f$   $\mu$ -khả tích, ta có  $|L(f)| \leq L(|f|)$ . Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $f$  có dấu không đổi  $\mu$ -hkn.

*Chứng minh.* (i) Giả sử:  $f = f_1 - f_2$ , nếu  $f_1$  và  $f_2 \geq 0$ ,  $\mu$ -khả tích. Khi đó,  $f$  là  $\mu$ -khả tích. Thực vậy:

$$\begin{aligned} f^+ &= \sup(f, 0) = f_1 - \inf(f_1, f_2) \\ f^- &= \sup(-f, 0) = f_2 - \inf(f_1, f_2) \end{aligned}$$

Do đó  $L(f^+) \leq L(f_1) < \infty$  và  $L(f^-) \leq L(f_2) < \infty$ . Suy ra  $f$  là  $\mu$ -khả tích. Hơn nữa  $L(f) = L(f_1) - L(f_2)$ . Thực vậy  $f^+ - f^- = f_1 - f_2$ , suy ra  $f^+ + f_2 = f^- + f_1$ . Suy ra

$$L(f^+ + f_2) = L(f^- + f_1) \quad (\text{cộng tính đúng với các hàm dương}).$$

Do đó:  $L(f^+) - L(f^-) = L(f_1) - L(f_2)$  vì các số hạng là hữu hạn. Bây giờ giả sử  $f$  và  $g$  là  $\mu$ -khả tích. Khi đó:

$$h = f + g = f^+ + g^+ - (f^- + g^-) = h_1 - h_2$$

và ta áp dụng kết quả ở phần trên:

$$L(f + g) = L(h_1) - L(h_2) = L(f^+ + g^+) - L(f^- + g^-)$$

Suy ra  $L(f + g) = L(f) + L(g)$ . Ta suy ra  $L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g)$ .

(ii)  $|f| \leq g$ ,  $f^+ + f^- \leq g$ , suy ra  $f^+ \leq g$  và  $f^- \leq g$ . Khi đó  $\int_E^* f^+ \, d\mu < \infty$  và

$\int_E^* f^- \, d\mu < \infty$ . Suy ra  $f$  khả tích.

(iii) Nếu  $f$  là  $\mu$ -khả tích,  $f^+$  và  $f^-$  cũng thế nên  $|f| = f^+ + f^-$  cũng khả tích ( $\mu$ -khả tích). Ngược lại  $|f|$  khả tích, suy ra  $f$  là  $\mu$ -khả tích theo (ii). Hơn nữa:

$$\left| \int_E f \, d\mu \right| = \left| \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu \right| \leq \int_E f^+ \, d\mu + \int_E f^- \, d\mu$$

Suy ra

$$\left| \int_E f \, d\mu \right| \leq \int_E |f| \, d\mu$$

□

**Ghi chú:**  $f$  đo được, suy ra  $|f|$  đo được, nhưng ngược lại là sai. Từ đó cần thiết phải chính xác hóa  $f$  – đo được trong (ii) và (iii).

**Định lý 5.2.** Nếu  $f$  là  $\mu$ -khả tích thì với mọi  $\varepsilon > 0$ , tồn tại  $\delta(\varepsilon, f)$  sao cho với mọi  $A \in \mathcal{B}$  với  $\mu(A) \leq \delta$  thì:

$$\int_A |f| d\mu \leq \varepsilon$$

*Chứng minh.* Phương pháp cắt cụt: Giả sử  $\{f_n\}$  là một dãy định nghĩa bởi:

$$f_n(x) = \begin{cases} |f(x)| & \text{nếu } |f(x)| \leq n \\ n & \text{nếu } |f(x)| \geq n \end{cases}$$

$\{f_n\}$  là một dãy hàm dương, đo được,  $\{f_n\}$  tăng và ta có:  $\sup f_n = |f|$ . Theo định lý Beppo-Levi:

$$\int_E |f| d\mu = \lim_n \int_E f_n d\mu$$

Giả sử  $n_0$  thỏa mãn  $\int_E (|f| - f_{n_0}) d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Xét tập  $A \in \mathcal{B}$  của  $E$  sao cho  $\mu(A) \leq \frac{\varepsilon}{2n_0}$ .

