

§4 KHÔNG GIAN MÊTRIC ĐẦY ĐỦ

4.1.1 Dãy $(x_n)_n$ trong không gian metric X được gọi là dãy cơ bản hay dãy Cauchy nếu $\lim_{m,n \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) = 0$. Nói cách khác

$$((x_n)) \text{ là dãy cơ bản } \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall m, n \leq n_0 : d(x_n, x_m) < \varepsilon)$$

Ta có các tính chất đơn giản sau:

a) Nếu (x_n) là dãy hội tụ thì (x_n) là dãy cơ bản trong X .

b) Nếu dãy cơ bản (x_n) có một dãy con $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ sao cho (x_{n_k}) hội tụ đến x_0 thì $x_n \rightarrow x_0$

4.1.2. Định nghĩa. Không gian metric X được gọi là không gian metric đầy đủ nếu mọi dãy cơ bản của nó đều hội tụ trong X .

Như thế nếu biết X là không gian đầy đủ, để chứng minh một dãy hội tụ (mà không quan tâm đến giới hạn), ta chỉ cần kiểm tra dãy này là dãy cơ bản.

4.1.3. Ví dụ

1. Không gian $\mathbb{R}^k$ với metric thông thường là không gian đầy đủ.

Thật vậy, cho $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^k$ cơ bản, với $x_n = (x_n^1, \dots, x_n^k)$. Khi đó ta có

$$|x_n^i - x_m^i| \leq \left(\sum_{j=1}^k |x_n^j - x_m^j|^2 \right)^{1/2} = d(x_n, x_m) \rightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty) \text{ nên } (x_m^i)_m \text{ là}$$

dãy cơ bản trong $\mathbb{R}$, do đó $x_m^i \rightarrow x_0^i$ với mọi $i = 1, 2, \dots, k$. Nhưng từ ví dụ a); 1.5.3. ta có dãy (x_n) hội tụ đến $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^k) \in \mathbb{R}^k$ tức là $\mathbb{R}^k$ đầy đủ.

2. Lấy $X = (0, 1]$ là tập con của $\mathbb{R}$ với metric $d(x, y) = |x - y|$

Đây là không gian metric không đầy đủ.

Thật vậy, lấy dãy $x_n = \frac{1}{n}$ trong X . Ta có

$$|x_n - x_m| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \rightarrow 0, \quad (m, n \rightarrow \infty)$$

nhên nó là dãy cơ bản nhưng không hội tụ về điểm nào trong X , (nếu xét trong $\mathbb{R}$ thì $x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$)

3. Không gian $C_{[a,b]}$ là không gian đầy đủ

Chứng minh. Cho (x_n) là dãy cơ bản trong $C_{[a,b]}$. Điều này có nghĩa là:

$$d(x_n, x_m) = \max_{t \in [a,b]} |x_n(t) - x_m(t)| \rightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty)$$

Với mỗi $t \in [a, b]$, hiển nhiên ta có $|x_n(t) - x_m(t)| \leq d(x_n, x_m)$, suy ra $(x_n(t))_n$ là dãy số thực cơ bản trong $\mathbb{R}$ nên hội tụ. Đặt $x(t) = \lim_n x_n(t)$ với mọi $t \in [a, b]$. Ta còn phải chứng minh $x(t)$ thuộc $C_{[a, b]}^L$ và $x_n \rightarrow x$ trong $C_{[a, b]}^L$. Lấy $\varepsilon > 0$ sẽ tồn tại n_0 sao cho với mọi $m, n \geq n_0$ và với mọi $t \in [a, b]$ ta có

$$|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon \quad (1)$$

Cho $m \rightarrow \infty$ ở (1), ta được $|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon$ khi $n \geq n_0$ và với mọi $t \in [a, b]$. Vậy $x_n(t)$ hội tụ đều đến $x(t)$ trên $[a, b]$, liên tục trên $[a, b]$, tức là $x(t) \in C_{[a, b]}^L$, đồng thời $x_n \rightarrow x$. Do đó $C_{[a, b]}^L$ là không gian đầy đủ.

4. Không gian $C_{[a, b]}^L$ không đầy đủ

Chứng minh. Ta xét trường hợp $[a, b] = [0, 1]$ và xét dãy $x_n(t)$ như sau: (hình 5)

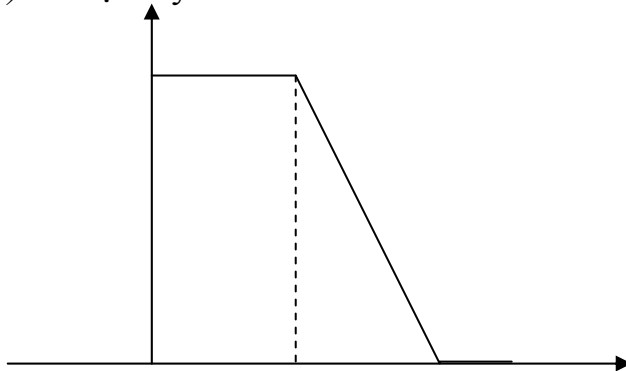
$$x_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{khi } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 0 & \text{khi } \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \leq t \leq 1 \\ n+1-2nt & \text{khi } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \end{cases}$$

Với $m, n \in \mathbb{N}$, ($m > n$), ta có

$$d(x_n, x_m) = \int_0^1 |x_n(t) - x_m(t)| dt = \int_{1/2}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}} |x_n(t) - x_m(t)| dt$$

Vì $|x_n(t) - x_m(t)| \leq 2$ nên $d(x_n, x_m) \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$ khi $m, n \rightarrow \infty$

Vậy $x_n(t)$ là một dãy cơ bản



Tuy nhiên ta chứng minh rằng dãy $x_n(t)$ không hội tụ trong $C_{[a, b]}^L$. Thật vậy $x(t)$ là một hàm bất kỳ trong $C_{[0, 1]}^L$. Xét hàm số gián đoạn trên $[0, 1]$ như sau

$$y(t) = \begin{cases} 1, & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 0, & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Như thế $x(t) \neq y(t)$ nên phải có $t_0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ chẳng hạn để $y(t_0) \neq x(t_0)$. Hơn nữa, trên $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ cả hai hàm $x(t)$ và $y(t)$ cùng liên tục nên lý luận như ví dụ 1.2.5, ta có:

$$0 < \int_0^{1/2} |x(t) - y(t)| dt$$

Từ đó:

$$\begin{aligned} 0 &< \int_0^{1/2} |x(t) - y(t)| dt \leq \int_0^1 |x(t) - y(t)| dt \\ &\leq \int_0^1 |x(t) - x_n(t)| dt + \int_0^1 |x_n(t) - y(t)| dt \end{aligned}$$

Mặt khác ta có:

$$\int_0^1 |x_n(t) - y(t)| dt = \int_{1/2}^1 |x_n(t) - y(t)| dt = \frac{1}{4n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Vì vậy với n đủ lớn

$$\int_0^1 |x(t) - x_n(t)| dt \geq \frac{1}{2} \int_0^{1/2} |x(t) - y(t)| dt > 0$$

tức là $x_n(t)$ không thể hội tụ về $x(t)$ trong $C_{[0,1]}^L$. Nói cách khác, không có điểm nào trong $C_{[0,1]}^L$ là giới hạn của dãy cơ bản $x_n(t)$ cả. Như thế không gian $C_{[0,1]}^L$ không đầy đủ.

