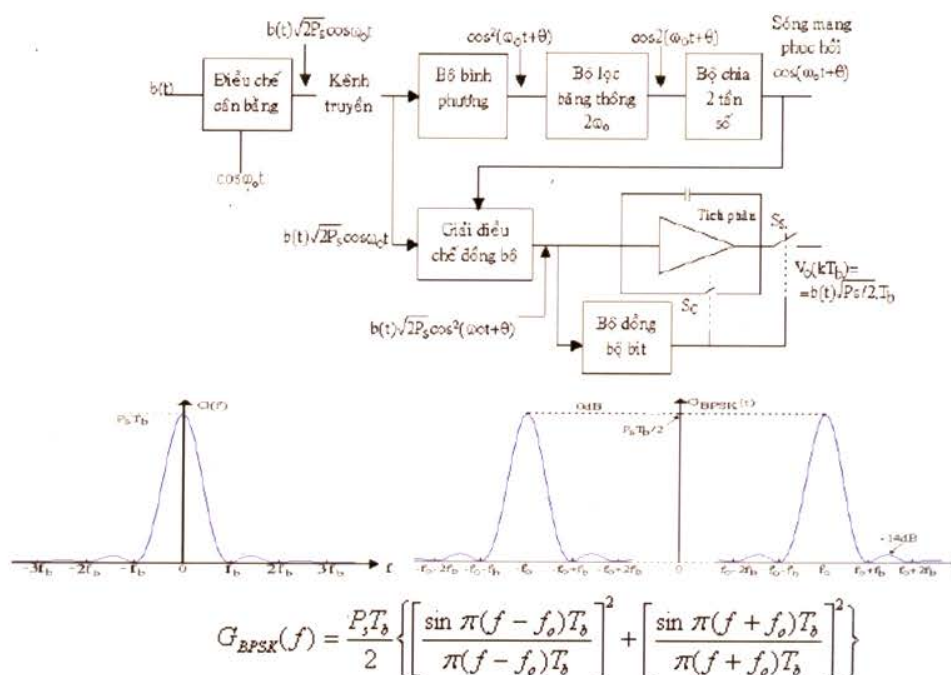


CƠ SỞ VIỄN THÔNG



Biên soạn: ThS. LÝ TÚ NGÀ

ThS. BÙI THƯ CAO

ThS. PHẠM NGỌC DŨNG

(Sử dụng cho hệ Đại học - Cao đẳng)

Lưu hành nội bộ

NĂM 2009

TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHIỆP TP. HỒ CHÍ MINH
KHOA CÔNG NGHỆ ĐIỆN TỬ

CƠ SỞ VIỄN THÔNG

(Sử dụng cho hệ Đại học – Cao đẳng)

Biên soạn: ThS. LÝ TÚ NGÀ

ThS. BÙI THU CAO

ThS. PHẠM NGỌC DŨNG

LƯU HÀNH NỘI BỘ

2009

Chương 1

TÍN HIỆU VÀ NHIỄU

1.1 Tín hiệu và thông tin:

Từ tín hiệu có nguồn gốc từ tiếng Latin: signum dùng để chỉ một vật thể, một dấu hiệu, một phần tử của ngôn ngữ hay một biểu tượng đã được thừa nhận để thể hiện một tin tức.

Khái niệm tín hiệu: là sự biểu hiện vật lý của tin tức mà nó mang từ nguồn tin đến nơi nhận tin.

Phương cách biểu diễn tín hiệu: tín hiệu điện: dòng điện hay điện áp.

Cách biểu diễn hay truyền đạt tín hiệu: mô hình toán học.

Khái niệm thông tin: là nội dung mà tín hiệu thể hiện. Như vậy, thông tin này ngẫu nhiên (không được biết trước và nó mang tin tức).

Tóm lại: tín hiệu mang tin tức là tín hiệu ngẫu nhiên, mô hình toán học. Tín hiệu là các quá trình ngẫu nhiên thực hay phức. Trong một tín hiệu chứa nhiều thông tin, nhưng trong một thông tin không thể chứa được nhiều tín hiệu.

Khái niệm nhiễu: nhiễu là một dạng tín hiệu mà nơi nhận tin không cần quan tâm.

Ví dụ: thông tin từ máy điện thoại, tín hiệu audio thu được từ micro.

Quy ước: tín hiệu ký hiệu là S (Signal).

Nhiễu ký hiệu là N (Noise).

