CHƯƠNG I

GIỚI THIỆU CHUNG VỀ ROBOT CÔNG NGHIỆP

1.1. Sơ lược quá trình phát triển của robot công nghiệp (IR : Industrial Robot) :

Thuật ngữ "Robot" xuất phát từ tiếng Sec (Czech) "Robota" có nghĩa là công việc tạp dịch trong vở kịch *Rossum's Universal Robots* của Karel Capek, vào năm 1921. Trong vở kịch nầy, Rossum và con trai của ông ta đã chế tạo ra những chiếc máy gần giống với con người để phục vụ con người. Có lẽ đó là một gợi ý ban đầu cho các nhà sáng chế kỹ thuật về những cơ cấu, máy móc bắt chước các hoạt động cơ bắp của con người.

Đầu thập kỷ 60, công ty Mỹ AMF (American Machine and Foundry Company) quảng cáo một loại máy tự động vạn năng và gọi là "Người máy công nghiệp" (Industrial Robot). Ngày nay người ta đặt tên người máy công nghiệp (hay robot công nghiệp) cho những loại thiết bị có dáng dấp và một vài chức năng như tay người được điều khiển tự động để thực hiện một số thao tác sản xuất.

Về mặt kỹ thuật, những robot công nghiệp ngày nay, có nguồn gốc từ hai lĩnh vực kỹ thuật ra đời sớm hơn đó là các cơ cấu điều khiển từ xa (Teleoperators) và các máy công cụ điều khiển số (NC - Numerically Controlled machine tool).

Các cơ cấu điều khiển từ xa (hay các thiết bị kiểu chủ-tớ) đã phát triển mạnh trong chiến tranh thế giới lần thứ hai nhằm nghiên cứu các vật liệu phóng xạ. Người thao tác được tách biệt khỏi khu vực phóng xạ bởi một bức tường có một hoặc vài cửa quan sát để có thể nhìn thấy được công việc bên trong. Các cơ cấu điều khiển từ xa thay thế cho cánh tay của người thao tác; nó gồm có một bộ kẹp ở bên trong (tớ) và hai tay cầm ở bên ngoài (chủ). Cả hai, tay cầm và bộ kẹp, được nối với nhau bằng một cơ cấu sáu bậc tự do để tạo ra các vị trí và hướng tuỳ ý của tay cầm và bộ kẹp. Cơ cấu dùng để điều khiển bộ kẹp theo chuyển động của tay cầm.

Vào khoảng năm 1949, các máy công cụ điều khiển số ra đời, nhằm đáp ứng yêu cầu gia công các chi tiết trong ngành chế tạo máy bay. *Những robot đầu tiên thực chất là sự nối kết giữa các khâu cơ khí của cơ cấu điều khiển từ xa với khả năng lập trình của máy công cụ điều khiển số.*

Dưới đây chúng ta sẽ điểm qua một số thời điểm lịch sử phát triển của người máy công nghiệp. Một trong những robot công nghiệp đầu tiên được chế tạo là robot Versatran của công ty AMF, Mỹ. Cũng vào khoảng thời gian nầy ở Mỹ xuất hiện loại robot Unimate -1900 được dùng đầu tiên trong kỹ nghệ ôtô.

Tiếp theo Mỹ, các nước khác bắt đầu sản xuất robot công nghiệp : Anh -1967, Thuỵ Điển và Nhật -1968 theo bản quyền của Mỹ; CHLB Đức -1971; Pháp - 1972; ở Ý - 1973. . .

Tính năng làm việc của robot ngày càng được nâng cao, nhất là khả năng nhận biết và xử lý. Năm 1967 ở trường Đại học tổng hợp Stanford (Mỹ) đã chế tạo ra mẫu robot hoạt động theo mô hình "mắt-tay", có khả năng nhận biết và định hướng bàn kẹp theo vị trí vật kẹp nhờ các cảm biến. Năm 1974 Công ty Mỹ Cincinnati đưa ra loại robot được điều khiển bằng máy vi tính, gọi là robot T3 (The Tomorrow Tool : Công cụ của tương lai). Robot nầy có thể nâng được vật có khối lượng đến 40 KG.

