

Mục lục

1	Đại số, σ – đại số các tập con của một tập cho trước	5
1.1	Đại số các tập con	5
1.2	Vành Boole có đơn vị hay đại số các tập con (ngắn gọn đại số)	6
1.3	Vành Boole và đại số sinh bởi một họ Ω các tập con	6
1.4	Nửa vành	6
1.5	σ – vành, σ – đại số (σ – vành có đơn vị)	7
1.6	σ – vành và σ – đại số sinh bởi một họ $\mathcal{Q}$	8
1.7	σ – đại số sinh bởi topo trong một không gian topo	9
1.7.1	Các tập Borel và σ – đại số Borel	9
1.7.2	Trường hợp $\mathbb{R}$	9
1.8	σ – vành sinh bởi các tập compact	9
1.9	Lớp đơn điệu	10
1.9.1	Định nghĩa	10
1.9.2	Ví dụ	10
1.9.3	Lớp đơn điệu sinh bởi $\mathcal{Q} \in \mathcal{P}(E)$	10
2	Độ đo dương	11
2.1	Đại cương về độ đo dương	11
2.1.1	Hàm tập cộng tính	11
2.1.2	Độ đo dương	13
2.1.3	Tính chất của độ đo dương	15
2.1.4	Opérations sur les mesures positives	18
2.1.5	Độ đo chính quy (trên một không gian topo)	19
2.2	Độ đo ngoài	20
2.2.1	Độ đo ngoài	21
2.2.2	Độ đo ngoài liên kết với độ đo μ	21
2.2.3	Tập hợp $\mathcal{T}$ – đo được (theo nghĩa Caratheodory)	22
2.2.4	Thác triển (Nói rộng) một độ đo	24
2.3	Độ đo đầy đủ. Bổ sung một độ đo	26
2.3.1	Tập hợp μ – bỏ qua được (μ – không)	26
2.3.2	Độ đo đủ	26
2.3.3	Bổ sung một độ đo	27
2.3.4	Trở lại vấn đề đã đặt ra	28
2.3.5	Ứng dụng cơ bản: Độ đo Lebesgue và Lebesgue Stieltjes	29
2.4	Thác triển cơ bản của một độ đo	31
2.5	Bài tập chương 2	32

3 Không gian đo được. Ánh xạ và hàm số đo được	34
3.1 Không gian đo được. Ánh xạ đo được	34
3.1.1 Không gian đo được	34
3.1.2 Ánh xạ đo được	34
3.1.3 Tính chất	35
3.1.4 Tích các không gian đo được, khả xác xuất	35
3.2 Hàm đo được (giá trị thực)	37
3.2.1 Hàm bậc thang	39
3.2.2 Xấp xỉ một hàm đo được bằng các hàm bậc thang đo được	39
3.2.3 Hàm μ – đo được. Ghi chú	42
3.3 Thuật ngữ của lý thuyết xác xuất	42
3.3.1 Biến cố và biến cố ngẫu nhiên	42
3.3.2 Luật xác xuất (hay phân phối xác xuất)	42
3.4 Bài tập chương 3	42
4 Tích phân (hàm dương)	44
4.1 Tích phân trên của một hàm dương	44
4.1.1 Định nghĩa	44
4.1.2 Tính chất trực tiếp	46
4.2 Các định lý hội tụ	52
4.3 Trở lại khái niệm tích phân trên	54
4.3.1 Tồn tại và duy nhất	54
4.3.2 Chứng minh mới về sự tồn tại của tích phân trên (hay là xây dựng theo quan điểm giải tích hàm)	55
4.4 Bài tập chương 4	57
5 Tích phân Lebesgue trừu tượng. Hàm khả tích	59
5.1 Định nghĩa và tính chất	59
5.1.1 Định nghĩa	59
5.1.2 Ví dụ	59
5.1.3 Hệ quả	60
5.1.4 Hàm nhận giá trị trong $\mathbb{C}$	62
5.2 Định lý hội tụ	63
5.3 So sánh tích phân Riemann với tích phân Lebesgue trừu tượng (Trong trường hợp độ đo Lebesgue)	64
5.3.1 Nhắc lại tích phân Riemann	64
5.3.2 Hàm f^* và f_*	64
5.3.3 Hệ quả	65
5.4 Ứng dụng: Tích phân phụ thuộc (một) tham số	66
5.5 Một ví dụ áp dụng: Phép biến đổi Fourier của hàm một biến	69
5.5.1 Định nghĩa	69
5.5.2 Tính chất trực tiếp của $\hat{f}$	69
5.5.3 Ví dụ	70
5.6 Mở rộng cho trường hợp hàm định nghĩa μ – hkn	70
5.6.1 Định nghĩa	70
5.6.2 Tính chất	70
5.6.3 Tích phân của một hàm đo được định nghĩa μ – hkn	70
5.7 Bài tập chương 5	71

6	Các không gian Lebesgue $\mathcal{L}^p$ và L^p ($1 \leq p \leq \infty$)	73
6.1	Nửa chuẩn tổng quát N_p	73
6.1.1	Định lý	73
6.1.2	Ví dụ	76
6.1.3	Ghi chú	76
6.2	Các không gian $\mathcal{L}^p$ ($1 \leq p \leq \infty$)	76
6.2.1	Mở đầu	77
6.2.2	Tính chất	77
6.2.3	Định lý Riesz-Fischer	78
6.2.4	Các định lý hội tụ	80
6.3	Các không gian L^p ($1 \leq p \leq \infty$)	81
6.3.1	Định nghĩa	81
6.3.2	Các tính chất trực tiếp	81
6.3.3	Quan hệ giữa hội tụ theo trung bình với hội tụ đều và hội tụ μ -hkn	82
6.3.4	Trường hợp L^2	83
6.3.5	Mở rộng	84
6.4	Các không gian $\mathcal{L}^\infty$ và L^∞	84
6.4.1	Nửa chuẩn N_∞	84
6.4.2	Các không gian $\mathcal{L}^\infty$ và L^∞	85
6.4.3	Tính chất của L^∞	85
6.5	Xấp xỉ trong L^p . Định lý trunc mật. Tính khả ly	85
6.6	Không gian đối ngẫu	87
6.7	Quan hệ giữa các L^p	88
6.7.1	Trường hợp μ bị chặn	88
6.7.2	Trường hợp μ không bị chặn	89
6.8	Bài tập chương 6	89
7	Các dạng hội tụ	92
7.1	Hội tụ μ -hầu đều	92
7.1.1	Định nghĩa	92
7.1.2	Định lý Egoroff	92
7.1.3	Áp dụng:	93
7.1.4	Trường hợp μ không bị chặn	93
7.2	Hội tụ theo độ đo	93
7.2.1	Định nghĩa	93
7.2.2	Tính chất	94
7.2.3	Không gian metric của sự hội tụ theo độ đo	94
7.2.4	Hội tụ theo độ đo và μ -hầu đều	95
7.2.5	Hội tụ theo độ đo và μ -hầu đều	96
7.2.6	Hội tụ theo độ đo và hội tụ trong L^p	96
7.3	Bài tập chương 7	96
8	Độ đo tích. Độ đo ảnh. Độ đo cảm sinh	99
8.1	Độ đo tích. Định nghĩa và tính chất	99
8.1.1	Nhập môn	99
8.1.2	Định nghĩa và tính chất của $\mu_1 \otimes \mu_2$	99
8.2	Tích phân đối với độ đo tích	102
8.3	Độ đo ảnh	103
8.3.1	Mở đầu	103
8.3.2	Tích phân đối với độ đo ảnh	104