1.2 Phân loại tín hiệu:

1.2.1 Tín hiệu vật lý và mô hình lý thuyết:

-Tín hiệu vật lý: là một tín hiệu vật lý thực hiện được phải thỏa mãn các yêu cầu:

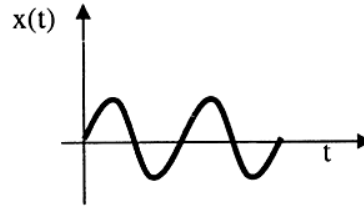
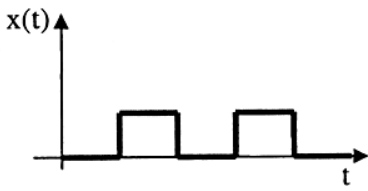
+Năng lượng hữu hạn

+Biên độ hữu hạn

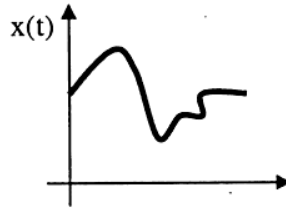
+Phổ hữu hạn.

1.2.2 Tín hiệu xác định và tín hiệu ngẫu nhiên: mô hình toán học

Tín hiệu xác định (mô hình toán học biết trước): là tín hiệu mà quá trình biến thiên của nó được biểu diễn bằng một hàm thời gian hoàn toàn xác định, hay có mô hình toán học được biết trước. Ví dụ: tín hiệu hình sin, xung vuông.



Tín hiệu ngẫu nhiên: là tín hiệu mà quá trình biến thiên của nó không được xác định, hay mô hình toán học không được biết trước.



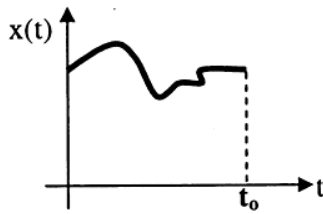
Ví dụ: tín hiệu ngẫu nhiên

Lưu ý: tín hiệu hình sin với pha ban đầu không biết trước là tín hiệu ngẫu nhiên.

1.2.3 Tín hiệu năng lượng- tín hiệu công suất: năng lượng của tín hiệu

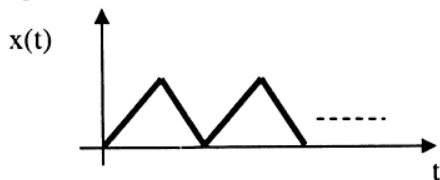
Chia tín hiệu làm 2 loại: năng lượng hữu hạn và công suất trung bình hữu hạn.

❖ Tín hiệu năng lượng hữu hạn: là tín hiệu mà có quá trình biến thiên theo thời gian giới hạn:



Định nghĩa bằng công thức: $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = 0 \Rightarrow x(t)$ là tín hiệu năng lượng

❖ Tín hiệu công suất: là tín hiệu mà có quá trình biến thiên theo thời gian không giới hạn.



Định nghĩa bằng công thức: $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = \text{không xác định}$

Ví dụ: cho các tín hiệu sau:

$$x_1(t) = e^t, x_2(t) = \frac{1}{t}, x_3(t) = e^{-t}, \text{ và } x_4(t) = \sin(2\pi ft)$$

Hãy cho biết tín hiệu nào là tín hiệu năng lượng và tín hiệu nào là tín hiệu công suất?

1.2.4 Tín hiệu liên tục và tín hiệu rời rạc:

✦ Tín hiệu liên tục: là tín hiệu có biên độ biến thiên liên tục theo thời gian.

✦ Tín hiệu rời rạc là tín hiệu có biên độ biến thiên không liên tục theo thời gian. Ví dụ: xung vuông.

1.3 Tín hiệu xác định:

1.3.1 Các thông số đặc trưng của tín hiệu xác định:

1.3.1.1 Tích phân tín hiệu:

Định nghĩa: cho tín hiệu $x(t)$ là tín hiệu xác định, tồn tại trong khoảng thời gian $-\infty < t < +\infty$, tích phân tín hiệu được định nghĩa:

$$[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt \quad (1.1)$$

Lưu ý: chỉ có ý nghĩa với những tín hiệu mà giá trị tích phân của nó là hữu hạn.

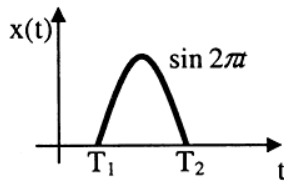
Ví dụ 1: cho tín hiệu $x(t) = \frac{1}{2t}$ với $-\infty < t < +\infty$. Tính giá trị tích phân $x(t)$

Giải:

Áp dụng công thức (1.1), ta được:

$$[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2t} dt = \frac{1}{2} \ln|t| \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \text{không xác định}$$

Ví dụ 2: cho tín hiệu $x(t)$ như hình vẽ



Tính tích phân $x(t)$ biết T_1, T_2 là các thông số biết trước.