Có thể nói, Robot là sự tổ hợp khả năng hoạt động linh hoạt của các cơ cấu điều khiển từ xa với mức độ "tri thức" ngày càng phong phú của hệ thống điều khiển theo chương trình số cũng như kỹ thuật chế tạo các bộ cảm biến, công nghệ lập trình và các phát triển của trí khôn nhân tạo, hệ chuyên gia ...

Trong những năm sau nầy, việc nâng cao tính năng hoạt động của robot không ngừng phát triển. Các robot được trang bị thêm các loại cảm biến khác nhau để nhận biết môi trường chung quanh, cùng với những thành tựu to lớn trong lĩnh vực Tin học - Điện tử đã tạo ra các thế hệ robot với nhiều tính năng đăc biệt, Số lượng robot ngày càng gia tăng, giá thành ngày càng giảm. Nhờ vậy, robot công nghiệp đã có vị trí quan trọng trong các dây chuyền sản xuất hiện đại.

Một vài số liệu về số lượng robot được sản xuất ở một vài nước công nghiệp phát triển như sau :

(Bảng I.1)

Nước SX	**Năm 1990**	**Năm 1994**	**Năm 1998 (*Dự tính*)**
Nhật	60.118	29.756	67.000
Mỹ	4.327	7.634	11.100
Đức	5.845	5.125	8.600
Ý	2.500	2.408	4.000
Pháp	1.488	1.197	2.000
Anh	510	1.086	1.500
Hàn quốc	1.000	1.200	

Mỹ là nước đầu tiên phát minh ra robot, nhưng nước phát triển cao nhất trong lĩnh vực nghiên cứu chế tạo và sử dụng robot lại là Nhật.

1.2. Ứng dụng robot công nghiệp trong sản xuất :

Từ khi mới ra đời robot công nghiệp được áp dụng trong nhiều lĩnh vực dưới góc độ thay thế sức người. Nhờ vậy các dây chuyền sản xuất được tổ chức lại, năng suất và hiệu quả sản xuất tăng lên rõ rệt.

Mục tiêu ứng dụng robot công nghiệp nhằm góp phần nâng cao năng suất dây chuyền công nghệ, giảm giá thành, nâng cao chất lượng và khả năng cạnh tranh của sản phẩm đồng thời cải thiện điều kiện lao động. Đạt được các mục tiêu trên là nhờ vào những khả năng to lớn của robot như : làm việc không biết mệt mỏi, rất dễ dàng chuyển nghề một cách thành thạo, chịu được phóng xạ và các môi trường làm việc độc hại, nhiệt độ cao, “cảm thấy” được cả từ trường và “nghe” được cả siêu âm ... Robot được dùng thay thế con người trong các trường hợp trên hoặc thực hiện các công việc tuy không nặng nhọc nhưng đơn điệu, dễ gây mệt mõi, nhầm lẫn.

Trong ngành cơ khí, robot được sử dụng nhiều trong công nghệ đúc, công nghệ hàn, cắt kim loại, sơn, phun phủ kim loại, tháo lắp vận chuyển phôi, lắp ráp sản phẩm . . .

Ngày nay đã xuất hiện nhiều dây chuyền sản xuất tự động gồm các máy CNC với Robot công nghiệp, các dây chuyền đó đạt mức tự động hoá cao, mức độ linh hoạt cao . . . ở đây các máy và robot được điều khiển bằng cùng một hệ thống chương trình.

Ngoài các phân xưởng, nhà máy, kỹ thuật robot cũng được sử dụng trong việc khai thác thềm lục địa và đại dương, trong y học, sử dụng trong quốc phòng, trong chinh phục vũ trụ, trong công nghiệp nguyên tử, trong các lĩnh vực xã hội . . .