Khi đó

$$\int_A |f| d\mu = \int_A (|f| - f_{n_0}) d\mu + \int_A f_{n_0} d\mu$$

Suy ra

$$\int_A |f| d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2} + n_0 \mu(A) = \varepsilon$$

□

#### 5.1.4 Hàm nhận giá trị trong $\mathbb{C}$

Giả sử  $f = \mathcal{R}(f) + i\mathcal{J}(f)$ , theo định nghĩa:

$$\int_E f d\mu = \int_E \mathcal{R}(f) d\mu + i \int_E \mathcal{J}(f) d\mu$$

Các tính chất thấy ở trên có thể mở rộng, vì chúng là đúng với các hàm  $\mathcal{R}(f)$  và  $\mathcal{J}(f)$  đều có giá trị thực. Đặc biệt, ta cũng có thể chứng minh được rằng:

$$\left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| d\mu$$

Giả sử  $L(f) \neq 0$ , giả sử  $\alpha \in \mathbb{C}$ :

$$\mathcal{R}(\alpha L(f)) = L(\mathcal{R}(\alpha f)) \leq L(|\alpha| \cdot |f|) = |\alpha| \cdot L(|f|)$$

Đặt  $\alpha = \frac{\overline{L(f)}}{|L(f)|}$ , ta có  $|\alpha| = 1$ . Suy ra  $|L(f)| \leq L(|f|)$ .

**Bài tập:** Chứng minh rằng: dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $f = e^{i\alpha} \varphi$   $\mu$ -hkn,  $\alpha$  thực,  $\varphi$  là hàm nhận giá trị dương. (BT 3)

## 5.2 Định lý hội tụ

**Định lý 5.3. (Beppo-Levi)** Giả sử  $\{f_n\}$  là dãy tăng các hàm  $\mu$ -khả tích, nhận giá trị trong  $\overline{\mathbb{R}}$ . Khi đó:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu$$

nếu  $\lim f_n$  là  $\mu$ -khả tích.

*Chứng minh.* Ta chỉ cần xét dãy  $\{\varphi_n\}$  định nghĩa bởi:  $\varphi_n = \sup f_n - f_n$ ,  $\varphi_n \geq 0$  và  $\{\varphi_n\}$  là dãy giảm. Điều kiện  $\int_E^* \varphi_1 d\mu < \infty$  thỏa mãn vì

$$\int_E^* \varphi_1 d\mu = \int_E (\lim_n f_n) d\mu - \int_E f_1 d\mu < \infty$$

Áp dụng định lý 4.8, ta suy ra điều phải chứng minh.  $\square$

**Định lý 5.4. (Định lý hội tụ bị chặn của Lebesgue)** Giả sử  $\{f_n\}$  là một dãy hàm đo được thỏa mãn với mọi  $n$ ,  $|f_n| \leq g$   $\mu$ -hkn, với  $g$  là  $\mu$ -khả tích. Khi đó:

$$(i) \int_E \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu$$

$$(ii) \int_E \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu$$

$$(iii) \text{ Đặc biệt nếu } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \text{ tồn tại } \mu\text{-hkn thì } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu.$$

*Chứng minh.* Các  $f_n$  là  $\mu$ -khả tích với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ . Ta có thể giả thiết  $|f_n(x)| \leq g(x)$ , với mọi  $x \in E$  và với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ .

(i) Vì  $-g(x) \leq f_n(x) \leq g(x)$ , ta có:  $f_n(x) + g(x) \geq 0$ . Vậy ta có thể áp dụng bổ đề Fatou cho dãy  $\{f_n + g\}$  vì đó là một dãy các hàm dương, khi đó:

$$\int_E g d\mu + \int_E (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n) d\mu \leq \int_E g d\mu + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu$$

Suy ra điều phải chứng minh. Nó được coi như một sự mở rộng của bổ đề Fatou với điều kiện phụ  $|f_n| \leq g$ .