Giải:

Áp dụng công thức (1.1), ta được:

$$[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin 2\pi t dt = -\frac{1}{2\pi} \cos 2\pi t \Big|_{T_1}^{T_2}$$

$$[x] = -\frac{1}{2\pi} [\cos 2\pi T_2 - \cos 2\pi T_1] = \text{const}$$

1.3.2 Tích chập của 2 tín hiệu:

Tích chập (CONVOLUTION)

Tích chập 2 hàm $r(t)$ và $s(t)$ được định nghĩa bởi thuật toán tích phân:

$$r(t) * s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau) s(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) r(t-\tau) d\tau$$

Ký hiệu $*$ thì được qui ước và đọc “ $r(t)$ chồng với $s(t)$ “.

Tích phân thứ hai là kết quả từ sự đổi biến số và chứng tỏ rằng phép chồng có tính giao hoán vậy:

$$r(t) * s(t) = s(t) * r(t).$$

Nhớ là phép chồng 2 hàm của t là một hàm của t . τ là một biến số giả do tích phân mà ra.

1.3.3 Trị trung bình của tín hiệu:

Công thức:

$$\langle x \rangle = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t) dt}{t_2 - t_1} \quad \text{với} \quad x(t) \in (t_1, t_2) \quad (1.2)$$

Với t_1, t_2 là khoảng thời gian chu kỳ tín hiệu

Ví dụ 3: cho tín hiệu $x(t) = \sin \frac{2\pi}{T} t$ với $t \in (0, T)$. Tính giá trị trị trung bình tín hiệu này.

Giải:

Áp dụng công thức (1.2) với $t_1=0, t_2=T$, ta được:

$$\langle x \rangle = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t) dt}{t_2 - t_1} = \frac{\int_0^T \sin \frac{2\pi}{T} t dt}{T}$$

$$\langle x \rangle = -\frac{T}{2\pi} \cos \frac{2\pi}{T} t \Big|_0^T = 0$$

Nếu tín hiệu tuần hoàn với chu kỳ T, ta có công thức (1.3):

$$\langle x \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt \quad (1.3)$$

Với t_0 là thời điểm bất kỳ trên thang thời gian

1.3.4 Năng lượng tín hiệu:

Năng lượng chứa trong tín hiệu $x(t)$ được ký hiệu là E_x

Công thức:

$$E_x = [x]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt \quad (1.4)$$

Ví dụ 4: cho tín hiệu $x(t) = \frac{1}{2t}$ với $t \in (1, 2)$. Tính giá trị năng lượng tín hiệu này.

Giải:

Áp dụng công thức (1.4), ta được:

$$E_x = [x]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \int_1^2 \left(\frac{1}{2t} \right)^2 dt$$

$$E_x = [x]^2 = \left. \frac{1}{4} t^{-1} \right|_1^2 = \frac{1}{8}$$

Bài tập về nhà:

Tính năng lượng của các tín hiệu sau:

a) $x(t) = \sin \frac{2\pi}{T} t$ với $t \in (0, T)$

b) $x(t) = \cos \frac{2\pi}{T} t$ với $t \in (0, T)$

1.3.5 Công suất trung bình:

Công thức:

$$P_x = \langle x \rangle^2 = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt}{t_2 - t_1} \quad (1.5)$$

Với t_1, t_2 là khoảng thời gian chu kỳ tín hiệu

Lưu ý: tín hiệu tuần hoàn chu kỳ T thì ta áp dụng công thức (1.6)

$$P_x = \langle x \rangle^2 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t) dt \quad (1.6)$$

Với t_0 là thời điểm bất kỳ.

Ví dụ 5: cho tín hiệu $x(t) = 2 \sin 200\pi t$. Tính giá trị công suất trung bình của tín hiệu này.

Giải:

Nhận xét chu kỳ của tín hiệu: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 200\pi \Rightarrow T = \frac{1}{100} (s)$

Áp dụng công thức (1.6), ta được:

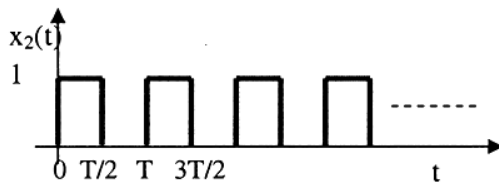
$$P_x = \langle x \rangle^2 = \frac{1}{T} \int_0^T (2 \sin 200\pi t)^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{1 - \cos 400\pi t}{2} \right) dt$$

$$P_x = \langle x \rangle^2 = \frac{1}{4T} t \Big|_0^T + \frac{1}{4T} \sin 400\pi t \Big|_0^T = \frac{1}{4}$$

Bài tập về nhà: tính công suất trung bình các tín hiệu sau:

a) $x_1(t) = 1 + 2 \cos 40\pi t$

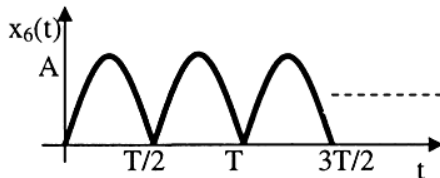
b) cho tín hiệu $x_2(t)$ như hình vẽ:



c) $x_3(t) = A \cos \frac{2\pi}{T} t$

d) $x_4(t) = B \sin \frac{2\pi}{T} t$

e) cho tín hiệu $x_6(t)$ như hình vẽ:



1.4 Phân tích phổ tín hiệu:

Có 4 cách phân tích tín hiệu:

- +phân tích miền thời gian
- +phân tích tương quan
- +phân tích thống kê
- + Phân tích phổ (phân tích miền tần số)

Trong đó, hai phương pháp phân tích miền thời gian và phân tích phổ là quan trọng. Phân tích miền thời gian là quá trình phân tích đã được xét ở các mục trên.

