

CHƯƠNG 3 : VỊ TỪ VÀ LƯỢNG TỪ

3.1. Tổng quan

- **Mục tiêu của chương 3**

Học xong chương này, sinh viên phải nắm bắt được các vấn đề sau:

- Thế nào là vị từ, không gian của vị từ, trọng lượng của vị từ.
- Thế nào là lượng từ, lượng từ tồn tại, lượng từ với mọi.
- Cách biểu diễn một câu thông thường thành biểu thức logic.

- **Kiến thức cơ bản cần thiết**

Các kiến thức cơ bản trong chương này bao gồm:

- Các phép toán đại số, hình học cơ bản để xác định được giá trị đúng, sai của các phát biểu.
- Có khả năng suy luận.
- Nắm vững các phép toán logic trong chương 1.

- **Tài liệu tham khảo**

Phạm văn Thiều, Đặng Hữu Thịnh. **Toán rời rạc ứng dụng trong tin học**. Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội - 1997 (chương 1.3, trang 32 - 52).

- **Nội dung cốt lõi**

- Định nghĩa vị từ, không gian của vị từ, trọng lượng của vị từ.
- Định nghĩa lượng từ, lượng từ với mọi, lượng từ tồn tại.
- Dịch các câu thông thường thành biểu thức logic.

3.2. Các định nghĩa

Trong toán học hay trong chương trình của máy tính, chúng ta thường gặp những câu có chứa các biến như sau : " $x > 3$ ", " $x = y + 3$ ", " $x + y = z$ "...

Các câu này không đúng cũng không sai vì các biến chưa được gán cho những giá trị xác định. Trong chương này, chúng ta sẽ xem xét cách tạo ra những mệnh đề từ những câu như vậy.

3.2.1. Định nghĩa vị từ (Prédictat)

Một vị từ là một khẳng định $P(x,y,...)$ trong đó có chứa một số biến $x,y,...$ lấy giá trị trong những tập hợp $A,B,...$ cho trước, sao cho :

- Bản thân $P(x,y,...)$ không phải là mệnh đề.
- Nếu thay $x, y, ...$ bằng những giá trị cụ thể thuộc tập hợp $A, B, ...$ cho trước ta sẽ được một mệnh đề $P(x, y, ...)$, nghĩa là khi đó chân trị của $P(x, y, ...)$ hoàn toàn xác định. Các biến $x, y, ...$ được gọi là các biến tự do của vị từ.

Ví dụ 1: Các câu có liên quan đến các biến như: " $x > 3$ ", " $x + y = 5$ " rất thường gặp trong toán học và trong các chương trình của máy tính. Các câu này không đúng cũng không sai vì các biến chưa được cho những giá trị xác định.

Nói cách khác, vị từ có thể xem là một hàm mệnh đề có nhiều biến hoặc không có biến nào, nó có thể đúng hoặc sai tùy thuộc vào giá trị của biến và lập luận của vị từ.

Ví dụ 2: Câu $\{n \text{ là chẵn}\}$ là một vị từ. Nhưng, khi cho n là một số cụ thể là chẵn hay là lẻ ta được một mệnh đề:

$n = 2 : \{2 \text{ là chẵn}\}$: mệnh đề đúng.

$n = 5 : \{5 \text{ là chẵn}\}$: mệnh đề sai.

Vị từ $\{n \text{ là chẵn}\}$ có 2 phần. Phần thứ nhất là biến x là chủ ngữ của câu. Phần thứ hai " là chẵn " cũng được gọi là vị từ, nó cho biết tính chất mà chủ ngữ có thể có.

Ký hiệu: $P(n) = \{n \text{ là chẵn}\}$

Tổng quát, người ta nói $P(n)$ là giá trị của hàm mệnh đề P tại n . Một khi biến n được gán trị thì $P(n)$ là một mệnh đề.

Ví dụ 3: Cho vị từ $P(x) = \{x > 3\}$. Xác định chân trị của $P(4)$ và $P(2)$.

Giải: $P(4) = \{4 > 3\}$: mệnh đề đúng.

$P(2) = \{2 > 3\}$: mệnh đề sai.