(ii) Ta biết rằng  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n = -\lim_{n \rightarrow \infty} (-u_n)$ . Sử dụng (i) suy ra điều phải chứng minh.

(iii) Suy từ (i) và (ii). Kết quả (iii) mở rộng cho trường hợp một dãy hàm nhận giá trị phức.  $\square$

**Định lý 5.5. (Lebesgue hội tụ giới nội đều)** Giả sử  $\{f_n\}$  là một dãy hàm đo được thỏa mãn:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$   $\mu$ -hkn, với  $|f_n| \leq M < \infty$  với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ . Khi đó nếu  $\mu(E) < \infty$ , ta có:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \int_E f d\mu$$

*Chứng minh.* Đơn giản chỉ là hệ quả của định lý 5.4 vì hàm  $M$  là  $\mu$  – khả tích trên  $E$  nếu độ đo  $\mu(E) < \infty$  (giới nội).  $\square$

**Ví dụ:**  $f_n(x) = e^{-nx^2} \cos nx$  trên  $[0, A]$ ,  $|f_n(x)| \leq 1$  trên  $[0, A]$ . Khi đó:

$$\int_{[0,A]} e^{-nx^2} \cos nx \, d\lambda \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

## 5.3 So sánh tích phân Riemann với tích phân Lebesgue trừu tượng (Trong trường hợp độ đo Lebesgue)

### 5.3.1 Nhắc lại tích phân Riemann

Giả sử  $f$  là một hàm xác định và bị chặn trên  $[a, b]$ , đoạn giới nội. Ta xét các phân hoạch  $P$  của đoạn  $[a, b]$  thành các khoảng  $\{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ . Độ dài mỗi khoảng  $I_p$  ký hiệu là  $|I_p|$ . Các tổng Darboux gắn với  $f$  và  $P$  được định nghĩa bởi:

$$S(f, P) = \sum_{k=1}^n (\sup_{I_k} f(x)) \cdot |I_k| \quad \text{và} \quad s(f, P) = \sum_{k=1}^n (\inf_{I_k} f(x)) \cdot |I_k|$$

và khi đó ta xét:

$$S_*(f) = \inf_{P \in \mathcal{P}} S(f, P) \quad \text{và} \quad s^*(f) = \sup_{P \in \mathcal{P}} s(f, P)$$

trong đó  $\mathcal{P}$  ký hiệu tập hợp tất cả mọi phân hoạch của  $[a, b]$ . Ta biết rằng  $f$  khả tích Riemann khi và chỉ khi  $S_*(f) = s^*(f)$  và giá trị chung ký hiệu là  $\int_a^b f(x) \, dx$ , gọi là tích phân Riemann của hàm  $f$  trên đoạn  $[a, b]$ .

### 5.3.2 Hàm $f^*$ và $f_*$

Trong phần tiếp theo, ta sẽ sử dụng các phân hoạch  $\{P_j\}_{j=1}^\infty$  với  $P_j = \{I_{j,k}\}_{k=1}^{n_j}$  sao cho  $\sup_k |I_{j,k}| \rightarrow 0$  khi  $j \rightarrow \infty$ , cũng như các hàm  $f^j$  và  $f_j$  gắn với mỗi  $P_j$  như sau:

$$f^j = \sum_{k=1}^{n_j} (\sup_{I_{j,k}} f(x)) \cdot \mathbf{1}_{I_{j,k}} \quad \text{và} \quad f_j = \sum_{k=1}^{n_j} (\inf_{I_{j,k}} f(x)) \cdot \mathbf{1}_{I_{j,k}}$$

Định nghĩa của  $f^*$  và  $f_*$ , ta đặt:

$$f^*(x) = \overline{\lim}_{y \rightarrow x} f(y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{y \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]} f(y)$$

$$f_*(x) = \underline{\lim}_{y \rightarrow x} f(y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{y \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]} f(y)$$

**Tính chất:**

(i)  $f_*(x) \leq f(x) \leq f^*(x)$ .

$$(ii) \lim_{j \rightarrow \infty} f^j = f^* \text{ } \lambda - \text{hkn}, \lim_{j \rightarrow \infty} f_j = f_* \text{ } \lambda - \text{hkn}.$$

(iii)  $f^*$  và  $f_*$  là đo được.

$$(iv) \int_{[a,b]} f^* d\lambda = S_*(f), \int_{[a,b]} f_* d\lambda = s^*(f).$$

*Chứng minh.* (i) suy trực tiếp, 3 trường hợp còn lại ta chứng minh cho  $f^*$ , với  $f_*$  chứng minh tương tự.