Phân tích phổ tín hiệu là quá trình phân tích tín hiệu dưới dạng miền tần số.

Đặc điểm phân tích phổ: phân tích nhiều loại tín hiệu, là một cơ sở phân tích được nghiên cứu đầy đủ và biểu diễn qua các cách phân tích khác. Phân tích phổ là một công cụ phân tích tín hiệu thông tin dùng trong điện thoại, phát thanh, phát hình, ...

Nhiệm vụ: nghiên cứu các tính chất tín hiệu qua phân tích cấu trúc tần số như: hình dáng, vị trí, bề rộng phổ, ... trên thang đo tần số.

Lưu ý: phân tích tần số cho ta tin tức về tín hiệu nhanh hơn phân tích thời gian, đặc biệt đối với các tín hiệu gồm nhiều thành phần tần số.

Công cụ phân tích là chuỗi lượng giác và chuỗi phức Fourier.

1.4.1 Biến đổi tương đương Fourier của tín hiệu:

Công thức:

$$x(t) = \alpha_0 \frac{1}{\sqrt{T}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{n2\pi}{T} t + \beta_n \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{n2\pi}{T} t \right) \quad (1.7)$$

Trong đó: $x(t)$ là tín hiệu xác định trong khoảng thời gian $(0, T)$

$$\text{và } \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T x(t) dt$$

$$\alpha_n = \sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^T x(t) \cos \frac{2\pi}{T} t dt$$

$$\beta_n = \sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^T x(t) \sin \frac{2\pi}{T} t dt$$

Công thức (1.7) được rút gọn lại như sau:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (1.8)$$

Trong đó: $a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$ là hằng số DC

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos n\omega_0 t dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin n\omega_0 t dt \end{aligned} \right\} \text{ là các hệ số AC}$$

Với $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

Nhận xét: bất kỳ một tín hiệu xác định nào trong khoảng thời gian thì đều được biến đổi tương đương thành tổng các thành phần Dc và AC có hài tần số từ thấp đến cao.

1.4.2 Phổ của tín hiệu:

Trong một hệ thống thông tin tồn tại 3 dạng tín hiệu với phổ tần khác nhau:

- **Loại thứ nhất** là các tín hiệu có tính tuần hoàn có dạng hình sin hoặc không. Một tín hiệu không sin là tổng hợp của nhiều tín hiệu hình sin có tần số khác nhau. Kết quả này có được bằng cách dùng chuỗi Fourier để phân tích tín hiệu.

- **Loại thứ hai** là các tín hiệu không có tính tuần hoàn mà có tính nhất thời (thí dụ như các xung lực), loại tín hiệu này được khảo sát nhờ biến đổi Fourier.

- **Loại thứ ba** là tín hiệu có tính ngẫu nhiên, không được diễn tả bởi một hàm toán học nào. Thí dụ như các loại nhiễu, được khảo sát nhờ phương tiện xác suất thống kê.

Các loại tín hiệu, nói chung, có thể được xét đến dưới một trong hai lãnh vực :

- **Lãnh vực thời gian:** Trong lãnh vực này tín hiệu được diễn tả bởi một hàm theo thời gian, hàm này cho phép xác định biên độ của tín hiệu tại mỗi thời điểm.

- **Lãnh vực tần số :** Trong lãnh vực này người ta quan tâm tới sự phân bố năng lượng của tín hiệu theo các thành phần tần số của chúng và được diễn tả bởi phổ tần. Trong giới hạn của môn học, chúng ta chỉ đề cập đến hai loại tín hiệu đầu.

Cho tín hiệu $x(t)$ với mọi t , ta được:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = |X(\omega)| \underline{\varphi(\omega)} \quad (1.9)$$

$|X(\omega)|$ là hàm giá trị phổ biên độ của tín hiệu.

$\varphi(\omega)$ là hàm giá trị phổ pha của tín hiệu.