8.4	Độ đo cảm sinh	105
8.4.1	Định nghĩa và tính chất	105
8.4.2	Tích phân theo độ đo cảm sinh	105

TaiLieu.vn

Chương 1

Đại số, σ – đại số các tập con của một tập cho trước

1.1 Đại số các tập con

Cho E là một tập hợp bất kỳ. Các phần tử của E còn gọi là điểm, ký hiệu bằng các chữ nhỏ như: $x, y, \dots, a, b, c, \dots$ hoặc $w, \dots$. x là phần tử thuộc E : $x \in E$. Các tập con của E ký hiệu bằng các chữ in: $A, B, C, \dots X, Y, \dots$. $A \subset E := A$ là tập con của E . Mỗi phần tử x của E cũng có thể coi là một tập con gồm một phần tử của E . Khi đó, ta ký hiệu $\{x\} \subset E$.

Tập hợp tất cả mọi tập hợp con của E ký hiệu là $\mathcal{P}(E)$. Một tập hợp nào đó các tập con của E còn gọi là một họ các tập con của E , thường ký hiệu bởi các chữ hoa: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{F}, \dots$. Chúng là một tập con nào đó của $\mathcal{P}(E)$; $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$. Trên E luôn định nghĩa các phép toán tập hợp thông thường.

Chương này chúng ta tập trung vào nghiên cứu, phân tích các tính chất của các họ tập con $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots$ của một tập hợp E cho trước. Trước mắt ta cố định E là một tập hợp nào đó cho trước.

Định nghĩa 1.1. *Vành Boole các tập con của một tập E nào đó là một tập hợp con $\mathcal{C}$ của $\mathcal{P}(E)$ thỏa mãn các tính chất (các tiên đề sau):*

$$(i) \quad A, B \in \mathcal{C} \quad \Rightarrow \quad A \cup B \in \mathcal{C},$$

$$(ii) \quad A, B \in \mathcal{C} \quad \Rightarrow \quad A \setminus B \in \mathcal{C}.$$

Ví dụ:

- $\mathcal{P}(E)$ là một Vành Boole (viết tắt là VB). $\{\emptyset, E\}$ cũng là một VB.
- Giả sử E có vô hạn phần tử; $\mathcal{C}$ là họ các tập con có hữu hạn phần tử của E ; $\mathcal{C}$ là một Vành Boole. (Chú ý là $E \notin \mathcal{C}$)

Hệ quả 1.1. • $\emptyset \in \mathcal{C}$ vì $\emptyset = A \setminus A \in \mathcal{C}$.

- $A \in \mathcal{C}, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C}$ vì $A \cap B = A \cup B \setminus ((A \setminus B) \cup (B \setminus A))$.

THUỘC C

- $A \in \mathcal{C}, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{C}.$

Một cách tổng quát hợp của một số hữu hạn phần tử của $\mathcal{C}$ vẫn thuộc $\mathcal{C}$. Ta nói là: hợp hữu hạn, giao hữu hạn các phần tử của $\mathcal{C}$ vẫn thuộc $\mathcal{C}$.

1.2 Vành Boole có đơn vị hay đại số các tập con (ngăn gọn đại số)

Nếu $\mathcal{C}$ là một vành Boole các tập con của E và $E \in \mathcal{C}$ thì $\mathcal{C}$ gọi là vành Boole có đơn vị hay đại số Boole.

Hệ quả 1.2. Nếu $A \in \mathcal{C}$ thì $\overline{A} = \mathcal{C}A \in \mathcal{C}.$

Ví dụ:

- $\mathcal{P}(E)$ là một đại số.
- Tập hợp của các hợp hữu hạn của các khoảng là một vành Boole có đơn vị (đại số).
- Cho $E = [\alpha, \beta[\subset \mathbb{R}$; tập hợp của các hợp hữu hạn các khoảng có dạng $[a, b[\subset [\alpha, \beta[$ là một đại số các tập con của $[\alpha, \beta[$. Ngược lại tính chất trên không còn đúng cho họ các khoảng mở (hoặc đóng).

1.3 Vành Boole và đại số sinh bởi một họ Ω các tập con

Cho $\{\mathcal{C}_j\}_{j \in J}$ là một họ bất kỳ các vành Boole. Khi đó $\bigcap_{j \in J} \mathcal{C}_j$ không rỗng và là một vành Boole. Tính chất tương tự cũng đúng cho đại số.

Định lý 1.1. Cho Ω là một họ các tập con của tập E : $\Omega \subset \mathcal{P}(E)$. Trong số các vành Boole chứa Ω tồn tại một vành Boole nhỏ nhất gọi là vành Boole sinh bởi Ω ký hiệu là $\mathcal{C}(\Omega)$.

Tính chất: Mỗi phần tử của $\mathcal{C}(\Omega)$ được chứa trong một hợp hữu hạn các phần tử của Ω .

Chứng minh. Giả sử $A \subset E$ và $A \subset \bigcup_{p=1}^n O_p$ với $O_p \in \Omega$. Tập hợp tất cả các phần tử A như thế là một vành Boole $\mathcal{C}'$. Vành này chứa các phần tử của $\Omega \Rightarrow \mathcal{C}(\Omega) \subset \mathcal{C}'$. Vậy ta có điều phải chứng minh. $\square$

1.4 Nửa vành

Nửa vành (Boole) các tập con của E là một họ $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ thỏa mãn:

- (i) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}.$

- (ii) $A, B \in \mathcal{A}$ thì tồn tại một họ hữu hạn các phần tử của $\mathcal{A}$, ký hiệu là $\{A_j\}_{j=1}^n$, từng cặp không giao nhau sao cho:

$$A \setminus B = \bigcup_{j=1}^n A_j$$

Một nửa vành gọi là có đơn vị nếu nó chứa E .

Hệ quả 1.3. • Một nửa vành ổn định dưới giao hữu hạn.

- Tập hợp các hợp hữu hạn các phần tử của $\mathcal{A}$ là một vành.

Ví dụ:

- Tập hợp các khoảng (theo nghĩa đại số). I_d : tập hợp các khoảng nửa mở bên phải $[a, b[$ và I_g : tập hợp các khoảng nửa mở bên trái $]a, b]$ là các nửa vành.
- Tập hợp các hình chữ nhật trong $\mathbb{R}^2$, các hình hộp chữ nhật trong $\mathbb{R}^n$: $a_j \leq x_j \leq y_j$, $j = 1, \dots, n$ (có dấu bằng hay không) là nửa vành.
- Trong $E \times E'$, ta xét họ $\{A \times A'\}$ trong đó $A \in \mathcal{A}$, $A' \in \mathcal{A}'$ với $\mathcal{A}$ và $\mathcal{A}'$ là các nửa vành. Họ trên là một nửa vành mà ta ký hiệu là $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'$. Tính chất này suy từ hai hệ thức sau:

$$(A \times A') \cap (B \times B') = (A \cap B) \times (A' \cap B')$$

$$A \times A' \setminus B \times B' = [(A \setminus B) \times A'] \cup [(A \cap B) \times (A' \setminus B')]$$

Chú ý: Tính chất tương tự không còn đúng nếu xuất phát từ hai vành Boole $\mathcal{C}$ và $\mathcal{C}'$ và họ $\{A \times A'\}$ không phải là một vành.