4.2 Các tính chất cơ bản.

4.2.1 Định lý. Giả sử X là không gian metric đầy đủ và $Y \neq \emptyset$ là tập con đóng của X . Khi đó không gian con metric con Y cũng đầy đủ.

Chứng minh. Giả sử $(x_n)_n$ là một dãy cơ bản trong Y . Dĩ nhiên $(x_n)_n$ cũng là dãy cơ bản trong X . Vì X đầy đủ nên x_n hội tụ đến $x_0 \in X$. Mặt khác vì Y đóng và $(x_n) \subset Y$ nên $x_n \rightarrow x_0$ thì x_0 phải thuộc Y . Vậy Y đầy đủ.

Cho $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$ là một dãy hình cầu có bán kính $r_1, r_2, \dots$. Dãy hình cầu này gọi là thất lại nếu $B_n \supset B_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$.

4.2.2 Định lý. (Cantor) Trong không gian metric đầy đủ, mọi dãy hình cầu đóng, thắt lại đều có một điểm chung duy nhất. Đảo lại, nếu mọi dãy hình cầu đóng, thắt lại trong không gian metric X có một điểm chung duy nhất thì X đầy đủ.

Chứng minh.

Điều kiện cần: Giả $B'(x_l, r_l) = B_1, \dots, B'(x_m, r_m) = B_n, \dots$ là dãy hình cầu đóng, thắt dần trong không gian đầy đủ X . Với $m \geq n$ thì $B_m \subset B_n$ nên $d(x_n, x_m) \leq r_n$. Vì $r_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$ nên (x_n) là dãy cơ bản trong X , thành thử tồn tại $x_0 \in X$ để $x_n \rightarrow x_0$.

Mặt khác với mỗi $n \in \mathbb{N}$, dãy $(x_{nk})_k$ với $n_k = n + k$ là con của dãy (x_n) nên $x_{nk} \rightarrow x_0$. Hơn nữa $x_{nk} \in B_n$ với mọi $k = 1, 2, \dots$ và B_n đóng nên $x_0 \in B_n$. Vậy $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. Nếu có $y_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ thì do x_0, y_0 cùng thuộc B_n nên.

$$d(x_0, y_0) \leq d(x_0, x_n) + d(y_0, x_n) \leq 2r_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Vậy $d(x_0, y_0) = 0$ hay $x_0 = y_0$

Điều kiện đủ: Cho $(x_n)_n$ là dãy cơ bản trong X . Theo định nghĩa với $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$

tồn tại số nguyên $n_1 > 0$ sao cho $d(x_n, x_m) < \frac{1}{2}$ với mọi $m, n \geq n_1$.

Đặc biệt $d(x_n, x_{n_1}) < \frac{1}{2}$. Đặt $B_1 = B'(x_{n_1}, \frac{1}{2})$. Ta chọn $n_2 > n_1$ sao cho $d(x_n, x_{n_2}) < \frac{1}{2^2}$ khi $n \geq n_2$. Dễ thấy $B_2 = B'(x_{n_2}, \frac{1}{2}) \subset B_1$. Bằng quy nạp, giả sử đã chọn được $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}$ ($n_1 < n_2 < \dots < n_k$) và xây dựng dãy hình cầu đóng $B_1 \supset B_2 \supset \dots \supset B_k$ ta lấy $x_{n_{k+1}}$ sao cho $n_{k+1} > n_k$ và $d(x_n, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^{k+1}}$ với $n \geq n_{k+1}$ đồng thời đặt $B_{k+1} = B'(x_{n_{k+1}}, \frac{1}{2^{k+1}})$. Như vậy (B_k) là dãy hình cầu đóng thắt lại nên theo giả

thiết $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = \{x_0\}$. Ta có $d(x_{n_k}, x_0) \leq \frac{1}{2^{k-1}}$, $k = 1, 2, \dots$ nên $x_{n_k} \rightarrow x_0$.

Do b) 4.1.1, dãy cơ bản (x_n) cũng hội tụ về x_0 vì (x_{n_k}) là một dãy con của (x_n) . Vậy X đầy đủ.

4.3. Các tập thuộc phạm vi trừ I, II:

4.3.1. Định nghĩa. Cho M là một tập con của không gian metric X . Ta gọi M là tập hợp không đâu trừ mật (hay còn gọi là tập hợp thưa) nếu nó không trừ mật trong bất kỳ hình cầu nào. Nói một cách tương đương:

$$(M \subset X \text{ là tập thưa } (\overline{M} = \emptyset)).$$

4.3.2. Định lý. $M \subset X$ là tập hợp thừa nếu và chỉ nếu mọi hình cầu mở trong B trong X , tồn tại một hình cầu (đóng hoặc mở) $B_1 \subset B$ sao cho $B_1 \cap M = \emptyset$.

Chứng minh. Điều kiện cần: Giả sử $\overline{M} = \emptyset$ và B là hình cầu mở trong X . Hiển nhiên $B \not\subset \overline{M}$ nên có $x \in B$ và $x \notin \overline{M}$. Theo tính chất của bao đóng, tồn tại $r > 0$ để $B(x, r) \cap M = \emptyset$. Do B mở nên có thể chọn r đủ nhỏ để $B(x, r) \subset B$ đồng thời $B(x, r) \cap M = \emptyset$.

Điều kiện đủ: Giả sử M không phải là tập hợp thừa, tức là $\overline{M} \neq \emptyset$. Lấy $x \in \overline{M}$ sẽ có $r > 0$ để $B(x, r) \subset \overline{M}$. Vậy bất kỳ hình cầu nào chứa trong $B(x, r)$ đều chứa trong $\overline{M}$ nên phải có giao với M khác trống.

4.3.3. Định nghĩa. Cho A là tập con của không gian metric X . Tập A được gọi là tập thuộc phạm trù I trong X nếu tồn tại dãy các tập thừa $M_1, M_2, \dots$ sao cho $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$.

Nếu A không phải là tập thuộc phạm trù I thì A gọi là tập thuộc phạm trù II.

4.3.4. Định lý. (Baire) Giả sử X là một không gian metric đầy đủ. Khi đó X tập thuộc phạm trù II.

Chứng minh. Dùng phản chứng. Giả sử X thuộc phạm trù I, khi đó tồn tại dãy tập thừa $A_n \subset X$ sao cho $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Do A_1 thừa nên có hình cầu đóng B_1 bán kính $r_1 < 1$ sao cho $B_1 \cap A_1 = \emptyset$. Cũng vậy, vì A_2 thừa, tồn tại hình cầu đóng $B_2 \subset B_1$ bán kính $r_2 < \frac{1}{2}$ để $B_2 \cap A_2 = \emptyset$. Bằng quy nạp ta xây dựng được dãy hình cầu đóng thất lại B_n có bán kính $r_n < \frac{1}{n}$ sao cho $B_n \cap A_n = \emptyset$ với $n \in \mathbb{N}$. Theo định lý 4.2.2, tồn tại duy nhất $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. Vì $x_0 \in B_n$ nên $x_0 \notin A_n$ với $n \in \mathbb{N}$. Từ đó $x_0 \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = X$. Điều này vô lý. Vậy X phải thuộc phạm trù II.