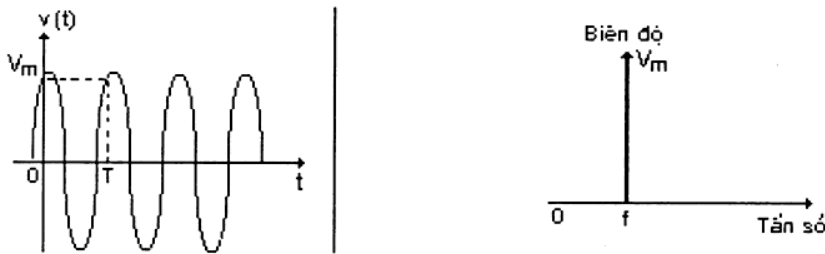
Nhận xét: phổ tín hiệu thể hiện sự biến thiên về tần số và công suất tín hiệu.

Phổ tần gián đoạn

Tín hiệu có tính tuần hoàn đơn giản nhất là tín hiệu hình sin

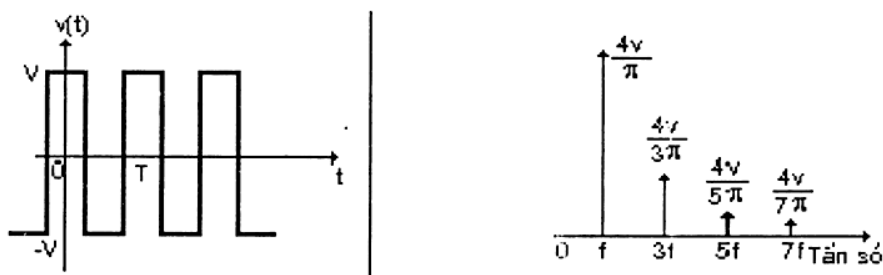
$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \varphi) = V_m \sin(2\pi f t + \varphi)$$

Tín hiệu này có phổ tần là một vạch duy nhất có biên độ V_m tại tần số f



Các dạng tín hiệu tuần hoàn khác có thể phân tích thành tổng các tín hiệu hình sin, như vậy phổ tần của chúng phức tạp hơn, gồm nhiều vạch ở các tần số khác nhau.

Tín hiệu thường gặp có dạng hình chữ nhật mà bởi phép phân tích thành chuỗi Fourier ta thấy phổ tần bao gồm nhiều vạch ở các tần số cơ bản f và các họa tần $3f, 5f, 7f, \dots$



Tín hiệu phân tích thành chuỗi Fourier:

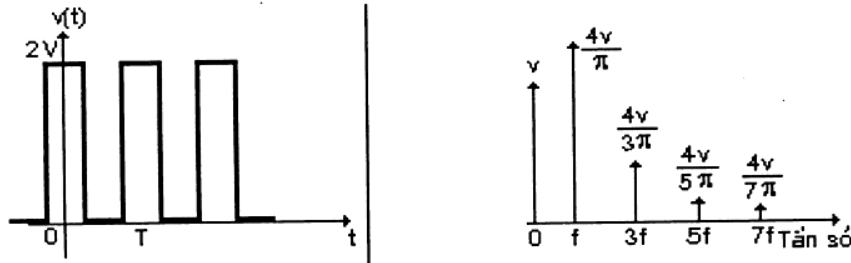
$$v = \frac{4V}{\pi} \left(\cos \omega t - \frac{1}{3} \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \cos 5\omega t - \frac{1}{7} \cos 7\omega t + \dots \right)$$

Với $\omega = 2\pi / T = 2\pi f$

Chương 1: Tín hiệu và nhiễu

T & f lần lượt là chu kỳ và tần số của tín hiệu chữ nhật.

Lưu ý, nếu dời tín hiệu lên một khoảng V theo trục tung thì phổ tần có thêm thành phần một chiều

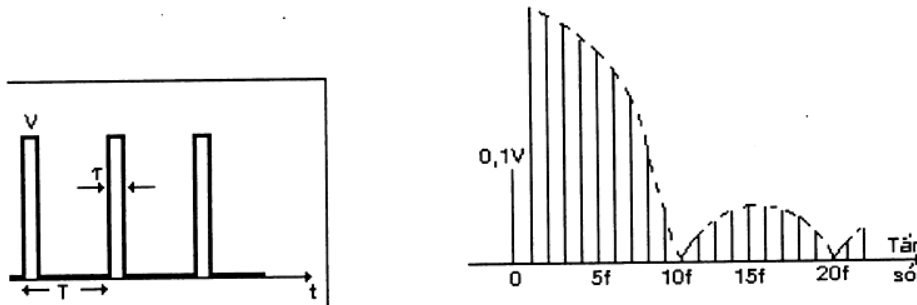


$$v = V + \frac{4V}{\pi} \left(\cos \omega t - \frac{1}{3} \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \cos 5\omega t - \frac{1}{7} \cos 7\omega t + \dots \right)$$

Xét trường hợp chuỗi xung chữ nhật với độ rộng $\tau \ll T$, ta có tín hiệu và phổ

$$v = \frac{V\tau}{T} + \frac{2V\tau}{T} \left(\frac{\sin x}{x} \cos \omega t + \frac{\sin 2x}{2x} \cos 2\omega t + \frac{\sin 3x}{3x} \cos 3\omega t + \dots \right)$$

với $x = \pi\tau / T$



$$V_n = \frac{2V\tau}{T} \left| \frac{\sin nx}{nx} \right|$$

Nhận thấy biên độ của họa tần thứ n xác định bởi

là phổ tần của tín hiệu trên cho trường hợp $\tau = 0,1 T$. Trong trường hợp này tần số đầu tiên của tín hiệu có biên độ đạt giá trị 0 là $10f$.