3.2.2. Không gian của vị từ (Prédi cat)

Người ta có thể xem vị từ như là một ánh xạ P , với mỗi phần tử x thuộc tập hợp E ta được một ảnh $P(x) \in \{\emptyset, 1\}$. Tập hợp E này được gọi là không gian của vị từ. Không gian này sẽ chỉ rõ các giá trị khả dĩ của biến x làm cho $P(x)$ trở thành mệnh đề đúng hoặc sai.

3.2.3. Trọng lượng của vị từ (Prédi cat)

Chúng ta cũng thường gặp những câu có nhiều biến hơn. Vị từ xuất hiện cũng như một hàm nhiều biến, khi đó số biến được gọi là trọng lượng của vị từ.

Ví dụ 1: Vị từ $P(a,b) = \{a + b = 5\}$ là một vị từ 2 biến trên không gian N . Ta nói P có trọng lượng 2.

Trong một vị từ $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ có trọng lượng là n . Nếu gán giá trị xác định cho một biến trong nhiều biến thì ta được một vị từ mới $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ có trọng lượng là $(n-1)$. Quy luật này được áp dụng cho đến khi $n=1$ thì ta có một mệnh đề. Vậy, thực chất mệnh đề là một vị từ có trọng lượng là $\emptyset$.

Ví dụ 2: Cho vị từ $P(x, y, z) = \{x + y = z\}$.

$$\begin{aligned} \text{Cho } x = \emptyset : \quad & Q(y,z) = P(\emptyset, y, z) = \{\emptyset + y = z\} \\ y = \emptyset : \quad & R(z) = Q(\emptyset, z) = P(\emptyset, \emptyset, z) = \{\emptyset + \emptyset = z\} \\ z = \emptyset : \quad & T = P(\emptyset, \emptyset, 1) = \{\emptyset + \emptyset = 1\} \end{aligned}$$

mệnh đề sai.

Câu có dạng $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ được gọi là giá trị của hàm mệnh đề P tại $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ và P cũng được gọi là vị từ.

3.2.4. Phép toán vị từ

Phép toán vị từ sử dụng các phép toán logic mệnh đề và là sự mở rộng của phép toán mệnh đề để thể hiện rõ hơn các tri thức.

Ví dụ 1: Cần viết câu "nếu hai người thích một người thì họ không thích nhau" dưới dạng logic vị từ.

Trước khi viết câu trên ta hãy tìm hiểu các câu đơn giản được viết như sau:

"Nam thích Mai" được viết theo phép toán vị từ là: thích (Nam, Mai).

"Đông thích Mai" được viết theo phép toán vị từ là: thích (Đông, Mai).

Tổng quát khẳng định trên được viết như sau:

$$\begin{aligned} & \text{Thích}(X, Z) \text{ AND thích}(Y, Z) \rightarrow \text{NOT thích}(X, Y) \\ \Leftrightarrow & (\text{Thích}(X, Z) \wedge \text{thích}(Y, Z) \rightarrow \neg \text{thích}(X, Y)) \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Cho vị từ "Quả bóng màu xanh". Phép toán vị từ cho phép mô tả theo quan hệ tri thức theo dạng: (quả bóng, xanh).

Cách thể hiện này thuận tiện đối với việc dùng biến và hàm trong xử lý tri thức. Trong lĩnh vực trí tuệ nhân tạo, để lập trình trên các vị từ người ta sử dụng ngôn ngữ

Prolog. Đó là một ngôn ngữ cấp cao có đặc điểm gần với ngôn ngữ tự nhiên, do ông C.Cameraller (Đại học Marseilles, Pháp) và nhóm đồng sự cho ra đời năm 1973.

Ví dụ: Ta có tam đoạn luận sau:

"Người ta ai cũng chết
Socrates là người
Vậy Socrates phải chết"

Trong phần này chúng ta không đi sâu vào ngôn ngữ Prolog (vì sẽ học kỹ ở môn ngôn ngữ lập trình) mà chỉ giới thiệu các khái niệm trong lập trình Prolog có sử dụng các vị từ.

a) Hằng:

Là một giá trị xác định trong không gian của vị từ. các hằng được ký hiệu bởi các chữ thường dùng để đặt tên các đối tượng đặc biệt hay thuộc tính.

b) Biến:

Dùng để thể hiện các lớp tổng quát của các đối tượng hay các thuộc tính. Biến được viết bằng các ký hiệu bắt đầu là chữ in hoa. Vậy có thể dùng vị từ có biến để thể hiện các vị từ tương tự.