Một hệ quả rất hay dùng được phát biểu dưới dạng sau.

4.3.5. Hệ quả. Giả sử X là một không gian metric đầy đủ và $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Khi đó tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\overline{A_{n_0}} \neq \emptyset$.

4.4. Ánh xạ liên tục đều:

Giả sử X, Y là hai không gian metric, f là ánh xạ từ X vào Y . Bằng ngôn ngữ ε, δ theo định nghĩa, hàm f liên tục tại điểm $x_0 \in X$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ (δ nói chung phụ thuộc vào x_0 và ε) sao cho $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ mỗi khi $d(x, x_0) < \delta$. Nếu số dương δ không phụ thuộc vào mỗi điểm x_0 ta có khái niệm liên tục đều.

4.4.1 Định nghĩa. Ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ được gọi là liên tục đều trên X nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x, x' \in X$ mà $d(x, x') < \delta$ thì $(d(f(x), f(x')) < \varepsilon$.

4.4.2. Nhận xét.

1. Mọi ánh xạ liên tục đều từ X vào Y là liên tục. Điều ngược lại nói chung không đúng. Chẳng hạn, hàm $x \mapsto x^2$ là liên tục nhưng không liên tục đều trên $\mathbb{R}$ vì hiệu $(x+h)^2 - x^2 = h(2x+h)$ có những giá trị lớn tùy ý dù h lấy đủ bé.

2. Nếu $f : X \rightarrow Y$ và $g : Y \rightarrow Z$ là ánh xạ liên tục đều thì ánh xạ hợp $h = g \circ f : X \rightarrow Z$ cũng liên tục đều.

4.4.3 Định lý. Cho X là không gian metric, A là tập con trù mật trong X và f là ánh xạ từ A vào không gian metric đầy đủ Y . Giả sử f liên tục đều trên A . Khi ấy tồn tại duy nhất mở rộng $\bar{f}$ của f lên X và $\bar{f}$ liên tục đều trên X .

Chứng minh. Ta sẽ sử dụng Định lý 3.3.3 để chứng minh tồn tại mở rộng $\bar{f}$. Muốn thế hãy kiểm tra rằng với mọi $x \in X$ thì $\lim_{\substack{z \in A \\ z \rightarrow x}} f(z)$ tồn tại.

Lấy một dãy bất kỳ (z_n) trong A mà $z_n \rightarrow x$. Với $\varepsilon > 0$ cho trước tùy ý, do f liên tục đều trên A nên tồn tại số dương δ sao cho $(d(f(z'), f(z'')) < \varepsilon$ khi $d(z', z'') < \delta$ với mọi $z', z'' \in A$.

Vì $z_n \rightarrow x$ nên dãy $(z_n)_n$ là dãy cơ bản : với $\delta > 0$ ở trên tồn tại số nguyên n_0 để $(z_n, z_m) < \delta$ với mọi $m, n \geq n_0$. Nhưng khi đó $d(f(z_n), f(z_m)) < \varepsilon$. Như thế $(f(z_n))_n$ là một dãy cơ bản trong Y . Hơn nữa, Y đầy đủ nên tồn tại $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(z_n)) = l$. Vậy ta có được ánh xạ $\bar{f} : X \rightarrow Y$ mở rộng liên tục duy nhất của ánh xạ f .

Còn lại ta chứng minh $\bar{f}$ liên tục đều trên X . Lại ứng dụng tính liên tục đều của f trên A như trước, giả sử x_0 và x'_0 là hai điểm trong X với $d(x_0, x'_0) < \delta$. Xét hai dãy (z_n) và (z'_n) trong A lần lượt hội tụ đến x_0 và x'_0 . Chọn n_0 đủ lớn ta thấy rằng nếu $n \geq n_0$ thì

$$d(z_n, z'_n) \leq d(z_n, x_0) + d(x'_0, z'_n) \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Do vậy:

$$d(\bar{f}(z_n), \bar{f}(z_n')) = d(f(z_n), f(z_n')) < \varepsilon$$

Cho $n \rightarrow \infty$ ta có $d(\bar{f}(x_0), \bar{f}(x_0')) \leq \varepsilon$. Vậy $\bar{f}$ liên tục đều trên X .

4.5. Nguyên lý ánh xạ co.

4.5.1. Định nghĩa. Cho ánh xạ f từ tập X bất kỳ vào chính nó. Phần tử $x \in X$ sao cho $f(x) = x$ được gọi là điểm bất động của ánh xạ f .

Việc tìm điểm bất động của một ánh xạ là vấn đề có nhiều ứng dụng trong giải tích, đặc biệt trong lý thuyết phương trình (vi phân, tích phân...) vì một điểm bất động của ánh xạ f là một nghiệm của phương trình $f(x) = x$.

Bây giờ cho X là một không gian metric và f là một ánh xạ từ X vào X , f được gọi là ánh xạ co nếu tồn tại một số $\alpha \in [0, 1]$ sao cho với mọi $x, y \in X$ ta có:

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y).$$

Từ định nghĩa ta thấy ngay mọi ánh xạ co là liên tục đều.

4.5.2. Định lý (nguyên lý ánh xạ co Banach). Giả sử X là một không gian metric đầy đủ $f : X \rightarrow X$ là một ánh xạ co. Khi đó f có một điểm bất động duy nhất.

Chứng minh. Lấy một điểm tùy ý $x_0 \in X$. Đặt
 $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)), \dots, x_n = f(x_{n-1}) = \underbrace{f(f \dots f)}_{N \text{ lần}}(x_0), \dots$

Ta chứng tỏ (x_n) là một dãy cơ bản trong X .

Vì f là ánh xạ co nên nếu $n \geq 1$ thì

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq \alpha d(x_{n-1}, x_n) \\ &= \alpha d(x_{n-2}, f(x_{n-1})) \\ &\leq \alpha^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) \leq \dots \leq \alpha^n d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Với $\alpha \in [0, 1]$

Lúc đó với mọi số nguyên n và p , từ (*) ta có

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + \dots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq (\alpha^n + \alpha^{n+1} + \dots + \alpha^{n+p-1}) d(x_0, x_1) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Khi n đủ lớn và p tùy ý ta có $d(x_n, x_{n+p}) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) suy ra $(x_n)_n$ là dãy cơ bản trong không gian đầy đủ X nên tồn tại giới hạn $x^* = \lim_n x_n$.

Cũng từ (*), ta có

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^n d(x_0, x_1).$$

Cho $n \rightarrow \infty$ và nhớ rằng các hàm d và f liên tục, ta có

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, f(x_n)) = d(x^*, f(x^*)) \leq 0$$

hay $d(x^*, f(x^*)) = 0$

Vậy $f(x^*) = x^*$ tức là x^* là điểm bất động của f .