(ii) Giả sử  $x_0 \in [a, b]$ ,  $x_0$  không thuộc đầu mút của một khoảng  $I_{j,k}$ , với mọi  $k = 1, 2, \dots, n_j$  và với mọi  $j$ . Khi đó tồn tại  $\varepsilon_0$  (phụ thuộc  $j$  và  $k$ ) sao cho:  $[x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0] \subset I_{j,k}$ . Khi đó

$$f^*(x_0) \leq \sup_{y \in [x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0]} f(y) \leq \sup_{x \in I_{j,k}} f(x) = f^j(x_0)$$

qua giới hạn trên  $j$ :  $f^*(x_0) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} f^j(x_0)$ . Ngược lại với mọi  $\varepsilon > 0$ , điều kiện  $\lim_{j \rightarrow \infty} \sup_k |I_{j,k}| = 0$ .

Suy ra tồn tại  $j_0$  (phụ thuộc  $x_0$  và  $\varepsilon$ ) và  $k$  sao cho  $I_{j,k} \subset [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$  với  $j > j_0$ . Suy ra bất đẳng thức:

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} f_j(x_0) \leq f^*(x_0)$$

Suy ra điều phải chứng minh cho  $x_0 \notin \partial I_{j,k}$  với mọi  $k$ , với mọi  $j$ . Do tập hợp các  $x \in \partial I_{j,k}$  với mọi  $k$ , với mọi  $j$  là tập hợp đếm được có độ đo Lebesgue bằng 0, ta có:

(iii) Các hàm  $f^j$  đo được, vì chúng là các hàm bậc thang trên các tập Lebesgue đo được. Từ (ii) suy ra rằng  $f_*$  cũng đo được.

(iv) Ta có thể áp dụng định lý hội tụ giới nội (định lý 5.5) đối với dãy hàm  $f^j$  vì  $f$  giới nội. Khi đó

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} f^j d\lambda = \int_{[a,b]} f^* d\lambda$$

Nhưng

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} f^j d\lambda = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n_j} (\sup_{I_{j,k}} f(x)) \cdot |I_{j,k}| = S_*(f)$$

theo các tính chất của  $S_*(f)$ . □

### 5.3.3 Hệ quả

Từ các tính chất trên mà ta có:  $f$  khả tích Riemann khi và chỉ khi:

$$\int_{[a,b]} f^* d\lambda = \int_{[a,b]} f_* d\lambda$$

nhưng mà  $f_*(x) \leq f(x) \leq f^*(x)$  và điều kiện:

$$\int_{[a,b]} f^* d\lambda - \int_{[a,b]} f_* d\lambda = \int_{[a,b]} (f^* - f_*) d\lambda = 0$$

Suy ra  $f^* = f_* = f$   $\lambda$ -hkn và ngược lại. Do đó  $f$  là  $R$ -khả tích suy ra  $f$  là đo được, là  $L$ -khả tích. Khi đó

$$\int_{[a,b]} f \, d\lambda = \int_a^b f(x) \, dx$$

Hơn nữa  $f^* = f_*$   $\lambda$ -hkn khi và chỉ khi  $f$  liên tục  $\lambda$ -hkn. Suy ra định lý Lebesgue dưới đây:

**Định lý 5.6. (Lebesgue)** Một hàm giới nội trên  $[a, b]$  là khả tích Riemann trên  $[a, b]$  khi và chỉ khi nó liên tục hầu khắp nơi đối với độ đo Lebesgue. Khi đó nó khả tích theo nghĩa Lebesgue và hai tích phân bằng nhau.