Ví dụ: Vị từ "Quả bóng màu xanh" có thể viết lại: "X màu Y".

Quả bóng xanh là các hằng được xác định trong không gian của vị từ. X, Y là biến.

c) Các vị từ:

Một sự kiện hay mệnh đề trong phép toán vị từ được chia thành phần. Vị từ và tham số. Tham số thể hiện một hay nhiều đối tượng của mệnh đề, còn vị từ dùng để khẳng định về đối tượng.

Ví dụ: Câu "X thích Y" có dạng thích (X, Y).

Thích là vị từ cho biết quan hệ giữa các đối tượng trong ngoặc. Đối số là các ký hiệu thay cho các đối tượng của bài toán.

d) Hàm:

Được thể hiện bằng ký hiệu, cho biết quan hệ hàm số.

Ví dụ: Hoa là mẹ của Mai, Đông là cha của Cúc. Hoa và Đông là bạn của nhau. Ta có hàm số được viết để thể hiện quan hệ này.

Mẹ (Mai) = Hoa
Cha (Cúc) = Đông

Bạn (Hoa, Đông)

Các hàm được dùng trong vị từ là: Bạn (Mẹ (Mai), Cha (Cúc))

3.3. Các lượng từ

Khi tất cả các trong một hàm mệnh đề điều được gán cho một giá trị xác định. Ta được chân trị của hàm mệnh đề. Tuy nhiên, còn có một cách khác để biến các vị từ thành mệnh đề mà người ta gọi là sự lượng hóa (hay lượng từ).

3.3.1. Lượng từ tồn tại ($\exists$)

Câu xác định "Tập hợp những biến x làm cho $P(x)$ là đúng không là tập hợp rỗng" là một mệnh đề. Hay "Tồn tại ít nhất một phần tử x trong không gian sao cho $P(x)$ là đúng" là một mệnh đề được gọi là lượng từ tồn tại của $P(x)$.

Ký hiệu: $\exists x P(x)$.

3.3.2. Lượng từ với mọi ($\forall$)

Câu xác định "Tập hợp những x làm cho $P(x)$ đúng là tất cả tập hợp E " là một mệnh đề. Hay " $P(x)$ đúng với mọi giá trị x trong không gian" cũng là một mệnh đề được gọi là lượng từ với mọi của $P(x)$.

Ký hiệu: $\forall x P(x)$

Ví dụ: Cho vị từ $P(x) = \{\text{số nguyên tự nhiên } x \text{ là số chẵn}\}$.

Xét chân trị của hai mệnh đề $\forall x P(x)$ và $\exists x P(x)$.

Giải:

$\forall x P(x) = \{\text{tất cả số nguyên tự nhiên } x \text{ là số chẵn}\}$ là mệnh đề sai khi $x = 5$.

$\exists x P(x) = \{\text{hiện hữu một số nguyên tự nhiên } x \text{ là số chẵn}\}$ là mệnh đề đúng khi $x = 10$.

Chú ý: Cho P là một vị từ có không gian E . Nếu $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, mệnh đề $\forall x P(x)$ là đúng khi tất cả các mệnh đề $P(e_1), P(e_2), \dots, P(e_n)$ là đúng. Nghĩa là $\forall x P(x) \Leftrightarrow P(e_1) \wedge P(e_2) \wedge \dots \wedge P(e_n)$ là đúng.

Tương tự $\exists x P(x)$ là đúng nếu có ít nhất một trong những mệnh đề $P(e_1), P(e_2), \dots, P(e_n)$ là đúng. Nghĩa là $\exists x P(x) \Leftrightarrow P(e_1) \vee P(e_2) \vee \dots \vee P(e_n)$ là đúng.

- Nếu không gian E là một tập trống thì $\forall xP(x)$ và $\exists xP(x)$ có chân trị như thế nào ? (Sinh viên tự giải đáp).