Nếu có $y \in X$ mà $f(y) = y$ thì
 $d(x^*, y) = d(f(x^*), f(y)) \leq \alpha d(x^*, y)$
 hay $(1-\alpha)d(x^*, y) \leq 0$
 Suy ra $d(x^*, y) = 0$ tức là $x^* = y$. Do đó điểm bất động x^* là duy nhất

4.5.3. Ví dụ.

a. Chứng minh phương trình

$$\frac{1}{2} \arctg x - x + 3 = 0$$

có một nghiệm thực duy nhất

Đặt $f(x) = \frac{1}{2} \arctg x + 3$ là hàm từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$, f là ánh xạ co vì $f(x) - f(y) = (x - y) \frac{1}{2(1+\xi^2)}$, với ξ nằm giữa x và y theo định lý Lagrange, nên
 $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2} |x - y|$. Do đó f có một điểm bất động với duy nhất x^* . Nói cách khác, phương trình $\frac{1}{2} \arctg x + 3 = x$ có nghiệm duy nhất là x^* .

b) Xét phương trình vi phân

$$(1) \frac{dx}{dy} = f(t, x) \text{ với điều kiện ban đầu}$$

$$(2) x(t_0) = x_0$$

trong đó $f(t, x)$ là hàm liên tục trong tập mở $G \subset \mathbb{R}^2$, $(t_0, x_0) \in G$ và f là thoả mãn điều kiện Lipschitz x , nghĩa là có một số dương k sao cho

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq K |x_1 - x_2| \quad (3)$$

với mọi $(t, x_1), (t, x_2) \in G$

Ta chứng minh định lý Picard: Trên một đoạn $|t - t_0| \leq r$ nào đó phương trình (1) có một nghiệm duy nhất thoả mãn điều kiện ban đầu (2).

Phương trình (1) với điều kiện (2) tương đương với phương trình tích phân sau đây

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau \quad (4)$$

Do G là tập mở chứa (t_0, x_0) nên có hình tròn (hình cầu) tâm (t_0, x_0) chứa trong G . Gọi

$$D = \{(t, x) \in G : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$$

là một hình chữ nhật đóng bất kỳ nội tiếp trong hình cầu đó. Vì $f(t, x)$ liên tục trên D nên $|f(t, x)| \leq L$ với mọi $(t, x) \in D$ với L là số dương nào đó. Lấy $0 < r <$

$\min\{\frac{1}{K}, \frac{b}{L}\}$ và kí hiệu C' là không gian con của $C[t_{0-r}, t_{0+r}]$ gồm các hàm số mà $|x(t) - x_0| \leq b$ với mọi $t \in [t_{0-r}, t_{0+r}] = I$. Nếu $(x_n) \subset C'$ và $x_n \rightarrow x$ thì do $|x_n(t) - x_0| \leq b$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ và $t \in I$ nên qua giới hạn, ta cũng có $|x(t) - x_0| \leq b$ với mọi $t \in I$. Như vậy C' đóng trong không gian đầy đủ $C[t_{0-r}, t_{0+r}]$ nên C' cũng phải đầy đủ.

Xét

$$P : C' \rightarrow C'$$

$$x \mapsto Px$$

xác định bởi

$$(Px)(t) = \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau + x_0$$

Với $|t - t_0| \leq r$

Ánh xạ P đặt như trên là hợp lý vì nếu $x(t) \in C'$ thì $P(x(t))$ liên tục, đồng thời

$$|P(x(t)) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau \right| \leq \int_{t_0}^t L d\tau \leq Lr \leq b$$

Hay $Px \in C'$. Mặt khác, nếu $x, y \in C'$ thì

$$|(Px)(t) - (Py)(t)| = \left| \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau)) d\tau \right|$$

$$\leq \int_{t_0}^t K |x(\tau) - y(\tau)| d\tau \leq K \int_{t_0}^t d(x, y) d\tau$$

(giả sử $t \geq t_0$, trường hợp $t < t_0$ lý luận tương tự).

Như thế

$$d(Px - Py) = \max_{t \in I} |Px(t) - Py(t)| \leq K |t - t_0| d(x, y) \leq Kr d(x, y).$$

Vì $Kr < 1$ nên P là ánh xạ co. Theo định lý Banach tồn tại một hàm số duy nhất $x(t) \in C'$ sao cho $Px(t) = x(t)$. Nói cách khác trên I bài toán (1) – (2) có nghiệm duy nhất.

4.6. Đầy đủ không gian metric.

Chúng ta đã thấy vai trò quan trọng của không gian metric đầy đủ qua các phần vừa xét ở trên. Do đó, với một khoảng không gian đầy đủ X ta hãy bao nó bằng một không gian đầy đủ X^* chứa X và X^* phải là không gian gọn nhất.

4.6.1. Định nghĩa. Giả sử X là một không gian metric. Không gian metric đầy đủ X^* được gọi là đầy đủ hóa (hay còn gọi là bổ sung) của X nếu:

- a. X là một không gian của X^*
- b. X trù mật khắp nơi trong X^*

4.6.2. Định lý. Mỗi không gian metric X đều có đầy đủ hoá X^* của nó. Hơn nữa, không đầy đủ hoá này là duy nhất theo định nghĩa nếu có không gian X'^* cũng thoả mãn a) và b) trong định nghĩa thì X^* và X'^* đẳng cự với nhau.

Chứng minh. Ta chia phép chứng minh làm nhiều bước

1. Xây dựng tập hợp X^* .

Ký hiệu X là tập hợp tất cả các dãy cơ bản trong X . Nếu (x_n) và (y_n) là hai phần tử của X , ta đặt

$$(x_n) \mathcal{R} (y_n) \text{ nếu } \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0$$

$\mathcal{R}$ là một quan hệ tương đương trên X vì các tính chất phản xạ, đối xứng thoả mãn một cách rõ ràng. Nếu

$$d(x_n, y_n) \rightarrow 0 \text{ và } d(y_n, z_n) \rightarrow 0$$

nên $\mathcal{R}$ thoả mãn tính chất bắc cầu, nghĩa là nếu $(x_n) \mathcal{R} (y_n)$ và $(x_n) \mathcal{R} (z_n)$ thì $(x_n) \mathcal{R} (z_n)$.

Ký hiệu X^* là tập thương của X theo quan hệ tương đương $\mathcal{R}$ vừa nêu trên

2. Xác định metric trong X^* :

Ký hiệu x^* và y^* là các phần tử trong X^* đó là những lớp tương đương các dãy cơ bản trong X . Chọn x^* và y^* các đại diện (x_n) và (y_n) rồi đặt

$$d(x^*, y^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) \quad (1)$$

Ta chứng minh tính đúng đắn của định nghĩa này tức là chứng minh giới hạn (1) tồn tại hữu hạn, không phụ thuộc vào việc chọn các đại diện $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in x^*$ và $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in y^*$ mà chỉ phụ thuộc vào các lớp tương đương x^* và y^* .

