

BỘ CÔNG THƯƠNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHIỆP TP. HCM

Nguyễn Đức Phương

Bài giảng
Quy hoạch tuyến tính

MSSV:

Họ tên:

TP. HCM – Ngày 27 tháng 6 năm 2011

Mục lục

Mục lục	i
1 Giới thiệu quy hoạch tuyến tính	1
1.1 Một số ví dụ dẫn đến bài toán quy hoạch tuyến tính	1
1.2 Các dạng của bài toán quy hoạch tuyến tính	5
1.2.1 Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng tổng quát	5
1.2.2 Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn	5
1.2.3 Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc	6
1.3 Quan hệ dạng chuẩn và chính tắc	8
1.3.1 Đổi chiều bất đẳng thức của các ràng buộc	8
1.3.2 Biến không ràng buộc	9
1.3.3 Quan hệ dạng chuẩn, chính tắc	10
1.4 Dạng ma trận của bài toán quy hoạch	13
1.5 Phương án chấp nhận được	14
1.6 Ý nghĩa hình học của bài toán quy hoạch tuyến tính	16
1.6.1 Phương pháp đồ thị	16
1.6.2 Tính chất của tập phương án chấp nhận được	17
1.7 Điểm cực biên	21
1.8 Phương án cơ bản chấp nhận được	22
1.8.1 Nghiệm cơ bản của $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$	23
1.8.2 Thành lập phương án cực biên	26
1.8.3 Phương án cực biên và phương án tối ưu	30

1.9	Bài tập chương 1	31
2	Phương pháp đơn hình	33
2.1	Phương pháp đơn hình cho bài toán quy hoạch dạng chuẩn . .	33
2.1.1	Phương án cực biên ban đầu	36
2.1.2	Dấu hiệu tối ưu	37
2.1.3	Chọn biến vào cơ sở	40
2.1.4	Chọn biến ra khỏi cơ sở	41
2.1.5	Lập bảng đơn hình mới	42
2.2	Thuật toán đơn hình cho bài toán min	50
2.3	Bài toán chính tắc không có sẵn ma trận đơn vị	52
2.4	Bài tập chương 2	58
3	Lý thuyết đối ngẫu	64
3.1	Ví dụ dẫn đến bài toán đối ngẫu	64
3.1.1	Bài toán đối ngẫu của bài toán max	66
3.1.2	Bài toán đối ngẫu của bài toán min	68
3.2	Các định lý về đối ngẫu	71
3.3	Bài tập chương 3	79
4	Bài toán vận tải	83
4.1	Bài toán vận tải cân bằng thu phát	83
4.2	Phương án cực biên của bài toán vận tải	85
4.3	Các phương pháp thành lập phương án cực biên	89
4.3.1	Phương pháp cước phí thấp nhất	89
4.3.2	Phương pháp góc Tây - Bắc	90
4.3.3	Phương pháp Vogel (Fogel)	90
4.4	Thuật toán thế vị giải bài toán vận tải	92
4.4.1	Thuật toán quy không cước phí ô chọn	92
4.4.2	Xây dựng phương án cực biên mới	97

4.5	Một số trường hợp đặc biệt của bài toán vận tải	101
4.5.1	Bài toán vận tải không cân bằng thu phát	101
4.5.2	Bài toán vận tải có ô cấm	103
4.6	Bài toán vận tải cực đại cước phí	105
4.7	Bài tập chương 4	106
Tài liệu tham khảo		110

TaiLieu.vn

Chương 1

Giới thiệu quy hoạch tuyến tính

1.1 Một số ví dụ dẫn đến bài toán quy hoạch tuyến tính

Ví dụ 1.1 (Bài toán lập kế hoạch sản xuất). Một trại cưa các khúc gỗ thành các tấm ván. Có hai loại ván: ván thành phẩm và ván sử dụng trong xây dựng. Giả sử, đối với:

- Ván thành phẩm cần 2 giờ để cưa và 5 giờ để bào 10m ván.
- Ván xây dựng cần 3 giờ để cưa và 3 giờ để bào 10m ván.

Máy cưa làm việc tối đa 8 giờ trong ngày, và máy bào làm việc tối đa 15 giờ trong ngày. Nếu lợi nhuận của 10m ván thành phẩm là 120 (ngàn đồng), và lợi nhuận của 10m ván xây dựng là 100 (ngàn đồng). Trong ngày, trại cưa phải cưa bao nhiêu ván mỗi loại để lợi nhuận lớn nhất?

Giải. _____

Ví dụ 1.2 (Bài toán khẩu phần ăn). Chuyên gia dinh dưỡng định thành lập một thực đơn gồm 2 loại thực phẩm chính A và B. Cứ một (trăm gram):

- Thực phẩm A chứa 2 đơn vị chất béo, 1 đơn vị carbohydrate và 4 đơn vị protein.
- Thực phẩm B chứa 3 đơn vị chất béo, 3 đơn vị carbohydrate và 3 đơn vị protein.

Nếu một (trăm gram) thực phẩm A giá 20 (ngàn đồng) và một (trăm gram) thực phẩm B giá 25 (ngàn đồng). Nhà dinh dưỡng muốn thức ăn phải cung cấp ít nhất 18 đơn vị chất béo, 12 đơn vị carbohydrate và 24 đơn vị protein. Bao nhiêu (trăm gram) thực phẩm mỗi loại để có giá nhỏ nhất nhưng vẫn cung cấp đủ dinh dưỡng?