Định lý 1.2. Vành $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ sinh bởi một nửa vành $\mathcal{A}$ là tập hợp các hợp hữu hạn của các phần tử của $\mathcal{A}$. $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ trùng với tập các hợp hữu hạn các phần tử của $\mathcal{A}$ từng đôi không giao nhau.

1.5 σ – vành, σ – đại số (σ – vành có đơn vị)

Định nghĩa 1.2. Một σ – vành là một vành $\mathcal{S}$ thỏa mãn tính chất (ii)' mạnh hơn tính chất (ii):

$$(ii)' \quad A_n \in \mathcal{S}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_1^\infty A_n \in \mathcal{S}.$$

Tức là: hợp đếm được thay cho hợp hữu hạn. Nếu $\mathcal{S}$ là một σ – vành và $E \in \mathcal{S}$ thì $\mathcal{S}$ được gọi là σ – vành có đơn vị hoặc σ – đại số (hoặc một thể Borel, σ – trường).

Ví dụ:

- $\mathcal{P}(E)$, $\{\emptyset, E\}$, mọi vành hữu hạn.
- Giả sử E là một tập hợp không đếm được. Họ các tập con của E đếm được hoặc có phần bù đếm được là một σ – đại số.

Hệ quả 1.4. Mọi σ – vành ổn định (đóng) đối với giao đếm được.

Tính chất: Cho $\mathcal{S}$ là một vành (σ – vành, σ – đại số) trên E . E' là một tập con của E . Vết của $\mathcal{S}$ trên E' là họ tập hợp có dạng: $A \cap E'$, $A \in \mathcal{S}$.

Định lý 1.3. Vết của một vành $\mathcal{S}$ (σ – vành, σ – đại số) trên E' ($E' \subset E$) là một vành $\mathcal{S}'$ (σ – vành, σ – đại số) các tập con của E' .

Ghi chú: Nếu $E' \in \mathcal{S}$ thì $\mathcal{S}'$ là một vành (σ – vành, σ – đại số) gồm các phần tử của $\mathcal{S}$ nằm trong E' .

Định lý 1.4. Nghịch ảnh của một vành (σ – vành, σ – đại số) là một vành (σ – vành, σ – đại số).

Hệ quả 1.5. Định lý này áp dụng cho vết cho ta định lý 1.3, nếu lấy ánh xạ j là phép nhúng canonique từ E' vào E ; ký hiệu $j : E' \rightarrow E$, $x \mapsto j(x) = x$; $j^{-1}(A) = A \cap E'$.

Định lý 1.5. Cho f là một ánh xạ từ E vào F . $\mathcal{S}'$ là một σ – vành các tập con của E . Khi đó, họ các tập con A của F sao cho $f^{-1}(A) \in \mathcal{S}'$ là một σ – vành trên F .

Nói ngắn gọn: nếu nghịch ảnh của một họ nằm trong một σ – vành (hoặc trường hợp riêng là một σ – vành) thì bản thân họ đó là một σ – vành. Chứng minh định lý này suy được từ tính chất của $f^{-1}(A \setminus B)$ và $f^{-1}(\bigcup_1^\infty A_n)$.

Định lý 1.6. Họ các tập con của E (cục bộ - địa ...) trong một σ – vành là một σ – đại số.

$\mathcal{B}'$ là họ các tập con của E cục bộ - địa ... trong một σ – vành $\mathcal{S}$ gồm các tập A có dạng: $A \in \mathcal{B}' \Leftrightarrow A \cap B \in \mathcal{S}, \forall B \in \mathcal{S}$.

Chứng minh. $(\bigcup_1^\infty A_n) \cap B = \bigcup_1^\infty (A_n \cap B)$; $(A \setminus A') \cap B = A \cap B \setminus A' \cap B$. $E \cap B = B \in \mathcal{S} \Rightarrow E \in \mathcal{B}$. Ký hiệu $\mathcal{B} = \text{loc}(\mathcal{S})$. Rõ ràng nếu $\mathcal{S}$ có đơn vị thì $\mathcal{S} \subset \text{loc}(\mathcal{S})$. Do đó $\mathcal{S} = \text{loc}(\mathcal{S})$. $\square$

1.6 σ – vành và σ – đại số sinh bởi một họ $\mathcal{Q}$

Định nghĩa 1.3. Cho $\mathcal{Q}$ là một họ các tập con của E . Khi đó tồn tại một σ – vành (σ – đại số) nhỏ nhất chứa $\mathcal{Q}$ gọi là σ – vành (σ – đại số) sinh bởi $\mathcal{Q}$, ký hiệu là $\sigma(\mathcal{Q})$.

Tính chất: Mỗi phần tử của $\sigma(\mathcal{Q})$ được chứa trong một hợp đếm được các phần tử của $\mathcal{Q}$. Chứng minh tương tự như trong định lý 1.1

Định lý 1.7. Giả sử $\mathcal{Q}$ là một họ các tập con của F . f là một ánh xạ bất kỳ từ một tập E vào F . Khi đó: $f^{-1}(\sigma(\mathcal{Q})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{Q}))$.

1.7 σ – đại số sinh bởi topo trong một không gian topo

1.7.1 Các tập Borel và σ – đại số Borel

Cho $(X, \mathcal{T})$ là một không gian topo, $\mathcal{T}$ là một họ các tập mở. Khi đó, σ – đại số sinh bởi $\mathcal{T}$ được gọi là σ – đại số Borel của X . σ – vành này rõ ràng là có đơn vị vì $X \in \mathcal{T}$. Ta ký hiệu nó là $\mathcal{B}_X(\mathcal{T})$ hoặc là $\mathcal{B}_X$ nếu không sợ nhầm lẫn với topo khác trên X . Mọi phần tử của $\mathcal{B}_X(\mathcal{T})$ gọi là tập Borel của X .

1.7.2 Trường hợp $\mathbb{R}$

Định lý 1.8. Cho I là tập hợp các khoảng của $\mathbb{R}$ (tương ứng: tập hợp các khoảng mở, nửa mở, đóng; có dạng $] - \infty, b]$, $] - \infty, b[$, $]a, +\infty[$, $[a, +\infty[$). Khi đó $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}(\mathcal{T}) = \sigma(I)$ và $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}(\mathcal{T}) = \sigma(I \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\})$.

Chứng minh. Dựa trên chứng minh bao hàm thức kép: $I \subset \sigma(\mathcal{T})$ và $\mathcal{T} \subset \sigma(I)$.

Trường hợp các khoảng mở: $I \subset \mathcal{T} \Rightarrow \sigma(I) \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Ngược lại $\sigma(I)$ chứa các hợp đếm được các khoảng mở mà mọi tập mở của $\mathbb{R}$ là hợp đếm được của các khoảng mở nào đó. Do đó $\mathcal{T} \subset \sigma(I) \Rightarrow \sigma(\mathcal{T}) \subset \sigma(I)$. Suy ra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(I)$.