Thật vậy, ta có:

$$|d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n)| \leq d(x_m, x_n) + d(y_m, y_n) \rightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty)$$

(do áp dụng bất đẳng thức tứ giác và các dãy (x_n) và (y_n) là dãy cơ bản). Như vậy $(d(x_n, y_n))_n$ là một dãy cơ bản số thực nên phải hội tụ. Ngoài ra, nếu $(x_n') \in x^*$ và $(y_n') \in y^*$ thì

$$|d(x_m, y_m) - d(x_n', y_n')| \leq d(x_m, x_n') + d(y_m, y_n') \quad (2)$$

Vì $(x_n) \mathcal{R} (x_n')$ và $(y_n) \mathcal{R} (y_n')$ nên vế sau của (2) tiến về 0 khi $n \rightarrow \infty$ nghĩa là

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n', y_n')$$

Bây giờ ta kiểm tra 3 tiên đề của metric

- i) Ta có ngay là $d(x^*, y^*) \geq 0$ và $d(x^*, y^*) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0$ hay $(x_n) \mathcal{R} (y_n')$. Vậy

$$x^* = y^*$$

ii) Tiên đề 2) rõ ràng

iii) Nếu $x_n \in x^*$, $(y_n) \in x^*$ và $(z_n) \in x^*$ thì do

$$d(x_n, z_n) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)$$

nên chuyển qua giới hạn khi $n \rightarrow \infty$ ta được

$$d(x^*, z^*) \leq d(x^*, y^*) + d(y^*, z^*) \text{ với mọi } x^*, y^*, z^* \in X^*$$

Vậy (X^*, d) là một không gian mêtric

Với mỗi $x \in X$ ta đặt tương ứng với một lớp tương đương các dãy cơ bản x^+ chứa dãy dừng $(x, x, \dots) \in X$ gồm toàn phần tử x . Từ định nghĩa khoảng cách trong X^* ta có

$$d(x^+, y^+) = \lim_{x \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$$

Như thế ta xác định được một phép đẳng cự từ X lên một không gian con $X^+ = \{x^+ \in X^* : x^+ \ni (x, x, \dots), x \in X\}$ của X^* . Do đó ta đồng nhất X với X^+ với X^+ và như thế $X \subset X^*$.

3. X trù mật trong X^* :

Cho $x^* \in X^*$ và giả sử ε là số dương cho trước. Lấy $(x_n) \in x^*$. Vì (x_n) là dãy cơ bản trong X nên tồn tại n_0 sao cho khi $n \geq n_0$ ta có $d(x_n, x_{n_0}) < \varepsilon$

Xét phần tử $x_{n_0}^+ \in X^+ = X$ từ định nghĩa về khoảng cách trong X^* ta có

$$d(x_{n_0}^+, x^*) = \lim_{x \rightarrow \infty} d(x_{n_0}, x_n) \leq \varepsilon$$

Vậy $X^+ = X$ trù mật trong X^*

4. X^* là không gian mêtric đầy đủ:

Giả sử (x_n^*) là một dãy cơ bản trong X^* . Vì $\overline{X} = X^*$ nên với mỗi số nguyên $n > 0$ tồn tại $x_n \in X$ để $d(x_n, x_n^*) < \frac{1}{n}$. Khi đó

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_n^*) + d(x_n^*, x_m^*) + d(x_m^*, x_m) \\ &< \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + d(x_n^*, x_m^*) \end{aligned}$$

Vậy $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$ ($m, n \rightarrow \infty$) nên (x_n) là dãy cơ bản trong X tức là $(x_n) \in X$. Đặt x^* là lớp chứa dãy (x_n) thì $x^* \in X^*$, ta có:

$$\begin{aligned} d(x_n^*, x_n^*) &\leq d(x_n^*, x_n) + d(x_n, x^*) \\ &\leq \frac{1}{n} + d(x_n, x^*) \end{aligned}$$

Vì $(x_n, x_n, \dots) \in x_n^+$ và $(x_1, x_2, \dots) \in x^*$ nên

$$d(x_n, x^*) = \lim_{m \rightarrow \infty} d(x_n, x_m)$$

Vậy

$$d(x_n^*, x^*) \leq \frac{1}{n} + \lim_{m \rightarrow \infty} d(x_n, x_m)$$

Cho $m \rightarrow \infty$ ta được $d(x_n^*, x_n^*) \rightarrow 0$ hay $x_n^* \rightarrow x^*$

Như thế X^* là đầy đủ

5. Tính duy nhất (sai khác một phép đẳng cự) của đầy đủ hoá X^* của X .

Giả sử X'^* là một không gian metric đầy đủ và có các tính chất

i) $X \subset X'^*$ (X đẳng cự với một không gian con của X'^*)

ii) $\overline{X} = X'^*$

Ta hãy chứng minh X'^* đẳng cự với X^*

Lấy $x^* \in X^*$ khi ấy tồn tại $(x_n) \subset X$ sao cho $x_n \rightarrow x^*$. Đặt

$$\varphi : X^* \rightarrow X'^* \\ X^* \rightarrow X'^*$$

đây là phép đẳng cự phải tìm. Thật vậy φ là toàn ánh vì nếu $y'^* \in X'^*$ thì $y'^* = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ với $y_n \in X$ nên $y'^* = \varphi(y^*)$ với $y^* = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \in X^*$

Mặt khác

$$d(x^*, y^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) \text{ trong } X^*$$

và

$$d(x'^*, y'^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) \text{ trong } X'^*$$

nên

$$d(x^*, y^*) = d(x'^*, y'^*) = d(\varphi(x^*), \varphi(y^*))$$

Vậy φ là đơn ánh và từ các điều vừa chứng minh trên ta suy ra φ là phép đẳng cự. Định lý được chứng minh đầy đủ.

4.6.3. Ví dụ.

1. Tập hợp $\mathbf{Q}$ các số hữu tỉ là một không gian metric với khoảng cách:

$$d(x, y) = |x - y|; x, y \in \mathbf{Q}$$

Phương pháp xây dựng tập số thực $\mathbf{R}$ bằng dãy cơ bản các số hữu tỉ chính là đầy đủ hoá không gian metric $\mathbf{Q}$ như đã trình bày ở trên. Tuy nhiên trong $\mathbf{R}$ ta còn phải xây dựng các phép toán $+$ và $\cdot$ đồng thời phải kiểm nghiệm lại $\mathbf{R}$ là một trường liên tục.

2. Giả sử M là tập con của không gian metric đầy đủ X . Không gian đầy đủ hoá của không gian con M chính là $\overline{M}$.

3. Ta có $C_{[a,b]}^L$ là không gian metric không đầy đủ. Không gian đầy đủ hoá của nó ký hiệu là $L_{[a,b]}$ là tập hợp các hàm đo được xác định và khả tích theo nghĩa Lebesgue trên $[a,b]$ (lý thuyết tích phân Lebesgue sẽ học ở phần Lý thuyết độ đo và tích phân).

BÀI TẬP

4.1. Cho (X, d_X) và (Y, d_Y) là hai không gian metric. Chứng minh rằng không gian metric tích $X \times Y$ đầy đủ khi và chỉ khi các không gian X và Y là những không gian metric đầy đủ.

4.2. Ký hiệu m là tập hợp tất cả các dãy số thực bị chặn. Với $x = (x_n) \in m$, $y = (y_n) \in m$ đặt

$$d(x, y) = \sup_n |x_n - y_n|$$

Chứng minh

a) d là một metric

b) Không gian metric (m, d) là đầy đủ

4.3.* Trong không gian metric $C_{[0,1]}$ hãy xây dựng một dãy các tập đóng, bị chặn F_n sao cho $F_n \supset F_{n+1}$ nhưng $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$

4.4.* Cho X là không gian metric đầy đủ, Y_i là một dãy các tập con mở trù mật khắp nơi trong X . Chứng minh tập hợp $\bigcap_{n=1}^{\infty} Y_i$ cũng là tập trù mật khắp nơi trong X .