Ví dụ: Cho $P(a,b) = \{\text{cặp số nguyên tương ứng thỏa } a + b = 5\}$

Hãy xác định chân trị của các mệnh đề sau:

$\forall(a,b) P(a,b)$	{Tất cả cặp số nguyên tương ứng}	F
$\exists(a,b) P(a,b)$	{Hiện hữu một cặp số nguyên tương ứng (a,b) sao cho $a + b = 5$ }	V
$\exists b \forall a P(a,b)$	{Hiện hữu một cặp số nguyên tương ứng b sao cho cho mọi số nguyên tương ứng a ta có $a + b = 5$ }	F
$\forall a \exists b P(a, b)$	{Mọi số nguyên tương ứng a , hiện hữu một số nguyên tương ứng b sao cho $a + b = 5$ }	V
$\exists a \forall b P(a,b)$	{Hiện hữu một cặp số nguyên tương ứng a sao cho cho mọi số nguyên tương ứng b ta có $a + b = 5$ }	F
$\forall b \exists a P(a, b)$	{Mọi số nguyên tương ứng b , hiện hữu một số nguyên tương ứng a sao cho $a + b = 5$ }	V

Định lý 1: Cho vị từ $P(a, b)$ có trọng lượng là 2. Khi đó:

a) $\forall a \forall b P(a,b)$ và $\forall b \forall a P(a, b)$ là có cùng chân trị.

Nghĩa là : $\forall a \forall b P(a,b) \leftrightarrow \forall b \forall a P(a, b)$

Ký hiệu: $\forall(a,b) P(a,b)$

b) $\exists a \exists b P(a,b)$ và $\exists b \exists a P(a, b)$ là có cùng chân trị.

Nghĩa là: $\exists a \exists b P(a,b) \leftrightarrow \exists b \exists a P(a, b)$

Ký hiệu: $\exists(a,b) P(a,b)$

c) Nếu $\exists a \forall b P(a,b)$ là đúng thì $\forall b \exists a P(a,b)$ cũng đúng nhưng điều ngược lại chưa đúng. Nghĩa là : $\exists a \forall b P(a,b) \rightarrow \forall b \exists a P(a,b)$

d) Nếu $\exists b \forall a P(a,b)$ là đúng thì $\forall a \exists b P(a,b)$ cũng đúng nhưng điều ngược lại chưa đúng. Nghĩa là : $\exists b \forall a P(a,b) \rightarrow \forall a \exists b P(a,b)$

Định lý 2:

1. $\neg (\forall x P(x))$ và $\exists x (\neg P(x))$ là có cùng chân trị.

2. $\neg (\exists x P(x))$ và $\forall x (\neg P(x))$ là có cùng chân trị.

Giải thích:

1. Phủ định với $\forall x P(x)$ nói rằng tập hợp những x làm cho $P(x)$ đúng không là tất cả tập hợp E . Vậy nói rằng hiện hữu ít nhất một phần tử $x \in E$ mà ở chúng $P(x)$ là sai hay nói rằng hiện hữu ít nhất một phần tử $x \in E$ mà ở chúng $P(x)$ là đúng.

2. $\neg \exists x P(x)$ nói rằng tập hợp những x mà ở chúng $P(x)$ là đúng là tập hợp trống. Nghĩa là, tập hợp những x mà ở chúng $P(x)$ là sai là tập hợp E hay không có phần tử nào làm $P(x)$ đúng. Ta có $\forall x (\neg P(x))$.

Ví dụ: Phủ định của "Mọi số nguyên n là chia chắn cho 3"

là "Tồn tại ít nhất một số nguyên n không chia chắn cho 3"

- Phương pháp ứng dụng.

Để đạt được phủ định của một mệnh đề xây dựng bằng liên kết của những biến của vị từ với phương tiện định lượng, người ta thay thế những định lượng với mọi $\forall$ bởi tồn tại $\exists$, tồn tại $\exists$ bởi với với mọi $\forall$ và sau cùng thay thế vị từ bằng phủ định của vị từ đó.

Định lý 3: Cho P và Q là hai vị từ có cùng không gian.

1. Mệnh đề $\forall x (P(x) \wedge Q(x))$ và $(\forall x (P(x)) \wedge \forall x (Q(x)))$ là có cùng chân trị.

2. Nếu mệnh đề $\exists x (P(x) \wedge Q(x))$ là đúng thì ta có mệnh đề:

$(\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x))$ cũng đúng.