Nếu xem băng thông BW của tín hiệu là khoảng tần số mà biên độ tín hiệu đạt giá trị 0 đầu tiên (vì năng lượng tín hiệu tập trung trong khoảng tần số này) ta có:

BW xác định bởi:

$$\sin(n\pi\tau) = 0$$

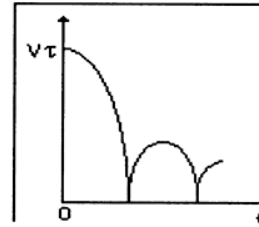
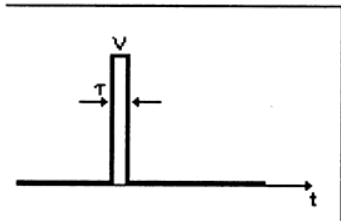
$$n\pi\tau = \pi \Rightarrow n\pi\tau / T = \pi \Rightarrow n / T = 1/\tau$$

$$\text{hay BW} = nf = n/T = 1/\tau$$

Phổ tần liên tục

Đối với chuỗi xung ở trên khi T càng lớn khoảng cách phổ vạch càng thu hẹp lại và khi $T \rightarrow \infty$, chuỗi xung trở thành một xung duy nhất và phổ vạch trở thành một đường cong liên tục có dạng bao hình của biên độ phổ trước đây. Đường cong xác định bởi:

$$V(f) = V_\tau \left| \frac{\sin \pi f \tau}{\pi f \tau} \right|$$

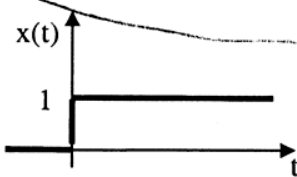


Lưu ý:

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$$

$$e^{-j\alpha} = \cos \alpha - j \sin \alpha$$

$$1(t) \text{ là hàm đơn vị } \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



Ví dụ 6: cho tín hiệu $x(t) = e^{-\alpha} 1(t)$. Tính giá trị phổ biên độ và phổ pha của tín hiệu.

Giải:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha} \cdot 1(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{-\alpha} \cdot 0 e^{-j\omega t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-\alpha} \cdot 1 e^{-j\omega t} dt$$

Chương 1: Tín hiệu và nhiễu

$$X(\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \cdot 1 \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} dt = \frac{-1}{\alpha + j\omega} e^{-(\alpha + j\omega)t} \Big|_0^{+\infty}$$

$$X(\omega) = \frac{-1}{\alpha + j\omega} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} = \frac{1}{\alpha + j\omega}$$

Giá trị phổ biên độ: $|X(\omega)| = \sqrt{\frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + \omega^2)^2} + \frac{\omega^2}{(\alpha^2 + \omega^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$ ✗

Giá trị phổ pha:

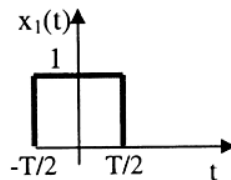
$$\text{tg } \varphi(\omega) = \frac{-\omega}{\alpha} \quad \text{✗}$$

$$\angle \varphi(\omega) = \text{arctg} \left(\frac{-\omega}{\alpha} \right) \quad \text{✗}$$

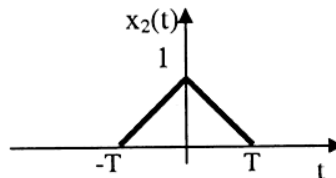
Bài tập về nhà: tính giá trị và vẽ phổ pha, phổ biên độ của các tín hiệu sau:

a) $x(t) = e^{-\alpha|t|} = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t > 0 \\ e^{\alpha t} & t < 0 \end{cases}$

b) tín hiệu $x_1(t)$ có hình vẽ bên dưới:



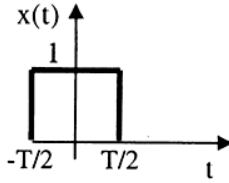
c) tín hiệu $x_2(t)$ có dạng như hình bên dưới:



1.4.3 Một số công thức tín hiệu xác định và các ký hiệu:

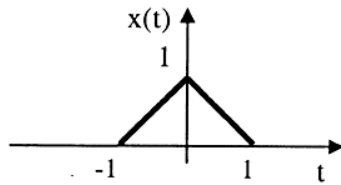
1.4.3.1 Tín hiệu năng lượng có thời hạn hữu hạn:

1) Xung vuông góc $\Pi(t)$:



$$x(t) = \Pi(t) = \begin{cases} 0 & |t| > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & |t| = \frac{1}{2} \\ 1 & |t| < \frac{1}{2} \end{cases}$$

2) Xung tam giác $\Lambda(t)$:



$$x(t) = \Lambda(t) = \begin{cases} 0 & |t| > 1 \\ 1 - |t| & |t| \leq 1 \end{cases}$$

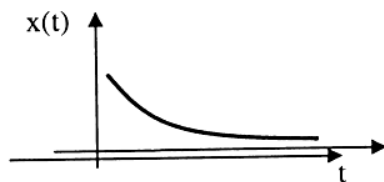
1.4.3.2 Tín hiệu năng lượng có thời hạn vô hạn:

1) Hàm mũ suy giảm:

$$x(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

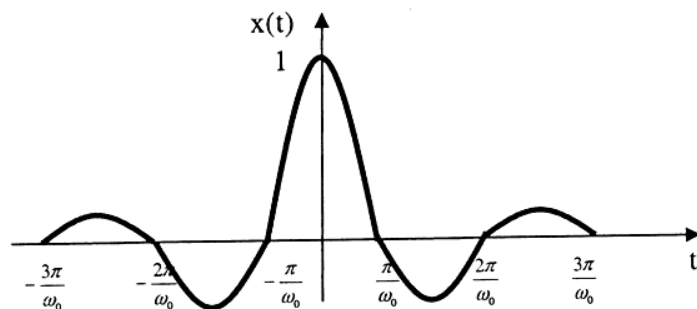
Với $\alpha > 0$

Chương 1: Tín hiệu và nhiễu



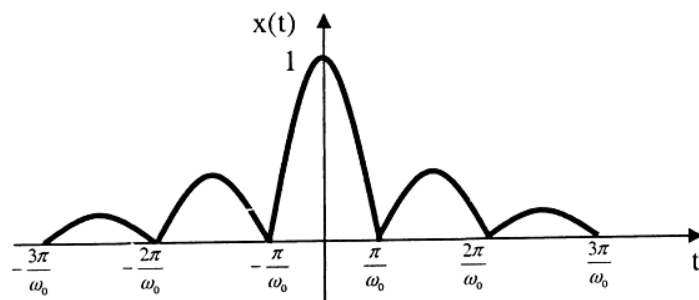
2) Tín hiệu hàm Sa:

$$x(t) = \text{Sa}(\omega_0 t) = \begin{cases} \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0 t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$



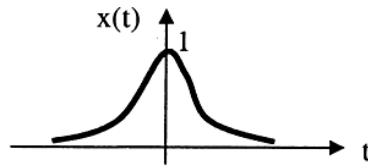
3) Tín hiệu Sa^2 :

$$x(t) = \text{Sa}^2(\omega_0 t) = \begin{cases} \frac{\sin^2 \omega_0 t}{(\omega_0 t)^2} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$



4) Tín hiệu Gausse:

$$x(t) = e^{-\pi t^2}$$



1.4.4 Các tính chất của phép biến đổi Fourier:

Tính chất 1: tính chẵn và lẻ:

$$|X(\omega)| = |X(\omega)|$$

$$\varphi(\omega) = -\varphi(-\omega)$$

Tính chất 2: nếu tín hiệu $x(t)$ có phổ $X(\omega)$ tức là:

$$\text{Nếu } x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

$$x(-t) \leftrightarrow X(-\omega)$$

Tính chất 3: định lý về tính tuyến tính của phổ:

$$\text{Cho } x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

$$y(t) \leftrightarrow Y(\omega)$$

$$\text{Thì } ax(t) + by(t) \leftrightarrow aX(\omega) + bY(\omega)$$

Tính chất 4: tính chất đối xứng:

$$\text{Cho } x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

$$\text{Thì } X(t) \leftrightarrow 2\pi x(\omega)$$

Tính chất 5: định lý về đồng dạng:

$$\text{Cho } x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

$$\text{Thì } x\left(\frac{t}{a}\right) \leftrightarrow |a|X(\omega)$$

Tính chất 6: định lý dịch chuyển trong miền thời gian

$$\text{Cho } x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

$$\text{Thì } x(t - t_0) \leftrightarrow X(\omega).e^{-j\omega t_0}$$

Nhận xét: phổ biên độ không đổi nhưng phổ pha tăng thêm $-\omega t_0$.

Vậy dịch chuyển tín hiệu trong miền thời gian không làm méo tín hiệu.