4.5. Ký hiệu s_0 là tập hợp tất cả các dãy số thực (x_n) sao cho x_n bằng 0 tất cả ngoại trừ số hữu hạn n . Ta xem s_0 là không gian metric con của không gian m . Chứng minh s_0 là không gian metric không đầy đủ.

4.6. Chứng minh rằng hàm liên tục $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + x - \arctg x$$

không có điểm bất động mặt dù nó thỏa mãn bất đẳng thức

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|$$

Với mọi $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$

4.7.* Cho F là họ các hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ có tính chất

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists M_x > 0)(\forall f \in F): |f(x)| \leq M_x$$

Chứng minh rằng tồn tại một tập mở khác trống $U \subset \mathbb{R}$ và một số dương M sao cho

$$|f(x)| \leq M$$

Với mọi $f \in F$ và $x \in U$

4.8. Cho $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm số liên tục đều. Chứng minh tồn tại các số $\alpha, \beta \geq 0$ sao cho với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có:

$$|f(x)| \leq \alpha |x| + \beta$$

4.9*. Trên tập số thực $\mathbb{R}$ ta đặt

$$d_1(x, y) = |\arctg x - \arctg y|$$

và

$$d_2(x, y) = |e^x - e^y|$$

Chứng minh

a) d_1, d_2 là các mêtric trên $\mathbb{R}$

b) $(\mathbb{R}, d_1), (\mathbb{R}, d_2)$ là các không gian mêtric không đầy đủ

c) Đầy đủ hoá các không gian $(\mathbb{R}, d_1), (\mathbb{R}, d_2)$ là gì?

Tailieu.vn

§5 KHÔNG GIAN COMPACT

Trong giải tích cổ điển, khi làm việc với các tập con của $\mathbb{R}$ ta đặc biệt chú ý đến khoảng đóng $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$. Khoảng đóng này có các tính chất tốt sau

Mọi dãy $(x_n) \subset [a, b]$ bao giờ cũng có một dãy con hội tụ trong $[a, b]$

Hàm số liên tục trên $[a, b]$ thì liên tục đều trên đoạn đó

Hàm số liên tục trên $[a, b]$ thì đạt được giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất trên đoạn này.

Tổng quát hoá sự kiện này cho không gian mêtric, người ta đưa ra khái niệm quan trọng đó là tập compact và không gian compact.

5.1. Tập hợp bị chặn và hoàn toàn bị chặn.

5.1.1. Định nghĩa. Cho X là không gian mêtric và $\emptyset \neq A \subset X$.

Đặt $\delta(A) = \sup_{x, y \in A} d(x, y)$ $\delta(A) = +\infty$ nếu tập hợp $\{d(x, y), x, y \in A\}$ không có

cận trên) và gọi $\delta(A)$ là đường kính của tập A

Nếu $\delta(A) < +\infty$ thì A gọi là tập bị chặn, còn $\delta(A) = +\infty$ thì A gọi là không bị chặn.

Ta có một số tính chất đơn giản sau

a) Tập hợp A là bị chặn nếu và chỉ nếu A được chứa trong một hình cầu nào đó

Thật vậy, giả sử $\delta(A) = \sup_{x, y \in A} d(x, y) = r < +\infty$. Lấy x_0 tùy ý thuộc A , lúc đó

với mọi $y \in A$, ta có $d(x_0, y) \leq r$ hay $A \subset B(x_0, r)$ với $r' > r$. Ngược lại, $A \subset B(x_0, r)$ thì $\forall x, y \in A$ có

$$d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(y, x_0) \leq 2r$$

Do đó $\delta(A) \leq 2r < +\infty$ nên A bị chặn

b. Hợp một số hữu hạn các tập bị chặn là tập bị chặn.

5.1.2. Định nghĩa. Tập $A \subset X$ gọi là hoàn toàn bị chặn (hay còn gọi là tiền compact) nếu với mọi $r > 0$, A được chứa trong hợp một số hữu hạn hình cầu có bán kính r . Lúc đó ta cũng nói tập A được phủ bởi một số hữu hạn hình cầu bán kính r .

Mệnh đề 1. Một tập hoàn toàn bị chặn thì bị chặn

Chứng minh. Thực vậy, cho A hoàn toàn bị chặn nên với $r = 1$, ta có hữu hạn hình cầu để $A \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, 1)$. Lấy $x \in A$ sẽ có i để $x \in B(a_i, 1)$

Lúc đó

$$\begin{aligned} d(x, a_1) &\leq d(x, a_i) + d(a_i, a_1) \\ &\leq d(x, a_i) + \sum_{i=1}^n d(a_i, a_1) \leq n \end{aligned}$$

Vậy A nằm trong $B(a_1, n)$. Ngược lại, nói chung không đúng. Tuy nhiên trong $\mathbb{R}^n$ ta có.

Mệnh đề 2: Giả sử A là một chặn trong $\mathbb{R}^n$ (với mêtric thông thường), khi đó A hoàn toàn bị chặn.

Chứng minh. Gọi $B(x_0, d)$ là hình cầu chứa A . Ta lấy một hình lập phương cạnh bằng $2d$ song song với các trục tọa độ và ngoại tiếp hình cầu này. Cho $r > 0$ ta chia hình lập phương này thành các hình lập phương nhỏ bởi các mặt phẳng song song với mặt hình lập phương lớn và cách nhau một đoạn $\alpha \leq \frac{r}{\sqrt{n}}$. Số các

hình lập phương nhỏ này là hữu hạn. Hiển nhiên A được chứa trong hợp hữu hạn các hình cầu bán kính $\leq r$, ngoại tiếp các hình lập phương nhỏ. Vậy A hoàn toàn bị chặn.

Chú ý rằng $\overline{B(a, r)} \in B'(a, r)$ và nếu $r' > r$ thì $B'(a, r) \subset B(a, r')$ do đó trong các định nghĩa về tập bị chặn và hoàn toàn bị chặn, ta có thể sử dụng tùy ý các hình cầu mở hoặc đóng

Mệnh đề 3. Nếu $A \subset X$ là hoàn toàn bị chặn thì bao đóng $\overline{A}$ của A cũng là một tập hợp hoàn toàn bị chặn

Chứng minh. Giả sử r là số dương cho trước. Nếu A hoàn toàn bị chặn thì có hữu hạn hình cầu đóng $B'(a_i, r)$ ($i = \overline{1, n}$) sao cho $A \subset \bigcup_{i=1}^n B(a_i, r)$. Nhưng do

$A \subset \bigcup_{i=1}^n B'(a_i, r)$ là một tập đóng nên $\overline{A} \subset \bigcup_{i=1}^n B'(a_i, r)$ nghĩa là $\overline{A}$ cũng hoàn toàn bị chặn.

5.2. Tập hợp compact và không gian compact:

5.2.1. Định nghĩa. Cho X là không gian mêtric và $A \subset X$. Tập A được gọi là compact nếu dãy $(x_n) \subset A$ luôn luôn tồn tại một dãy con $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ hội tụ một điểm $x \in A$

Nếu bản thân X là compact thì không gian X được gọi là không gian compact

Giả sử $A \subset X$ mà bao đóng $\bar{A}$ là compact thì A được gọi là tập compact tương đối. Điều này tương đương với:

Mọi dãy tùy ý $(x_n) \subset A$ sẽ có một dãy con hội tụ đến một điểm trong X (không đòi hỏi thuộc A).