Tính chất bằng nhau của hai tích phân suy rộng cho cả tích phân suy rộng của Riemann hội tụ tuyệt đối, nhưng nó không còn đúng đối với tích phân bán hội tụ. Thực vậy trong trường hợp đầu chỉ cần xét các hàm dương và định nghĩa dãy  $\{f_n\}$ :

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } x \in [a, n] \\ 0 & \text{nếu } x > n \end{cases}$$

Theo định lý trên  $\int_a^n f(x) \, dx = \int_{[a, \infty[} f_n \, d\lambda$  nhưng  $\int_a^{+\infty} f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^n f(x) \, dx$  và

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a, \infty[} f_n \, d\lambda = \int_{[a, \infty[} f \, d\lambda \text{ vì } \{f_n\} \text{ là một dãy tăng, suy ra dấu bằng.}$$

**Kết luận:** Những định lý hội tụ đã chứng minh đối với độ đo Lebesgue là áp dụng được trong khuôn khổ tích phân Riemann. Trong thực hành, ta sẽ có lợi nếu sử dụng một cách hệ thống (nếu có thể) các định lý của Lebesgue (hội tụ bị trị, hội tụ bị chặn) cho phép "tiết kiệm" hội tụ đều.

## 5.4 Ứng dụng: Tích phân phụ thuộc (một) tham số

$f$  là hàm từ  $E \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Ta giả thiết rằng hàm  $x \mapsto f_t(x) = f(x, t)$  đo được với mỗi  $t \in [a, b]$  ( $f_t \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}; \mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ ) và ta quan tâm đến tính chất của hàm  $t \mapsto \int_E f(x, t) \, d\mu(x)$  với  $\mu$  là một độ đo dương trên  $\mathcal{B}$ .

**Định lý 5.7. (Tính liên tục)** Giả sử  $\lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t) = l(x)$  với mọi  $x \in E$ ,  $t_0 \in [a, b]$ ,  $|f(x, t)| \leq g(x)$ ,  $g$   $\mu$ -khả tích với mọi  $t \in [a, b]$ . Khi đó

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \int_E f(x, t) \, d\mu(x) = \int_E l(x) \, d\mu(x)$$

*Chứng minh.* Giả sử  $\{t_n\} \subset [a, b]$  và  $t_n \rightarrow t_0$  khi  $n$  tiến ra vô cùng. Ta xét dãy  $\{f_n\}$ :

$$f_n : x \mapsto f_n(x) = f(x, t_n)$$

và ta áp dụng định lý hội tụ bị trị. □

**Hệ quả:** Nếu hàm  $t \mapsto f(x, t)$  liên tục trên đoạn  $[a, b]$  với mọi  $x \in E$  và nếu tồn tại một hàm  $g$   $\mu$ -khả tích trên  $E$  sao cho  $|f(x, t)| \leq g(x)$ . Khi đó hàm số:

$$F : t \mapsto F(t) = \int_E f(x, t) d\mu(x)$$

liên tục trên  $[a, b]$ .

**Ví dụ:**

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_0^a \frac{tf(x)}{t^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} f(0^+) \quad (f \text{ liên tục trên } [0, a], \text{ đặt } x = tX).$$

**Định lý 5.8. (Tính khả vi)** Với các điều kiện sau đây:

- (i) Tồn tại  $t_0 \in [a, b]$  sao cho  $x \mapsto f(x, t_0)$  là  $\mu$ -khả tích trên  $E$ .
- (ii)  $\frac{\partial f}{\partial t}$  tồn tại trên  $E \times [a, b]$ .
- (iii) Tồn tại hàm  $g$   $\mu$ -khả tích trên  $E$  sao cho:  $\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x)$  với mọi  $t \in [a, b]$ .