Rõ ràng là khả năng làm việc của robot trong một số điều kiện vượt hơn khả năng của con người; do đó nó là phương tiện hữu hiệu để tự động hoá, nâng cao năng suất lao động, giảm nhẹ cho con người những công việc nặng nhọc và độc hại. Nhược điểm lớn nhất của robot là chưa linh hoạt như con người, trong dây chuyền tự động, nếu có một robot bị hỏng có thể làm ngừng hoạt động của cả dây chuyền, cho nên robot vẫn luôn hoạt động dưới sự giám sát của con người.

1.3. Các khái niệm và định nghĩa về robot công nghiệp :

1.3.1. *Định nghĩa robot công nghiệp* :

Hiện nay có nhiều định nghĩa về Robot, có thể điểm qua một số định nghĩa như sau :

Định nghĩa theo tiêu chuẩn AFNOR (Pháp) :

Robot công nghiệp là một cơ cấu chuyển động tự động có thể lập trình, lặp lại các chương trình, tổng hợp các chương trình đặt ra trên các trục toạ độ; có khả năng định vị, định hướng, di chuyển các đối tượng vật chất : chi tiết, dao cụ, gá lắp . . . theo những hành trình thay đổi đã chương trình hoá nhằm thực hiện các nhiệm vụ công nghệ khác nhau.

Định nghĩa theo RIA (Robot institute of America) :

Robot là một tay máy vạn năng có thể lặp lại các chương trình được thiết kế để di chuyển vật liệu, chi tiết, dụng cụ hoặc các thiết bị chuyên dùng thông qua các chương trình chuyển động có thể thay đổi để hoàn thành các nhiệm vụ khác nhau.

Định nghĩa theo ГОСТ 25686-85 (Nga) :

Robot công nghiệp là một máy tự động, được đặt cố định hoặc di động được, liên kết giữa một tay máy và một hệ thống điều khiển theo chương trình, có thể lập trình lại để hoàn thành các chức năng vận động và điều khiển trong quá trình sản xuất.

Có thể nói Robot công nghiệp là một máy tự động linh hoạt thay thế từng phần hoặc toàn bộ các hoạt động cơ bắp và hoạt động trí tuệ của con người trong nhiều khả năng thích nghi khác nhau.

Robot công nghiệp có khả năng chương trình hoá linh hoạt trên nhiều trục chuyển động, biểu thị cho số bậc tự do của chúng. Robot công nghiệp được trang bị những bàn tay máy hoặc các cơ cấu chấp hành, giải quyết những nhiệm vụ xác định trong các quá trình công nghệ : hoặc trực tiếp tham gia thực hiện các nguyên công (sơn, hàn, phun phủ, rót kim loại vào khuôn đúc, lắp ráp máy . . .) hoặc phục vụ các quá trình công nghệ (tháo lắp chi tiết gia công, dao cụ, đồ gá . . .) với những thao tác cầm nắm, vận chuyển và trao đổi các đối tượng với các trạm công nghệ, trong một hệ thống máy tự động linh hoạt, được gọi là "Hệ thống tự động linh hoạt robot hoá" cho phép thích ứng nhanh và thao tác đơn giản khi nhiệm vụ sản xuất thay đổi.

1.3.2. *Bậc tự do của robot* (DOF : Degrees Of Freedom) :

Bậc tự do là số khả năng chuyển động của một cơ cấu (chuyển động quay hoặc tịnh tiến). Để dịch chuyển được một vật thể trong không gian, cơ cấu chấp hành của robot phải đạt được một số bậc tự do. Nói chung cơ hệ của robot là một cơ cấu hở, do đó bậc tự do của nó có thể tính theo công thức :

$$\mathrm{w} = 6n - \sum_{i=1}^{5} i p_i \tag{1.1}$$

ở đây : n - Số khâu động;

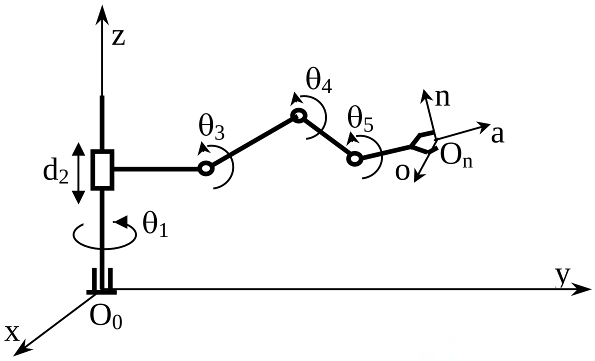
p_i - Số khớp loại i (i = 1,2,. . .,5 : Số bậc tự do bị hạn chế).