Thật vậy, điều kiện cần rõ. Ngược lại nếu $(x_n)_n$ là dãy trong $\bar{A}$ với mỗi $x \in \bar{A}$ ta chọn $y_n \in A$ sao cho $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$. Theo giả thiết tồn tại dãy con $(y_{n_k}) \subset (y_n)$ hội tụ về $y_0 \in X$. Vì $(y_{n_k}) \subset A$ nên $y_0 \in \bar{A}$.

Lúc đó

$$d(x_{n_k}, y_0) \leq d(x_{n_k}, y_{n_k}) + d(y_{n_k}, y_0) < \frac{1}{n_k} + d(y_{n_k}, y_0) \rightarrow 0$$

Vậy dãy con (x_{n_k}) của (x_n) hội tụ đến $y_0 \in \bar{A}$ nên $\bar{A}$ compact.

5.2.2. Ví dụ.

1) Trong không gian mêtric X bất kỳ, mọi tập gồm một số hữu hạn điểm là compact.

Chứng minh. Giả sử $A = \{a_1, \dots, a_k\} \subset X$. Nếu dãy (x_n) là một dãy bất kỳ trong A thì phải có ít nhất một a_i nào đó $x_n = a_i$ với vô hạn $n \in \mathbb{N}$. Từ tập vô hạn các x_n này ta rút ra một dãy con hội tụ đến a_i .

2) Đoạn $[a, b]$ trong $\mathbb{R}$ là một compact. Điều này suy ra từ định lý Bolzano – Weierstrass.

5.2.3. Định lý (Hausdorff). Giả sử $A \subset X$ là tập compact. Khi đó A là đóng và hoàn toàn bị chặn. Ngược lại nếu A đóng, hoàn toàn bị chặn và x đầy đủ thì A là tập compact.

Chứng minh

1) Giả sử A compact. Nếu (x_n) là dãy trong A , $x_n \rightarrow x_0$ thì tồn tại dãy con $(x_{n_k}) \subset (x_n)$, $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in A$ vì compact. Vậy $A = \bar{A}$ hay đóng. Tiếp theo, ta dùng phản chứng. Giả sử A compact nhưng không hoàn toàn bị chặn. Khi đó có $\varepsilon > 0$ sao cho không thể phủ được A bằng một số hữu hạn hình cầu bán kính ε . Lấy $x_1 \in A$. Hình cầu $B(x_1, \varepsilon)$ không phủ được A nên có $x_2 \in A$ sao cho $d(x_2, x_1) \geq \varepsilon$. Các hình cầu $B(x_1, \varepsilon)$, $B(x_2, \varepsilon)$ cũng không phủ được A nên có $x_3 \in A$ sao cho $d(x_3, x_1) \geq \varepsilon$ và $d(x_3, x_2) \geq \varepsilon$. Tiếp tục cách này bằng quy nạp, ta xây dựng được dãy $(x_n) \subset A$ với $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ với mọi $n \neq m$. Bất cứ dãy con nào của dãy (x_n) đều không phải là dãy cơ bản (vì khoảng cách giữa hai phần tử của dãy con này $\geq \varepsilon$) nên không thể hội tụ. Điều này mâu thuẫn với định nghĩa compact. Vậy ta đã chứng minh nếu A compact thì A đóng và hoàn toàn bị chặn.

2) Bây giờ giả sử X đầy đủ, A đóng và hoàn toàn bị chặn trong X . Lấy một dãy (x_n) bất kỳ trong A . Vì A được phủ bằng một số hữu hạn các hình cầu bán kính bằng 1 nên một trong các hình cầu đó, kí hiệu B_1 chứa vô số các phần tử

của dãy (x_n) . Gọi dãy con của dãy (x_n) trích ra từ vô số phần tử đó là (x_n^1) . Tập A cũng phủ được bằng một số hữu hạn hình cầu bán kính $\frac{1}{2}$ nên có một cầu kí hiệu B_2 có vô số các (x_n^1) và dãy con của (x_n^1) chứa trong B_2 là (x_n^2) . Tiếp tục quá trình này ta thu được một dãy các dãy $(x_n), (x_n^1), (x_n^2), \dots$ mà các dãy sau là dãy con của dãy đi trước đồng thời dãy con (x_n^k) chứa trong hình cầu B_k có bán kính $\frac{1}{k}$. Lấy một phần tử x_{n_1} trong (x_n^1) . Vì (x_n^2) vô hạn nên chọn được n_2 trong các (x_n^2) sao cho $n_2 > n_1$ và rồi chọn x_{n_3} trong (x_n^3) với $n_3 > n_2 \dots$. Như thế ta có được dãy con $(x_{n_k}) \subset (x_n)$. Đây là dãy cơ bản vì với $k, l \in \mathbb{N}$ bất kỳ, giả sử $k \geq l$ thì $(x_{n_k}^k) \subset (x_{n_l}^1)$ nên x_{n_k}, x_{n_l} cùng thuộc hình cầu B_l . Do đó $d(x_{n_k}, x_{n_l}) \leq \frac{2}{l} \rightarrow 0$ khi $k, l \rightarrow \infty$. Vì X đầy đủ, dãy (x_{n_k}) hội tụ đến $x_0 \in X$. Hơn nữa do A đóng nên $x_0 \in A$. Vậy A compact.

5.2.4 Định lý. Nếu X là một không gian compact thì X đầy đủ và khả ly.

Chứng minh.

a) Giả sử (x_n) là dãy cơ bản trong X . Vì X compact nên có dãy con $(x_{n_k}) \subset (x_n)$, $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in X$. Nhưng khi đó chính dãy (x_n) cũng hội tụ về x_0 nên X là không gian đầy đủ.

b) Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, tập A được phủ bằng một số hữu hạn hình cầu $B(x_{n_j}, \frac{1}{n})$, $j = 1, \dots, m_n$:

$$X = \bigcup_{j=1}^{m_n} B(x_{n_j}, \frac{1}{n}) \quad (*)$$

Đặt $A = \{x_{n_j} : j = 1, \dots, m_n, n = 1, 2, \dots\}$ là tập hợp tất cả các tâm các hình cầu này. A là tập đếm được. Mặt khác $\forall x \in X$ với $\varepsilon > 0$ bất kỳ ta lấy n đủ lớn để $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Từ (*), suy ra x thuộc một hình cầu $B(x_{n_j}, \frac{1}{n})$ nào đó nên $d(x, x_{n_j}) < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Vậy A trù mật trong X là không gian mêtric khả ly.

Nhận xét: Từ định nghĩa ta thấy A là một compact khi và chỉ khi chính không gian con A là không gian compact. Vì thế khi phát biểu về các tính chất compact, ta không cần phân biệt compact hoặc không gian (con), ta không cần phân biệt tập compact hoặc không gian (con) compact.

5.2.5. Hệ quả

1. Mọi tập compact đều bị chặn
2. Tập con đóng của tập compact là compact

3. Đối với các tập đóng $\mathbb{R}^n$, các khái niệm bị chặn, hoàn toàn bị chặn, compact là tương đương với nhau.