Khi đó, hàm số  $t \mapsto F(t) = \int_E f(x, t) d\mu(x)$  khả vi trên  $[a, b]$  và ta có:

$$\frac{dF(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_E f(x, t) d\mu(x) = \int_E \frac{df}{dt}(x, t) d\mu(x)$$

Chứng minh.  $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = \lim_{t_n \rightarrow t} \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t}$ ,  $x \in E$ . Nhưng  $\varphi_n(x) = \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t}$  là một hàm đo được (theo  $x$ ). Suy ra  $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$  là đo được với mọi  $t \in [a, b]$ . Áp dụng định lý về số gia hữu hạn

$$f(x, t) - f(x, t_0) = (t - t_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial t}(x, \theta)$$

ta có:

$$|f(x, t)| \leq |f(x, t_0)| + (t - t_0)g(x) \quad (\text{theo gt (iii)}).$$

Suy ra  $x \mapsto f(x, t)$  là  $\mu$ -khả tích (giả thiết (ii)v(iii)) và đúng với mọi  $t \in [a, b]$ . Mà

$$\frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \int_E \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t} d\mu(x)$$

theo (iii), ta có thể áp dụng định lý hội tụ bị trị vì

$$\left| \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t} \right| \leq g(x)$$

Suy ra điều phải chứng minh. □

**Ghi chú:** Ta chú ý điều kiện (i): Không cần phải giả thiết rằng  $x \mapsto f(x, t)$  là  $\mu$ -khả tích với mọi  $t$ . Điều này suy được từ (ii) và (iii).

**Định lý 5.9. (Tính khả tích Riemann)** Dưới các điều kiện sau:

(i)  $t \mapsto f(x, t)$  là liên tục trên  $[a, b]$  với mọi  $x \in E$ .

(ii) Tồn tại  $g \mu$ -khả tích trên  $E$  sao cho:  $|f(x, t)| \leq g(x)$ .

Khi đó, hàm số  $t \mapsto F(t) = \int_E f(x, t) d\mu(x)$  là khả tích Riemann trên  $[a, b]$  và ta có:

$$\int_a^b F(t) dt = \int_a^b \left[ \int_E f(x, t) d\mu(x) \right] dt = \int_E \left[ \int_a^b f(x, t) dt \right] d\mu(x)$$

*Chứng minh.* Các tích phân theo  $t$  là tích phân Riemann. Đặt  $h$  là hàm định nghĩa trên  $E \times [a, b]$  bởi:

$$(x, t) \mapsto h(x, t) = \int_a^t f(x, s) ds$$

Khi đó  $\frac{\partial h}{\partial t} = f(x, t)$  (vì  $f : t \mapsto f(x, t)$  liên tục). Do tích phân Riemann tồn tại, nó là giới hạn của một dãy tổng Riemann. Suy ra ánh xạ  $x \mapsto h(x, t)$  là đo được với mọi  $t \in [a, b]$ . Mặt khác  $|f(x, t)| \leq g(x)$ , suy ra  $|h(x, t)| \leq (b-a)g(x)$  nên  $x \mapsto h(x, t)$  là  $\mu$ -khả tích trên  $E$  với mọi  $t \in [a, b]$ . Đặt  $H : t \mapsto H(t) = \int_E h(x, t) d\mu(x)$ , áp dụng lên

$H$  định lý trước:

$$\frac{dH(t)}{dt} = \int_E \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) d\mu(x) = \int_E f(x, t) d\mu(x) = F(t)$$

Từ đó, ta nhận được:

$$\int_a^b F(t) dt = H(b) - H(a) = \int_E (h(x, b) - h(x, a)) d\mu(x)$$

và

$$\int_a^b F(t) dt = \int_E \left[ \int_a^b f(x, t) dt \right] d\mu(x)$$

□

Vấn đề ở đây liên quan đến một định lý về đổi thứ tự lấy tích phân giữa một tích phân Riemann và một tích phân Lebesgue. Trường hợp hai tích phân Lebesgue sẽ xét ở phần tích phân theo độ đo tích (Định lý Fubini, chương 8).

**Ghi chú:** Các tính chất liên quan đến  $x$  có thể đòi hỏi chỉ với  $\mu$ -hkn.

**Ví dụ: (BT 8)** Xét tính liên tục và khả vi của hàm:  $t \mapsto F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2} dx$ . Suy

ra

$$F' - F = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}$$