Trường hợp khác: Chẳng hạn $I = I_p = \{[a, b]\}$ (mở bên phải). Do $]a, b[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a + \frac{1}{n}, b[$. Suy ra $]a, b[\in \sigma(I_p)$. Do đó $\mathcal{T} \in \sigma(I_d)$. Ta cũng có $I_p \subset \sigma(\mathcal{T})$ vì

$$]a, b[= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(]a - \frac{1}{n}, b[\right) \in \sigma(\mathcal{T})$$

Do đó $I_p \subset \sigma(I_d) \subset \sigma(\mathcal{T})$. Kết luận: $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(I_p)$.

Các trường hợp khác chứng minh tương tự.

□

1.8 σ – vành sinh bởi các tập compact

Cho $(X, \mathcal{T})$ là một không gian topo tách. Ký hiệu $\mathcal{K}(X)$ là tập hợp các tập compact của X , còn $\sigma_X(\mathcal{K})$ là σ – vành sinh bởi họ $\mathcal{K}$. Ta có:

$$\sigma_X(\mathcal{K}) \subset \mathcal{B}_X(\mathcal{T})$$

Vì $\mathcal{B}_X$ chứa các tập đóng và mọi tập compact là tập đóng (trong một không gian topo tách) $\Rightarrow \mathcal{K} \subset \mathcal{B}_X(\mathcal{T}) \Rightarrow$ điều phải chứng minh.

Ta nói rằng một tập con A là σ – compact trong X nếu A được chứa trong một hợp đếm được các tập compact.

Định lý 1.9. $A \subset \sigma_X(\mathcal{K})$ khi và chỉ khi $A \in \mathcal{B}_X(\mathcal{T})$ và A σ – compact trong X .

1.9 Lớp đơn điệu

1.9.1 Định nghĩa

Định nghĩa 1.4. Một họ $\mathcal{M}$ các tập con của E gọi là lớp đơn điệu nếu nó ổn định đối với hợp đếm được của dãy tăng hay giao đếm được của dãy giảm. Nói cách khác:

$$A_n \in \mathcal{M}; A_i \subset A_{i+1} \Rightarrow A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$$

$$A_n \in \mathcal{M}; A_{i+1} \subset A_i \Rightarrow A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$$

1.9.2 Ví dụ

$\mathcal{P}(E)$ là một lớp đơn điệu. Mọi σ – vành là lớp đơn điệu.

1.9.3 Lớp đơn điệu sinh bởi $\mathcal{Q} \in \mathcal{P}(E)$

- Giao của một họ các lớp đơn điệu là một lớp đơn điệu.
- $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(E)$ là lớp đơn điệu.

Định nghĩa 1.5. Ta gọi lớp đơn điệu bé nhất chứa $\mathcal{Q}$ là lớp đơn điệu sinh bởi $\mathcal{Q}$, ký hiệu là $\mathcal{M}(\mathcal{Q})$.

Định lý 1.10. (Định lý cơ bản) Nếu $\mathcal{C}$ là một vành trên E thì ta có: $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{M}(\mathcal{C})$.

Hệ quả 1.6. Mọi lớp đơn điệu $\mathcal{M}$ chứa một vành $\mathcal{C}$ đều chứa σ – vành sinh bởi $\mathcal{C}$.

- Trong một không gian metric σ – đại số Borel là một lớp đơn điệu sinh bởi các tập mở (tương ứng đóng).
- f là một ánh xạ từ E vào F và $\mathcal{Q}$ là một tập con của $\mathcal{P}(F)$ thì ta có:

$$\mathcal{M}[f^{-1}(\mathcal{Q})] = f^{-1}[\mathcal{M}(\mathcal{Q})]$$

Bài tập chương 1

Bài 1. Cho $\mathcal{Q}$ là một tập con của $\mathcal{P}(E)$ sao cho: $A, B \in \mathcal{Q} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{Q}$ và $A \cap B \in \mathcal{Q}$. $\mathcal{Q}$ có phải là một vành, hay nửa vành hay không?

Bài 2. Cho $\mathcal{Q}$ là một họ các tập con của E . Ta đặt:

- Họ $\mathcal{C}_1$ bao gồm $\emptyset$, E và các tập $A \in \mathcal{P}(E)$ sao cho $A \in \mathcal{Q}$ hoặc $\mathcal{C}A \in \mathcal{Q}$.
- Họ $\mathcal{C}_2$ gồm các giao hữu hạn của các phần tử của $\mathcal{C}_1$.
- Họ $\mathcal{C}_3$ gồm các hợp hữu hạn của các phần tử của $\mathcal{C}_2$ từng đôi không giao nhau.

Chứng minh rằng $\mathcal{C}_3$ là vành đơn vị sinh bởi $\mathcal{Q}$.

Chương 2

Độ đo dương

2.1 Đại cương về độ đo dương

2.1.1 Hàm tập cộng tính

Định nghĩa 2.1. Một hàm tập cộng tính trên một vành $\mathcal{C}$ là một ánh xạ μ từ $\mathcal{C}$ vào một tập F có trang bị một phép toán cộng (chẳng hạn nhóm, không gian vector, ...). Ánh xạ này thỏa mãn tiên đề:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \quad \text{nếu } A \cap B = \emptyset$$

Trong thực hành: $F = \overline{\mathbb{R}}_+, \mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}, \mathbb{C}$.

Hệ quả 2.1. Khi $F = \overline{\mathbb{R}}_+$. Mọi hàm tập cộng tính trên vành $\mathcal{C}$ nhận giá trị trong $\overline{\mathbb{R}}_+$ có các tính chất sau:

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$ trừ khi $\mu(A) = \infty$ với mọi $A \in \mathcal{C}$. (Ta sẽ giả thiết $\mu(\emptyset) = 0$ để tránh trường hợp riêng $\mu(A) = \infty, \forall A \in \mathcal{C}$)
- (ii) (Tính đơn điệu) Nếu $A \subset B$ thì $\mu(A) \leq \mu(B)$.
- (iii) Nếu $A \subset B$ và $\mu(A) < \infty$ thì $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.
- (iv) Với mọi hợp hữu hạn các phần tử từng đôi không giao nhau thuộc $\mathcal{C}$:

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n \mu(A_j) \quad (\text{cộng tính hữu hạn})$$

Với mọi hợp hữu hạn các phần tử của $\mathcal{C}$:

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) \leq \sum_{j=1}^n \mu(A_j) \quad (\text{cộng tính dưới})$$

Chứng minh. (i) $\mu(A \cup \emptyset) = \mu(A) + \mu(\emptyset) = \mu(A) \Rightarrow \mu(\emptyset) = 0$ nếu tồn tại $A \in \mathcal{C}$ sao cho $\mu(A) < \infty$.