Đối với các cơ cấu có các khâu được nối với nhau bằng khớp quay hoặc tịnh tiến (khớp động loại 5) thì số bậc tự do bằng với số khâu động . Đối với cơ cấu hở, số bậc tự do bằng tổng số bậc tự do của các khớp động.

Để định vị và định hướng khâu chấp hành cuối một cách tuỳ ý trong không gian 3 chiều robot cần có 6 bậc tự do, trong đó 3 bậc tự do để định vị và 3 bậc tự do để định hướng. Một số công việc đơn giản nâng hạ, sắp xếp... có thể yêu cầu số bậc tự do ít hơn. Các robot hàn, sơn... thường yêu cầu 6 bậc tự do. Trong một số trường hợp cần sự khéo léo, linh hoạt hoặc khi cần phải tối ưu hoá quỹ đạo,... người ta dùng robot với số bậc tự do lớn hơn 6.

1.3.3. *Hệ toạ độ* (Coordinate frames) :

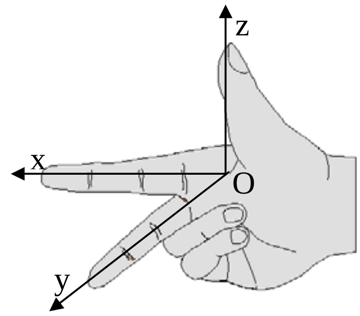
Mỗi robot thường bao gồm nhiều khâu (links) liên kết với nhau qua các khớp (joints), tạo thành một xích động học xuất phát từ một khâu cơ bản (base) đứng yên. Hệ toạ độ gắn với khâu cơ bản gọi là hệ toạ độ cơ bản (hay hệ toạ độ chuẩn). Các hệ toạ độ trung gian khác gắn với các khâu động gọi là hệ toạ độ suy rộng. Trong từng thời điểm hoạt động, các *toạ độ suy rộng* xác định cấu hình của robot bằng các chuyển dịch dài hoặc các chuyển dịch góc cuả các khớp tịnh tiến hoặc khớp quay (hình 1.1). Các toạ độ suy rộng còn được gọi là biến khớp.



Hình 1.1 : Các toạ độ suy rộng của robot.

Các hệ toạ độ gắn trên các khâu của robot phải tuân theo qui tắc bàn tay phải : Dùng tay phải, nắm hai ngón tay út và áp út vào lòng bàn tay, xoè 3 ngón : cái, trỏ và giữa theo 3 phương vuông góc nhau, nếu chọn ngón cái là phương và chiều của trục z, thì ngón trỏ chỉ phương, chiều của trục x và ngón giữa sẽ biểu thị phương, chiều của trục y (hình 1.2).