Tính chất 7: định lý dịch chuyển trong miền tần số (định lý điều chế tín hiệu).

$$\text{Cho } x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

$$\text{Thì} \begin{cases} x(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega - \omega_0) & \omega_0 > 0 \\ x(t)e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega + \omega_0) & \omega_0 < 0 \end{cases}$$

Nhận xét: dịch chuyển phổ của tín hiệu xung quanh tần số ω_0

$$x(t)\cos\omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2}[X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)]$$

$$x(t)\sin\omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2j}[X(\omega - \omega_0) - X(\omega + \omega_0)]$$

Tính chất 8: định lý vi phân trong miền tần số:

Cho $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$

$$\text{Thì } (-j)^n t^n x(t) \leftrightarrow \frac{d^n [X(\omega)]}{(d\omega)^n}; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Tính chất 9: định lý vi phân trong miền thời gian:

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n X(\omega); \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Nhận xét:

- ❖ Tính chất này làm tăng phổ biên độ đối với tần số lớn; ngược lại, làm giảm phổ biên độ đối với tần số nhỏ.
- ❖ Riêng phổ pha sau mỗi lần vi phân sẽ tăng lên một lượng $\frac{\pi}{2}$ với $f > 0$; ngược lại sẽ giảm một lượng $\frac{\pi}{2}$ với $f < 0$

Tính chất 10: tích phân trong miền thời gian:

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} X(\omega)$$

$$\text{Điều kiện: } \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = 0$$

Tính chất 11: tích chập trong miền thời gian

$$x(t) * y(t) \leftrightarrow X(\omega)Y(\omega)$$

Dấu * biểu thị phép tích chập.

Nhận xét: chập 2 tín hiệu trong miền thời gian bằng tích phổ 2 tín hiệu trong miền tần số.

Tính chất 12: tích chập trong miền tần số:

$$x(t)y(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} [X(\omega) * Y(\omega)]$$

Tính chất này thường sử dụng trong điều chế tín hiệu.

Tính chất 13: định lý về hàm tương quan:

$$\varphi_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t-\tau)d\tau \leftrightarrow X(\omega)Y^*(\omega)$$

Tính chất 14: định lý về hàm tự tương quan:

$$\varphi_{xx} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau)d\tau \leftrightarrow |X(\omega)|^2$$

Nhận xét: phổ hàm tự tương quan là bình phương biên độ của tín hiệu.

Tính chất 15: định lý về tích vô hướng:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)Y^*(\omega)d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Công thức Parseval.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

Nhận xét: năng lượng của tín hiệu có thể tính từ hàm tự tương quan khi cho $\tau = 0$ hay bằng tích phân của bình phương biên độ phổ.

4.5 các ví dụ về phổ của tín hiệu (các cặp biến đổi Fourier thông thường):

$$1) e^{-\alpha}1(t) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha + j\omega}; \quad \alpha > 0$$

$$2) e^{-\alpha|t|} \leftrightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$3) \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow TSa\frac{\omega T}{2}$$

$$4) Sa\omega_0 t \leftrightarrow \frac{\pi}{\omega_0} \Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)$$

Ta không thể tính trực tiếp từ định nghĩa.

Áp dụng định lý đối xứng, ta có:

$$\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow TSa\frac{\omega T}{2}$$

$$X(t) = \omega_0 Sa\frac{\omega_0 t}{2} \rightarrow 2\pi \Pi\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

$$Sa\frac{\omega_0 t}{2} \rightarrow \frac{2\pi}{\omega_0} \Pi\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

$$\text{Trong đó: } \omega_0 = \frac{T}{2} = \frac{\omega_0}{2}$$

$$\Rightarrow Sa\omega_0 t \rightarrow \frac{\pi}{\omega_0} \Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)$$

$$\Rightarrow Sa\omega_0 t \rightarrow \frac{\pi}{\omega_0} \Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)$$

$$5) \Lambda\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow TSa^2\frac{\omega T}{2}$$

$$6) Sa^2(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{\pi}{\omega_0} \Lambda\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)$$

Lưu ý: suy từ phổ xung tam giác và áp dụng định lý đối xứng. Ngoài ra, người ta có thể áp dụng định lý tích chập trong miền tần số để chứng minh.

1.4.6 Phổ Fourier giới hạn (phổ của tín hiệu công suất không tuần hoàn):

- Biến đổi Fourier không cho phép xác định phổ của tất cả các loại tín hiệu như: $\delta(t)$, $1(t)$, $\text{sgn}(t)$,...

- Phổ Fourier giới hạn được định nghĩa bởi giới hạn của một dãy tín hiệu nào đó; dùng để biểu diễn tín hiệu không có phổ Fourier.

- Xét tín hiệu $x(t)$ không có biến đổi Fourier, với α là hệ số dương thì:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} x_{\alpha}(t) = x(t) \quad \forall t$$