- (ii) $B = A \cup (B \setminus A) \Rightarrow \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$ mà $\mu(B \setminus A) \geq 0$ nên suy ra $\mu(B) \geq \mu(A)$.
Ngoài ra nếu $\mu(A) < \infty$ thì ta có:

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A) \Rightarrow (iii)$$

- (iv) • Cộng tính hữu hạn: hiển nhiên
• Cộng tính dưới: do $\bigcup_{j=1}^n A_j = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup \dots \cup (A_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j)$. Chúng từng đôi không giao nhau nên ta có:

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) &= \mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1) + \dots + \mu\left(A_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\right) \\ &\leq \mu(A_1) + \mu(A_2) + \dots + \mu(A_n) \end{aligned}$$

Suy ra $\mu\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) \leq \sum_{j=1}^n \mu(A_j)$. Nếu một trong các $\mu(A_j)$ vô hạn thì kết quả là tầm thường.

□

Ví dụ:

1. Trên $\mathcal{P}(E)$, $\mu : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ định nghĩa bởi:

$$\mu(A) = \begin{cases} \text{card}(A) & \text{nếu } \text{card}(A) < \infty \\ \infty & \text{trong các trường hợp còn lại} \end{cases}$$

Hàm cộng tính này được gọi là độ đo đếm.

2. Cho $E = [\alpha, \beta[$. Tập hợp $\mathcal{C}$ là tập hợp của các hợp hữu hạn của các khoảng có dạng $[a, b[\subset [\alpha, \beta[$. $\mathcal{C}$ là một đại số. (sinh bởi nửa vành $\{[a, b[\}$). Ta biết rằng mọi phần tử của $\mathcal{C}$ là một hợp hữu hạn các khoảng $[a_k, b_k[$ rời nhau. Giả sử Φ là một hàm không giảm trên $[\alpha, \beta[$ nhận giá trị thực. Ta đặt:

$$\mu_\Phi([a, b[) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Giả sử $A \in \mathcal{C}$:

$$A = \bigcup_{k=1}^n [a_k, b_k[, \quad a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq \dots \leq a_n \leq b_n$$

Ta định nghĩa: $\mu_\Phi(A) = \sum_{k=1}^n [\Phi(b_k) - \Phi(a_k)]$. Ta có thể kiểm tra được rằng nếu A có thể phân tích một cách khác thì $\mu_\Phi(A)$ không phụ thuộc vào sự phân tích của A . Khi đó: μ_Φ là một hàm cộng tính trên $\mathcal{C}$ nhận giá trị trong $\overline{\mathbb{R}}_+$.

2.1.2 Độ đo dương

Định nghĩa 2.2. Một hàm tập định nghĩa trên một vành $\mathcal{C}$, nhận giá trị trong một không gian topo có trang bị phép toán cộng F được gọi là σ – cộng tính (hay cộng tính đếm được) trên $\mathcal{C}$ nếu thỏa mãn tiên đề:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

với mọi dãy $\{A_n\}$ các phần tử của $\mathcal{C}$, từng đôi không giao nhau: $A_i \cap A_j = \emptyset$ nếu $i \neq j$ và $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$. Trong trường hợp μ nhận giá trị trong $\overline{\mathbb{R}}_+$, μ gọi là độ đo dương.

Tùy theo miền giá trị, ta công nhận các thuật ngữ sau đây:

- Độ đo thực: μ nhận giá trị trong $\mathbb{R}$.
- Độ đo phức: μ nhận giá trị trong $\mathbb{C}$.
- Độ đo dương hữu hạn: μ nhận giá trị trong $\mathbb{R}_+$.
- Độ đo có dấu hay độ đo thực tổng quát: μ nhận giá trị trong $\overline{\mathbb{R}}$ và nhận nhiều nhất một giá trị $+\infty$ hoặc $-\infty$.
- Một độ đo thực hoặc phức gọi là giới nội hay bị chặn khi và chỉ khi tồn tại $M > 0$ sao cho $\forall A \in \mathcal{C}: |\mu(A)| \leq M$.
- Một độ đo dương được gọi là σ – hữu hạn khi và chỉ khi $\forall A \in \mathcal{C}$, tồn tại $\{A_n\}$, $A_n \in \mathcal{C}$ sao cho:

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{với} \quad \mu(A_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ghi chú: Chứng minh được rằng mọi độ đo thực hoặc phức trên một σ – vành nhất thiết bị chặn.

Nghiên cứu về độ đo nhận giá trị vector, nói chung: $\mu : A \mapsto \mu(A) \in X$; X là không gian vector topo (tách) không đề cập trong giáo trình này.

Hệ quả 2.2. Các kết quả trong 2.1.1 vẫn đúng cho $F = \mathbb{R}_+$, ở đây ta có thêm tính σ – cộng tính dưới:

$$\mu\left(\bigcup_1^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Chứng minh. Bằng cách viết $\bigcup_1^{\infty} A_n = \bigcup_1^{\infty} B_n$, B_n từng đôi không giao nhau. □

Ví dụ: Độ đo định nghĩa bởi khối lượng:

Cho $\mathcal{C}$ vành của các tập con hữu hạn của một tập E bất kỳ ($\sigma(\mathcal{C})$ là họ các tập đếm được). α là một hàm: $\alpha : E \mapsto \overline{\mathbb{R}}_+$. Ta đặt:

$$\mu(A) = \sum_{x \in A} \alpha(x) \quad \forall A \in \mathcal{C}$$

μ là một độ đo dương trên $\mathcal{C}$. Ta nói rằng độ đo này được định nghĩa bởi các khối lượng $\alpha(x)$ đặt tại các điểm của E . Nếu α làm cho các họ $\{\alpha(x)\}_{x \in E}$ khả tổng, khi đó $\sum_{x \in A} \alpha(x) < \infty, \forall A \in \mathcal{P}(E)$ thì μ là một độ đo bị chặn trên $\mathcal{P}(E)$.

Độ đo Dirac: Trên $\mathcal{P}(E)$, ta xét độ đo Dirac δ_{x_0} định nghĩa bởi:

$$\delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x_0 \in A \\ 0 & \text{nếu } x_0 \notin A \end{cases}$$

Độ đo Borel-Stieltjes: Ta xét lại ví dụ 2 ở mục 2.1.1. Khi $\mathcal{C}$ là đại số sinh bởi họ nửa vành $\{[a, b]\}$ trên $[\alpha, \beta]$ và độ đo xây dựng từ một hàm Φ không giảm trên $[\alpha, \beta]$ nhận giá trị thực:

$$\mu_\Phi([a, b]) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Ta đã chứng minh μ_Φ là một hàm tập cộng tính trên $\mathcal{C}$, nhận giá trị trong $\overline{\mathbb{R}}_+$. Ta hãy tìm điều kiện để μ_Φ trở thành một độ đo dương (tức là σ -cộng tính).

Điều kiện cần: Ta viết:

$$[a, b] = \left[a, b - \frac{\eta}{2} \right] \bigcup_{k=1}^{\infty} \left[b - \frac{\eta}{2^k}, b - \frac{\eta}{2^{k+1}} \right]$$

(với $\eta < 2(b - a)$). Ta sẽ có:

$$\begin{aligned} \mu_\Phi([a, b]) &= \Phi(b) - \Phi(a) \quad \text{do } \mu_\Phi \text{ } \sigma\text{-cộng tính nên có dấu bằng} \\ &= \Phi\left(b - \frac{\eta}{2}\right) - \Phi(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\Phi\left(b - \frac{\eta}{2^{k+1}}\right) - \Phi\left(b - \frac{\eta}{2^k}\right) \right] \end{aligned}$$

Nghĩa là: $\Phi(b) - \Phi(a) = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi\left(b - \frac{\eta}{2^{k+1}}\right) - \Phi(a)$. Như vậy: $\Phi(b^-) = \Phi(b)$ khi và chỉ khi Φ liên tục trái.