Giải. _____

Ví dụ 1.3 (Bài toán vận tải). Một nhà sản xuất có 2 nhà máy: Một nhà máy ở Vĩnh Phúc và một nhà máy ở Bình Dương. Có 3 kho hàng phân phối sản phẩm đặt ở Hà Nội, TP. HCM và Cần Thơ. Nhà máy ở Vĩnh phúc; Bình Dương, có khả năng cung cấp tối đa 100; 140 tấn mỗi tuần. Lượng cầu của các kho ở Hà Nội, TP. HCM và Cần Thơ lần lượt từ 100; 60 và 80 tấn trở lên. Chi phí vận chuyển (trăm ngàn) mỗi tấn cho như bảng bên dưới. Hỏi cần vận chuyển bao nhiêu tấn hàng hóa từ nhà sản xuất đến các kho hàng ở Hà Nội, TP. HCM và ở cần thơ để chi phí nhỏ nhất nhưng vẫn đáp ứng đủ nhu cầu?

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_5 = 4 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 7 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

e. $z = 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 9x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

f. $z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - x_2 = 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Chú ý. Bài toán tìm giá trị nhỏ nhất của hàm mục tiêu có thể viết thành bài toán tìm giá trị lớn nhất của hàm mục tiêu và ngược lại. Điều này các bạn sẽ thấy qua quan hệ:

$$\min \sum_{j=1}^n c_j x_j = -\max \left(-\sum_{j=1}^n c_j x_j \right) \quad (1.9)$$

tương đương

$$\min z = -\max(-z) \quad (1.10)$$

Do đó, không mất tính tổng quát trong phần lý thuyết ta chỉ phát biểu bài toán tìm giá trị lớn nhất của hàm mục tiêu ($\max z$). Bài toán tìm giá trị nhỏ nhất hàm mục tiêu ($\min z$) thì có thể sử dụng (1.10). $\square$

Ví dụ 1.5. Chuyển các bài toán quy hoạch tuyến tính tìm $\max$ hàm mục tiêu thành tìm $\min$ hàm mục tiêu hay ngược lại

a. $z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \rightarrow \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 \geq -8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 6 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Giai.

$$-k_1x_1 - k_2x_2 - \cdots - k_nx_n \leq -b$$

Ví dụ 1.6. Chuyển bài toán quy hoạch tuyến tính sau sang dạng chuẩn:

$$z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \rightarrow \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 \geq -8 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

Giải. _____

1.3.2 Biến không ràng buộc

Ta biết, một số bất kỳ chính là hiệu của hai số không âm. Giả sử x_j không có ràng buộc không âm, chúng ta có thể thay x_j bằng hai biến $x_j^+ \geq 0$ và $x_j^- \geq 0$ sao cho

$$x_j = x_j^+ - x_j^-$$

Với cách này chúng ta có thể chuyển bài toán không có ràng buộc không âm thành bài toán có ràng buộc không âm.

Ví dụ 1.7. Chuyển bài toán quy hoạch tuyến tính sau sang dạng chuẩn

$$z = 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max \quad (1.11)$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 9x_2 \leq 8 \end{cases} \quad (1.12)$$

$$x_1 \geq 0 \quad (1.13)$$

Giải. _____

Nhận xét. Mọi bài toán quy hoạch tuyến tính đều có thể chuyển đổi thành dạng chuẩn bằng các cách như trên. $\square$

1.3.3 Biến đổi bài toán quy hoạch dạng chuẩn thành dạng chính tắc

Xét ràng buộc thứ i trong bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i \quad (1.14)$$

Chúng ta có thể chuyển ràng buộc (1.14) thành phương trình tuyến tính bằng cách thêm vào *biến phụ* $x_{n+i} \geq 0$, và

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i \quad (1.15)$$

Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn chuyển thành dạng chính tắc có dạng như sau

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \rightarrow \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} & = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n & + x_{n+2} = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & + x_{n+m} = b_m \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_{n+1} \geq 0, \dots, x_{n+m} \geq 0$$

Ví dụ 1.8. Chuyển bài toán quy hoạch tuyến tính sau sang dạng chính tắc

$$z = 120x_1 + 100x_2 \rightarrow \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 15 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Giải. _____

Ví dụ 1.9. Chuyển các bài toán quy hoạch tuyến tính sau sang dạng chính tắc

a. $z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \min$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 6 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

b. $z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \rightarrow \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 \geq -8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

c. $z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 \rightarrow \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ 6x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 5x_4 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

d. $z = 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 9x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

Đặt

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Chúng ta có thể viết bài toán quy hoạch trên thành dạng ma trận: Tìm $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ sao cho

$$z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \max$$

Với các ràng buộc

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Ví dụ 1.10. Viết bài toán quy hoạch tuyến tính sau dưới dạng ma trận.

$$z = 120x_1 + 100x_2 \rightarrow \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 15 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Giải.

1.5 Phương án chấp nhận được

Định nghĩa 1.1 (Phương án chấp nhận được). Véc tơ $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ thỏa tất cả các ràng buộc của bài toán quy hoạch tuyến tính được gọi là phương án chấp nhận được.