3. Mệnh đề $\exists x (P(x) \vee Q(x))$ và $(\exists x P(x) \vee \exists x Q(x))$ là có cùng chân trị.

4. Nếu mệnh đề $\forall x (P(x) \vee Q(x))$ là đúng thì ta có mệnh đề $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ là đúng, nhưng điều ngược lại không luôn luôn đúng.

Chú thích:

Nếu P và Q là hai vị từ có cùng không gian E . Ta có :

- Tập hợp $A \subset E$: Tập hợp những phần tử x thuộc E mà ở chúng thì $P(x)$ là đúng.

- Tập hợp $B \subset E$: Tập hợp những phần tử x thuộc E mà ở chúng thì $Q(x)$ là đúng.

Khi đó người ta lưu ý rằng, $A \wedge B$ là tập hợp những x thuộc E mà ở chúng mệnh đề $P(x) \wedge Q(x)$ là đúng. Trong khi đó $A \vee B$ là tập hợp những x của E mà ở đó mệnh đề $P(x) \vee Q(x)$ là đúng.

3.4. Dịch các câu thông thường thành biểu thức logic

Sau khi đã được giới thiệu về các lượng từ, chúng ta có thể biểu diễn được một tập hợp rộng lớn các câu thông thường thành các biểu thức logic. Việc làm này nhằm mục đích loại đi những điều chưa rõ ràng và người ta có thể sử dụng các câu suy luận này trong việc lập trình logic và trí tuệ nhân tạo.

Ví dụ 1: Biểu diễn câu "Mọi người đều có chính xác một người bạn tốt nhất" thành một biểu thức logic.

Giải: Giả sử $B(x,y)$ là câu "y là bạn tốt của x". Để dịch câu trong ví dụ cần chú ý $B(x,y)$ muốn nói rằng đối với mỗi cá nhân x có một cá nhân khác là y sao cho y là bạn tốt nhất của x , nếu z là một cá nhân khác y thì z không phải là bạn tốt nhất của x . Do đó, câu trong ví dụ có thể dịch thành:

$$\forall x \exists y \forall z [B(x,y) \wedge ((z \neq y) \rightarrow \neg B(x,z))]$$

Ví dụ 2: Biểu diễn câu: "Nếu một người nào đó là phụ nữ và đã sinh con, thì người đó sẽ là mẹ của một người nào khác" thành một biểu thức logic:

Giải: Giả sử $F(x)$ = "x là phụ nữ"

$P(x)$ = "x đã sinh con"

và $M(x,y)$ = "x là mẹ của y"

Vì trong ví dụ áp dụng cho tất cả mọi người nên ta có thể viết nó thành biểu thức như sau:

$$\forall x (F(x) \wedge P(x)) \rightarrow \exists y M(x,y)$$

Ví dụ 3: Xét các câu sau. Hai câu đầu tiên là tiền đề và câu ba là kết luận. Toàn bộ tập hợp 3 câu này được gọi là một suy lý.

"Tất cả sư tử Hà Đông đều hung dữ".

"Một số sư tử Hà Đông không uống cà phê".

"Một số sinh vật hung dữ không uống cà phê".

Giải: Gọi $P(x)$ = {x là sư tử hà đông}

$Q(x)$ = {x hung dữ}

$R(x)$ = {x uống cà phê}

Giả sử rằng không gian là tập hợp toàn bộ các sinh vật, ta có cách suy diễn sau:

$$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$$

$$\exists x (P(x) \wedge \neg R(x))$$

$$\exists x (Q(x) \wedge \neg R(x))$$

3.5. Tổng kết chương 3

Có một số điều cần lưu ý trong việc phủ định các lượng từ trong định lý 2.

Ví dụ : Hãy xét phủ định của câu sau đây :

"Tất cả sinh viên trong lớp đều đã học môn Toán rời rạc 2"

Câu này chính là câu sử dụng lượng từ với mọi như sau: $\forall xP(x)$

Trong đó $P(x) = \{x \text{ đã học môn Toán rời rạc 2}\}$.