Điều kiện trên là đủ: Để chứng minh ta chỉ cần chứng tỏ với $[a, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, I_n = [a_n, b_n]$ từng đôi không giao nhau ta có:

$$\mu([a, b]) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(I_n)$$

với mọi phân đoạn I_n . Với mọi n cố định, ta có thể sắp thứ tự các khoảng $I_1, I_2, \dots, I_n$ sao cho $a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq \dots \leq a_n \leq b_n$ (thay đổi thứ tự nếu cần). Khi đó

$$\sum_{p=1}^n \mu(I_p) = \Phi(b_n) - \Phi(a_n) + \dots + \Phi(b_1) - \Phi(a_1)$$

Suy ra: $\sum_{p=1}^n \mu(I_p) \leq \Phi(b) - \Phi(a) = \mu([a, b])$. Ngược lại, ta chứng tỏ: $\mu([a, b]) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(I_n)$.

Ta thay $[a, b]$ bằng compact $[a, b']$ với $b' < b$ sao cho:

$$\Phi(b') \geq \Phi(b) - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{do } \Phi \text{ liên tục trái và đơn điệu}$$

và thay các khoảng nửa mở $I_n = [a_n, b_n[$ bởi các khoảng mở $I'_n =]a'_n, b'_n[$ với $a'_n < a_n$ và $\Phi(a'_n) > \Phi(a_n) - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Suy ra $[a, b'] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I'_n$. Vì $[a, b']$ là một tập compact nên ta có thể trích một họ hữu hạn các tập mở từ phủ mở $\{I'_n\}$ của $[a, b']$. Với họ phủ mở hữu hạn này, ta có thể bỏ đi các khoảng nằm trong một khoảng khác. Ta có thể sắp thứ tự các đầu mút các khoảng và ta có:

$$b_{n_p-1} > a'_{n_p} \quad \text{trong đó} \quad \Phi(a'_{n_p}) \leq \Phi(b_{n_p-1})$$

Khi đó:

$$\Phi(b') - \Phi(a) \leq \sum_{p=1}^m [\Phi(b_{n_p}) - \Phi(a'_{n_p})]$$

Khi đó:

$$\Phi(b) - \Phi(a) \leq \sum_{p=1}^m [\Phi(b_{n_p}) - \Phi(a_{n_p})] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Suy ra: $\Phi(b) - \Phi(a) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(I_n) + \varepsilon$. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Độ đo cảm sinh và độ đo co

Giả sử $A \in \mathcal{C}$, vết của $\mathcal{C}$ trên A là họ $\mathcal{C}_A$ các phần tử của $\mathcal{C}$ nằm trong A . Độ đo cảm sinh μ_A là hạn chế của μ trên vành $\mathcal{C}_A$.

Độ đo co $\mu_{(A)}$ được định nghĩa như sau: $\forall B \in \mathcal{C}, B \mapsto \mu_{(A)}(B) = \mu(A \cap B)$ với $A \in \mathcal{C}$ cố định. Rõ ràng nếu $B \subset A$ (tức là nếu $B \in \mathcal{C}_A$) ta có:

$$\mu_A(B) = \mu_{(A)}(B)$$

nhưng $\mu_{(A)}$ định nghĩa trên $\mathcal{C}$ chứ không phải trên $\mathcal{C}_A$ như μ_A .

2.1.3 Tính chất của độ đo dương

Định lý 2.1. (liên tục dưới và liên tục trên bởi các dãy đơn điệu)

(i) Với mọi dãy $\{A_n\}$ tăng: $A_n \subset A_{n+1}, A_n \in \mathcal{C}, \bigcup_1^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$ ta có:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \sup_n \mu(A_n) \quad (\text{ký hiệu } \lim A_n = \bigcup_1^{\infty} A_n)$$

(ii) Với mọi dãy $\{A_n\}$ giảm: $A_n \supset A_{n+1}, A_n \in \mathcal{C}, \bigcap_1^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$ ta có:

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \inf_n \mu(A_n) \quad (\text{ký hiệu } \lim A_n = \bigcap_1^{\infty} A_n)$$

nếu tồn tại n_0 sao cho $\mu(A_{n_0}) < \infty$.

(iii) Trường hợp (ii) với $\bigcap_1^{\infty} A_n = \emptyset$. Khi đó:

$$\mu\left(\bigcap_1^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \inf_n \mu(A_n) = 0$$

Chứng minh. Ta biến đổi $\{A_n\}$ thành một dãy các phần tử không giao nhau thuộc $\mathcal{C}$.

- (i) $B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, \dots, B_n = A_n \setminus A_{n-1}$. Khi đó $\bigcup_1^\infty A_n = \bigcup_1^\infty B_p, B_p \in \mathcal{C}$. Vì các B_p rời nhau từng đôi, ta có:

$$\mu\left(\bigcup_1^\infty B_p\right) = \sum_1^\infty \mu(B_p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_1^n \mu(B_p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_1^n B_p\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \Rightarrow \text{dpcm}$$

- (ii) Giả sử $n_0: \mu(A_{n_0}) < \infty$. Ta dẫn về trường hợp (i) bằng cách đặt:

$$B_n = A_{n_0} - A_n \quad \text{với } n \geq n_0 \quad (1)$$

$\Rightarrow \{B_n\}$ là một dãy tăng các phần tử của $\mathcal{C}$ và $\bigcup B_n = \bigcup (A_{n_0} \setminus A_n) = A_{n_0} \setminus \bigcap_{n \geq n_0} A_n$.

Ta suy ra:

$$\mu\left(\bigcup_{n=n_0}^\infty B_n\right) = \mu(A_{n_0}) - \mu\left(\bigcap_{n=n_0}^\infty A_n\right) \quad (2)$$

vì $\mu\left(\bigcap_{n=n_0}^\infty A_n\right) \leq \mu(A_n) \leq \mu(A_{n_0}) < \infty$. Từ (i), ta có:

$$\mu\left(\bigcup_{n=n_0+1}^\infty B_n\right) = \sup_n \mu(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \quad (3)$$

Một mặt theo (1): $\lim \mu(B_n) = \mu(A_{n_0}) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$ hay $\sup \mu(B_n) = \mu(A_{n_0}) - \inf_n \mu(A_n)$. Mặt khác theo đẳng thức (2), ta có hai công thức như trên với $\bigcup_{n \geq n_0} B_n$ và $\bigcap_{n \geq n_0} A_n$ bằng cách thay tương ứng B_n và A_n , tính đến đẳng thức (3) và $\mu(A_{n_0})$ hữu hạn.

- (iii) Trường hợp riêng của (ii): $\mu(\emptyset) = 0$ và $\emptyset \in \mathcal{C}$.