Chứng minh:

1. Rõ ràng mỗi tập compact thì hoàn toàn bị chặn nên bị chặn.

2. Nếu K chứa trong A compact thì K hoàn toàn bị chặn. Hơn nữa K đóng trong A đầy đủ nên K compact. (Ở đây vì A đóng nên K đóng trong không gian con A hay đóng trong X đều như nhau).

3. Theo mệnh đề 2 ở 5.1.2, tập $A \subset \mathbb{R}^n$ bị chặn nếu và chỉ nếu A hoàn toàn bị chặn. Hơn nữa $\mathbb{R}^n$ là không gian đầy đủ nên áp dụng định lý Hausdorff ta có ngay kết quả.

5.2.6. Khái niệm ε -lưới:

Để diễn tả khái niệm hoàn toàn bị chặn, bên cạnh dùng hữu hạn hình cầu phủ tập đã cho ta còn dùng khái niệm ε -lưới, tỏ ra khá thuận tiện cho trong một số trường hợp.

a) Định nghĩa. Cho tập $A \subset X$ và số $\varepsilon > 0$. Tập $N \subset X$ được gọi là một ε -lưới cho A nếu mọi $x \in A$ tìm được $y \in N$ để $d(x, y) < \varepsilon$.

Nhận xét. A có một ε -lưới N khi và chỉ khi A được phủ bằng họ các hình cầu bán kính ε với tâm là các điểm mắt lưới (tức là các điểm thuộc N). Vì vậy ta có thể phát biểu lại.

Tập $A \subset X$ là hoàn toàn bị chặn nếu $\forall \varepsilon > 0$ có thể được tìm cho A một ε -lưới hữu hạn N (tức là tập N có hữu hạn điểm).

b) Hệ quả. Trong không gian metric đầy đủ X , tập đóng $A \subset X$ là compact nếu với mọi $\varepsilon > 0$ ta có thể tìm cho nó một ε -lưới compact.

Chứng minh. Cho $\varepsilon > 0$. Theo giả thiết, tồn tại $\frac{\varepsilon}{2}$ -lưới compact B và cho A

và do B compact nên tồn tại $\frac{\varepsilon}{2}$ -lưới hữu hạn N cho B . Khi đó N chính là ε -lưới

cho A vì với $x \in A$ tồn tại $b \in B$ để $d(x, b) < \frac{\varepsilon}{2}$ và với b này sẽ có $y \in N$ để $d(y, b)$

$< \frac{\varepsilon}{2}$. Lúc đó $d(x, y) \leq d(x, b) + d(b, y) < \varepsilon$. Vậy A hoàn toàn bị chặn. Áp dụng định

lý Hausdorff, ta có kết luận của hệ quả.

5.3. Compact với phủ mở:

5.3.1. Định nghĩa. Cho X là một không gian metric và $A \subset X$. Họ $(G_\alpha)_{\alpha \in I}$ các tập con của X được gọi là một phủ của A nếu $A \subset \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$. Nếu với mọi $\alpha \in I$,

A_α là các tập mở thì $(G_\alpha)_{\alpha \in I}$ gọi là phủ mở và nếu I là tập hữu hạn thì gọi là phủ hữu hạn. Nếu tồn tại tập con $J \subset I$ sao cho $(G_\alpha)_{\alpha \in J}$ vẫn là phủ của A thì $(G_\alpha)_{\alpha \in J}$ gọi là phủ con của A .

5.3.2. Định lý. (Heine- Borel) Để tập con A của không gian metric X là compact, điều kiện cần và đủ là với mọi phủ mở $(G_\alpha)_{\alpha \in I}$ của A đều có chứa một phủ con hữu hạn.

Chứng minh. Điều kiện đủ. Giả sử bất kỳ phủ mở nào của A đều có phủ con hữu hạn nhưng A không compact. Vì thế tồn tại một dãy $(x_n) \subset A$ sao cho $x_n \neq x_{n'}$, khi $n \neq n'$ nhưng không có dãy con nào hội tụ cả. Do mọi $x \in A$ không là giới hạn của dãy con nào của dãy (x_n) nên tồn tại một hình cầu mở B_x tâm x bán kính r_x chỉ chứa hữu hạn các x_n . Họ $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$ là một phủ mở của A nên theo giả thiết có phủ con hữu hạn : $A \subset \bigcup_{i=1}^k B_{x_i}$. Mỗi hình cầu B_{x_i} , $i = 1, \dots, k$ chỉ chứa số

hữu hạn x_n nên hoá ra (x_n) chỉ có hữu hạn các phần tử riêng biệt. Điều này vô lý nên A phải là tập compact

Điều kiện cần. Cho A compact và giả sử có một phủ mở $(G_\alpha)_{\alpha \in I}$ của A nhưng không chứa phủ con hữu hạn. Lấy một dãy số dương $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Vì A compact nên phủ được bằng một số hữu hạn hình cầu đóng bán kính ε_1 . Trong các hình cầu đóng này phải có một cái, tạm kí hiệu là B_1 sao cho $A_1 = A \cap B_1$ không thể phủ được bằng một số hữu hạn các tập G_α (nếu khác đi, A sẽ phủ được bằng một số hữu hạn các tập G_α trái với giả thiết phản chứng). A_1 là tập đóng chứa trong tập compact A nên A_1 cũng compact và lại được phủ bằng một số hữu hạn hình cầu đóng bán kính ε_2 , trong số đó có một cái kí hiệu B_2 sao cho $A_2 = A_1 \cap B_2$ không thể phủ được bằng một số hữu hạn các tập G_α . Tập A_2 cũng compact nên cũng được phủ bởi hữu hạn hình cầu bán kính $\varepsilon_3 \dots$. Tiếp tục quá trình này, ta thu được một dãy hình cầu đóng B_n và các tập $A_n = A_{n-1} \cap B_n$, $n = 1, 2, \dots$. Trong mỗi tập A_n ta lấy ra một điểm x_n . Do $A_n \subset A_{n-1} \subset \dots \subset A$ nên (x_n) là dãy trong A , sẽ có dãy con $(x_{nk}) \subset (x_n)$ hội tụ đến $x_0 \in A$. Mặt khác $A \subset \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$ nên có $\alpha_0 \in I$

để $\alpha_0 \in G_{\alpha_0}$. Vì G_{α_0} mở nên có hình cầu $B(x_0, r) \subset G_{\alpha_0}$. Từ $d(x_{nk}, x_0) \rightarrow 0$ và $\varepsilon_{nk} \rightarrow 0$ khi $k \rightarrow \infty$, chọn k_0 đủ lớn ta sẽ có $d(x_{nk_0}, x_0) < r/2$ và $\varepsilon_{nk_0} < r/4$. Lúc ấy với mọi $x \in A_{nk_0}$ ta có

$$d(x, x_0) \leq d(x, x_{nk_0}) + d(x_{nk_0}, x_0) \leq 2\varepsilon_{nk_0} + r/2 < r$$

tức là $A_{nk_0} \subset B(x_0, r) \subset G_{\alpha_0}$ nghĩa là có tập A_{nk_0} được phủ bằng một G_{α_0} , trái với cách xây dựng các tập A_n . Mâu thuẫn này chứng tỏ mọi phủ mở của A phải có một phủ con hữu hạn. Định lý được chứng minh đầy đủ.