Phủ định của câu này là : " Không phải tất cả các sinh viên trong lớp đều đã học môn Toán rời rạc 2". Điều này có nghĩa là : " Có ít nhất một sinh viên ở lớp này chưa học Toán rời rạc 2" . Đây chính là lượng từ tồn tại của phủ định hàm mệnh đề ban đầu được viết như sau : $\exists x\neg P(x)$. Ta có :

$$\neg \forall xP(x) \Leftrightarrow \exists x\neg P(x)$$

$$\neg \exists xP(x) \Leftrightarrow \forall x\neg P(x)$$

Phép phủ định các lượng từ được minh họa rõ hơn trong bảng chú thích sau:

Phủ định	Mệnh đề tương đương	Khi nào phủ định là đúng	Khi nào sai
$\neg \exists xP(x)$	$\forall x\neg P(x)$	$P(x)$ sai với mọi x	Có một x để $P(x)$ là đúng
$\neg \forall xP(x)$	$\exists x\neg P(x)$	Có một x để $P(x)$ sai	$P(x)$ đúng với mọi x

3.6. Bài tập chương 3

1. Cho 2 vị từ $P(x)$ xác định như sau:

$$P(x) = \{x \leq 3\}$$

$$Q(X) = \{x+1 \text{ là số lẻ}\}$$

Nếu không gian là tập số nguyên, hãy xác định chân trị của những mệnh đề sau:

- | | | |
|-----------|------------------------------|-----------------------------------|
| a) $P(1)$ | b) $Q(1)$ | c) $\neg P(3)$ |
| d) $Q(6)$ | e) $P(7) \wedge Q(7)$ | f) $P(3) \wedge Q(4)$ |
| g) $P(4)$ | h) $\neg (P(-4) \vee Q(-3))$ | i) $\neg P(-4) \wedge \neg Q(-3)$ |

2. Các vị từ $P(x)$, $Q(x)$ được cho như bài tập 1. $R(x) = \{x > 0\}$. Nếu không gian vẫn là tập số nguyên.

a) Xác định chân trị của những mệnh đề sau:

- | | |
|--|--|
| 1. $P(3) \vee [Q(3) \vee \neg R(3)]$ | 2. $\neg P(3) \wedge [Q(3) \vee [Q(3) \vee R(3)]]$ |
| 3. $P(2) \rightarrow [Q(2) \rightarrow R(2)]$ | 4. $[P(2) \Leftrightarrow Q(2)] \rightarrow R(2)$ |
| 5. $P(0) \rightarrow [\neg Q(1) \Leftrightarrow R(1)]$ | 5. $[P(-1) \Leftrightarrow Q(-2) \Leftrightarrow R(-3)]$ |

b) Xác định tất cả các giá trị x sao cho $[P(x) \wedge Q(x)] \wedge R(x)$ là một mệnh đề đúng.

c) Tìm 5 giá trị nguyên dương nhỏ nhất của x sao cho vị từ.

$P(x) \rightarrow [\neg Q(x) \wedge R(x)]$ là mệnh đề đúng.

3. Cho vị từ $P(x)$ được xác định như sau: $P(x) = \{x^2 = 2x\}$ trên không gian là tập hợp số nguyên. Xác định giá trị đúng, sai của những mệnh đề:

- | | | |
|------------|---------------------|---------------------|
| a) $P(0)$ | b) $P(1)$ | c) $P(2)$ |
| d) $P(-2)$ | e) $\exists x P(x)$ | f) $\forall x P(x)$ |

4. Cho 2 vị từ 2 biến $P(x,y)$ và $Q(x,y)$ được xác định như sau:

$$P(x,y) = \{x^2 \geq y\}$$

$$Q(x,y) = \{x+2 < y\}$$

Nếu không gian là tập số thực, xác định chân trị của các mệnh đề

- | | |
|--------------------------------|---|
| a) $P(2,4)$ | b) $Q(1,\pi)$ |
| c) $P(-3,8) \wedge Q(1,3)$ | d) $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) \vee \neg Q(-2,-3)$ |
| e) $P(2,2) \rightarrow Q(1,1)$ | f) $P(1,2) \Leftrightarrow \neg Q(1,2)$ |

5. Trong một chương trình Pascal, n là một biến nguyên và A là mảng chứa 20 giá trị nguyên $A[1], A[2], \dots, A[20]$ được khai báo như sau:

for $n:=1$ to 20 do

$A[n] := n * n - n;$

Hãy viết dạng kí hiệu của những mệnh đề sau: nếu xem $A[n]$ như vị từ một biến n trên không gian các số nguyên từ 1 đến 20:

a) Mọi phần tử của mảng đều không âm.