□

Ghi chú: Giả sử $A \in \mathcal{C}$, A được gọi là giới hạn của dãy $\{A_n\}$, $A_n \in \mathcal{C}$ theo nghĩa $\{A_n\}$ là dãy tăng: $A_n \subset A_{n+1}$ thì $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_1^\infty A_n$. Kết quả (i) có thể viết: $\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$ nếu $\{A_n\}$ là dãy tăng và hội tụ đến A khi $n \rightarrow \infty$ nên ta dùng thuật ngữ liên tục "dưới" hay "từ dưới". Kết quả tương tự cho kết quả (ii) và ta nói liên tục trên hay từ trên ($\{A_n\}$ là dãy giảm, $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_1^\infty A_n$).

Định nghĩa 2.3. Cho $\{a_n\}_1^\infty$ là một dãy số. Ta định nghĩa:

$$\begin{aligned} \liminf a_n &= \varliminf a_n = \sup_k \inf_{n \geq k} (a_n) \\ \limsup a_n &= \varlimsup a_n = \inf_k \sup_{n \geq k} (a_n) \end{aligned}$$

Định nghĩa 2.4. Đối với dãy tập hợp $\{A_n\}$ ta có định nghĩa:

$$\begin{aligned} \overline{\lim} A_n &= \bigcap_{k=1}^\infty \bigcup_{n \geq k} A_n \quad (\text{chú ý } \{\bigcup_{n \geq k} A_n\}_k \text{ là dãy giảm theo } k) \\ \underline{\lim} A_n &= \bigcup_{k=1}^\infty \bigcap_{n \geq k} A_n \quad (\text{chú ý } \{\bigcap_{n \geq k} A_n\}_k \text{ là dãy tăng theo } k) \end{aligned}$$

Nếu $\underline{\lim} A_n = \overline{\lim} A_n$, ta nói dãy $\{A_n\}$ hội tụ.

Một quan hệ giữa hai khái niệm đối với dãy số và dãy tập hợp được cho bởi:

$$\mathbf{1}_{\overline{\lim} A_n}(x) = \overline{\lim} \mathbf{1}_{A_n}(x)$$

$$\mathbf{1}_{\underline{\lim} A_n}(x) = \underline{\lim} \mathbf{1}_{A_n}(x)$$

$$\text{ở đây } \mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in A \\ 0 & \text{nếu } x \notin A \end{cases}.$$

Ghi chú: Điều kiện tồn tại n_0 sao cho $\mu(A_{n_0}) < \infty$ là không thể thiếu. Xem ví dụ sau: μ là độ đo đếm. Đặt $A_n = \{m \mid m \in \mathbb{N}, m \geq n\}$, ta có $\mu(A_n) = +\infty$ với mọi n nhưng $\cap A_n = \emptyset$ và $\mu(\cap A_n) = 0$.

Định lý 2.2. (Định lý đảo của định lý 2.1)

(j) Mọi hàm tập cộng tính nhận giá trị trong $\overline{\mathbb{R}}_+$ thỏa mãn (i) là một độ đo dương.

(jj) Mọi hàm tập cộng tính hữu hạn thỏa mãn (ii) hoặc (iii) là một độ đo dương.

Chứng minh. (j) Đặt $\cup_n A_n = \cup_n B_n$ với $B_n = \bigcup_1^n A_p$. $\mu(\bigcup_1^n A_p) = \sum_1^n \mu(A_p)$ vì μ cộng tính hữu hạn và các A_p từng đôi không giao nhau. Vì dãy $\{B_n\}$ tăng và $\bigcup_1^\infty B_n \in \mathcal{C}$, ta có, theo giả thiết (i):

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty B_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^n \mu(A_p)$$

$$\text{tức là: } \mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \sum_1^\infty \mu(A_n).$$

(jj) Giả sử μ hữu hạn và ta sử dụng giả thiết (iii). Giả sử $A = \bigcup_1^\infty A_n$, $A \in \mathcal{C}$, $A_n \in \mathcal{C}$ từng đôi không giao nhau suy ra:

$$\mu\left(\bigcup_1^n A_p\right) = \sum_{p=1}^n \mu(A_p)$$

Hơn nữa:

$$\mu\left(A - \bigcup_1^n A_p\right) = \mu(A) - \mu\left(\bigcup_1^n A_p\right) \quad \text{vì } \mu \text{ hữu hạn.}$$

Khi đó:

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_1^n A_p\right) + \mu\left[\bigcap_{p=1}^n (A - A_p)\right]$$

Đặt $B_n = \bigcap_1^n (A - A_p)$; $\{B_n\}$ là một dãy giảm các phần tử của $\mathcal{C}$. Ta có:

$$\bigcap_1^\infty B_n = \bigcap_1^\infty (A - A_p) = A - \bigcup_1^\infty A_p = \emptyset$$

Từ đó sử dụng (iii), ta có: $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = \mu(\emptyset) = 0$. Như vậy:

$$\mu\left(\bigcup_1^\infty A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_1^n A_p\right) = \sum_1^\infty \mu(A_p)$$

□

Đọc thêm

Định lý 2.3. (Tổng quát định lý 2.1) Nếu μ là một độ đo dương, ta có các kết quả sau:

$$(i) \quad \mu(\underline{\lim} A_n) \leq \underline{\lim} \mu(A_n)$$

(ii) Nếu tồn tại n_0 sao cho $\mu(\bigcup_{n \geq n_0} A_n) < \infty$. Khi đó:

$$\mu(\overline{\lim} A_n) \geq \overline{\lim} \mu(A_n)$$

(iii) Nếu dãy $\{A_n\}$ hội tụ dưới điều kiện (ii) ở trên, ta có:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n)$$

Chứng minh. Ta dùng định nghĩa: $\underline{\lim} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq k} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, $\{B_k\} \uparrow$ từ đó theo định lý 2.1:

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) = \sup_k \mu(B_k)$$

nhưng $\mu(B_k) \leq \mu(A_n)$, $\forall n \geq k$, từ đó:

$$\mu(B_k) \leq \inf_{n \geq k} \mu(A_n) \Rightarrow \mu(\underline{\lim} A_n) \leq \underline{\lim} \mu(A_n)$$

Đối với (ii), ta dùng định nghĩa rồi dùng (ii) của định lý 2.1. Cuối cùng: $\underline{\lim} A_n = \overline{\lim} A_n$. Suy ra

$$\overline{\lim} \mu(A_n) \leq \mu(\overline{\lim} A_n) = \mu(\underline{\lim} A_n) \leq \underline{\lim} \mu(A_n) \Rightarrow \mu(\lim A_n) = \lim \mu(A_n)$$

□

2.1.4 Opérations sur les mesures positives

Propriétés immédiates: Nếu $\{\mu_j\}_{j=1}^n$ là một họ độ đo dương, khi đó:

$$\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu_j, \quad a_j \geq 0$$

cũng là một độ đo dương.

Trường hợp riêng: Tập hợp các độ đo dương là một nón lồi: μ_1, μ_2 là độ đo dương $\Rightarrow \alpha\mu_1 + (1 - \alpha)\mu_2$ là độ đo dương với $\alpha \in [0, 1]$.

Định lý 2.4. Giới hạn của một họ tăng các độ đo dương là một độ đo dương.

Chứng minh. Giả sử $j \in J$ (tập hợp các chỉ số có thứ tự $J \in \overline{\mathbb{R}}_+$) và $\{\mu_j\}$, $j \in J$ là một họ tăng các độ đo theo nghĩa:

$$j \leq k \Rightarrow \mu_j \leq \mu_k \Leftrightarrow \mu_j(A) \leq \mu_k(A), \quad \forall A \in \mathcal{C}.$$

Khi đó: $\mu = \sup_{j \in J} \mu_j$ định nghĩa bởi $\mu(A) = \sup_{j \in J} \mu_j(A)$, $\forall A \in \mathcal{C}$ là một độ đo. Ta kiểm tra được:

- $\mu(\emptyset) = 0$ vì $\mu(\emptyset) = \sup_{j \in J} \mu_j(\emptyset) = 0$.
- $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. Thật vậy $\mu(A \cup B) = \sup_{j \in J} (\mu_j(A) + \mu_j(B))$. Sau đó do họ tăng, ta có:

$$\sup_{j \in J} (\mu_j(A) + \mu_j(B)) = \sup_j \mu_j(A) + \sup_j \mu_j(B) = \mu(A) + \mu(B)$$

nếu mọi sup là hữu hạn. Còn nếu có một sup vô hạn thì kết quả dễ.

- μ liên tục đối với dãy tăng:

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_1^\infty A_n\right) &= \sup_j \mu_j\left[\bigcup_1^\infty A_n\right] = \sup_j \sup_n \mu_j(A_n) \\ &= \sup_n \sup_j \mu_j(A_n) = \sup_n \mu(A_n) \Rightarrow \text{điều phải chứng minh} \end{aligned}$$

□

Định lý 2.5. Tổng của một họ khả tổng các độ đo dương là một độ đo dương.

Chứng minh. Giả sử I là một tập hợp bất kỳ, $J \subset I$, $\text{card } J < \infty$. Khi đó $\mu_J = \sum_{j \in J} \mu_j$ là một độ đo dương và $\{J\}$ là một họ loc trên, họ μ_J là một họ tăng:

$$J \subset J' \quad \Rightarrow \quad \mu_J \leq \mu_{J'}$$

và J_1 và $J_2 \subset J_1 \cup J_2 \Rightarrow \mu_{J_1} \leq \mu_{J_1 \cup J_2}$; rồi sử dụng các tính chất của chương trước. □

Ghi chú: Điều kiện tăng đòi hỏi ở mục 2.1.2 là cần. Nếu không thỏa mãn ta không thể có tính chất đó.

2.1.5 Độ đo chính quy (trên một không gian topo)

Định nghĩa 2.5. Một hàm tập cộng tính μ trên một vành $\mathcal{C}$ của một không gian topo X nhận giá trị trong $\overline{\mathbb{R}}_+$ gọi là chính quy nếu thỏa mãn các tính chất: $\forall \varepsilon > 0, \forall A \in \mathcal{C}, \exists K \in \mathcal{C}, \exists F \in \mathcal{C}$ với K compact tương đối sao cho:

$$\overline{K} \subset A \subset \overset{\circ}{F}, \quad \mu(A \setminus K) < \varepsilon, \quad \mu(F \setminus A) < \varepsilon$$

Ví dụ: Các độ đo μ_Φ là chính quy.

Định lý 2.6. Nếu μ là một hàm tập cộng tính nhận giá trị trong $\overline{\mathbb{R}}_+$, định nghĩa trên một vành $\mathcal{C}$ và chính quy thì μ là một độ đo dương (tức là σ -cộng tính).

Chứng minh. Giống như chứng minh khi nghiên cứu μ_Φ . Ta cần chứng minh μ là σ -cộng tính.

Một mặt:

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_1^p A_n\right) &\leq \mu\left(\bigcup_1^\infty A_n\right) \\ \sum_1^p \mu(A_n) &\leq \mu\left(\bigcup_1^\infty A_n\right) \end{aligned}$$

Suy ra: $\sum_1^\infty \mu(A_n) \leq \mu(\bigcup_1^\infty A_n)$.

Mặt khác: Với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại K với $\overline{K}$ compact sao cho: $K \in \mathcal{C}$, $\overline{K} \subset \bigcup_1^\infty A_n$, $\mu(\bigcup_1^n A_n - K) < \frac{\varepsilon}{2}$. Hơn nữa có thể chọn một dãy $\{F_n\}$ sao cho: $F_n \in \mathcal{C}$, $A_n \subset \overset{\circ}{F}_n$ với

$$\mu(\overset{\circ}{F}_n - A_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

Họ $\{\overset{\circ}{F}_n\}$ lập thành một phủ mở của $\overline{K}$ compact. Ta có thể trích từ đó một phủ mở hữu hạn của $\overline{K}$:

$$\bigcup_1^m F_n \supset \bigcup_1^m \overset{\circ}{F}_n \supset \overline{K} \supset K$$

Khi đó:

$$\mu(\bigcup_1^\infty A_n) = \mu(K) + \mu(\bigcup_1^\infty A_n - K) \leq \mu(K) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Suy ra:

$$\mu(\bigcup_1^\infty A_n) \leq \sum_1^m \mu(F_n) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_1^m \mu(A_n) + \sum_{n=1}^m \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \mu(\bigcup_1^\infty A_n) \leq \sum_1^m \mu(A_n) + \varepsilon$$

Từ đó suy ra: $\mu(\bigcup_1^\infty A_n) \leq \sum_1^\infty \mu(A_n)$. □

Ghi chú: Một định nghĩa đặc thù có thể hình thành từ khái niệm tập **chính quy trong** và **chính quy ngoài** đối với vành Borel $\mathcal{B}_X(\mathcal{T})$.

$\mathcal{S}$ là một vành chứa $\mathcal{B}_X(\mathcal{T})$. Ta nói rằng $A \in \mathcal{S}$ chính quy ngoài khi và chỉ khi:

$$\mu(A) = \inf_{A \subset O; O \in \mathcal{C}} \mu(O) \quad (\mathcal{T} \text{ là họ các tập mở}).$$

$A \in \mathcal{S}$ chính quy trong khi và chỉ khi:

$$\mu(A) = \sup_{K \subset A; K \in \mathcal{K}} \mu(K); \quad \mu(K) < \infty \quad (\mathcal{K} \text{ là họ các tập compact})$$

μ được gọi là chính quy trên $\mathcal{S}$ nếu mọi phần tử của $\mathcal{S}$ vừa chính quy trong vừa chính quy ngoài.

Kiểm tra được rằng nếu $\mu(A)$ hữu hạn, tồn tại O và K sao cho $K \subset A \subset O$ và:

$$\mu(A - K) < \varepsilon, \quad \mu(O - A) < \varepsilon$$

(Trong chương 10 dùng các tính chất này để nghiên cứu quan hệ giữa độ đo Radon và độ đo dương).

2.2 Độ đo ngoài

Đặt vấn đề: Cho trước một độ đo dương μ trên một vành $\mathcal{C}$, ta có thể nói rộng độ đo này lên σ – vành sinh bởi $\mathcal{C}$ hay không?

Câu trả lời: Có, thậm chí có thể thác triển mọi độ đo dương lên một σ – vành chứa $\sigma(\mathcal{C})$ (phương pháp chứng minh dùng độ đo ngoài của Caratheodory).