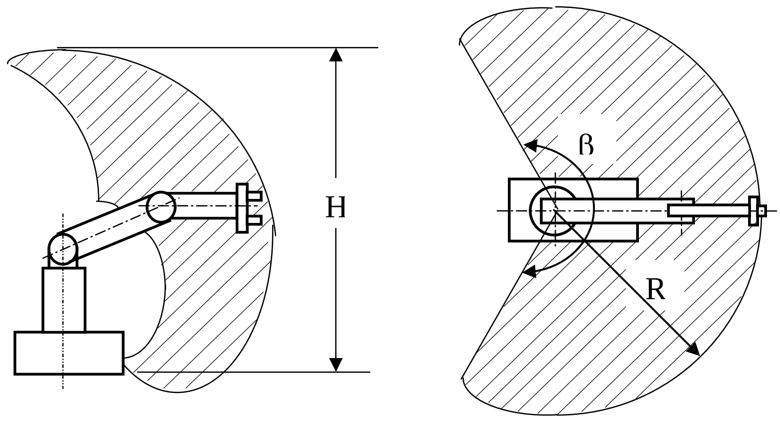
Trong robot ta thường dùng chữ O và chỉ số n để chỉ hệ toạ độ gắn trên khâu thứ n. Như vậy hệ toạ độ cơ bản (Hệ toạ độ gắn với khâu cố định) sẽ được ký hiệu là O_0; hệ toạ độ gắn trên các khâu trung gian tương ứng sẽ là O_1, O_2,..., O_{n-1}, Hệ toạ độ gắn trên khâu chấp hành cuối ký hiệu là O_n.



Hình 1.2 : Qui tắc bàn tay phải

1.3.4. *Trường công tác của robot* (Workspace or Range of motion):

Trường công tác (hay vùng làm việc, không gian công tác) của robot là toàn bộ thể tích được quét bởi khâu chấp hành cuối khi robot thực hiện tất cả các chuyển động có thể. Trường công tác bị ràng buộc bởi các thông số hình học của robot cũng như các ràng buộc cơ học của các khớp; ví dụ, một khớp quay có chuyển động nhỏ hơn một góc 360^0. Người ta thường dùng hai hình chiếu để mô tả trường công tác của một robot (hình 1.3).



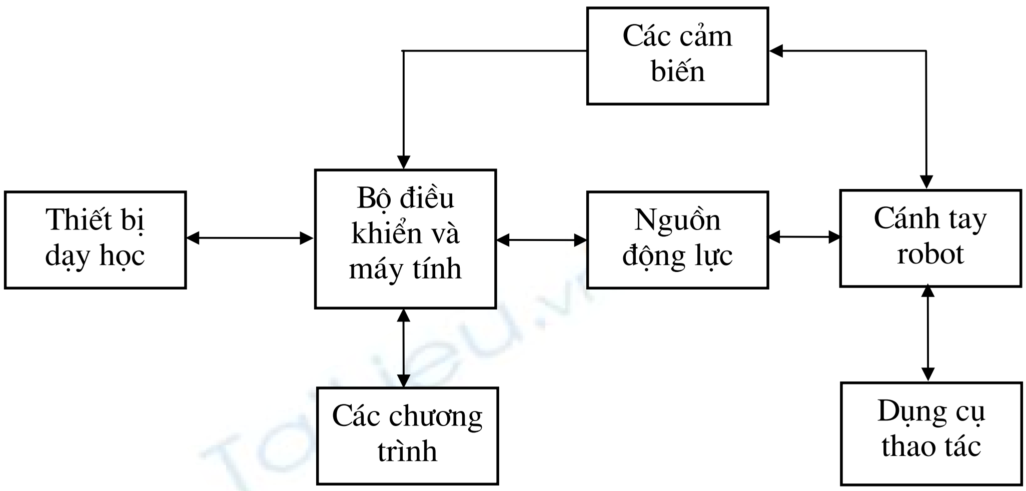
Hình chiếu đứng Hình chiếu bằng

Hình 1.3 : Biểu diễn trường công tác của robot.

1.4. Cấu trúc cơ bản của robot công nghiệp :

1.4.1. Các thành phần chính của robot công nghiệp :

Một robot công nghiệp thường bao gồm các thành phần chính như : cánh tay robot, nguồn động lực, dụng cụ gắn lên khâu chấp hành cuối, các cảm biến, bộ điều khiển , thiết bị dạy học, máy tính ... các phần mềm lập trình cũng nên được coi là một thành phần của hệ thống robot. Mối quan hệ giữa các thành phần trong robot như hình 1.4.



Hình 1.4 : Các thành phần chính của hệ thống robot.

Cánh tay robot (tay máy) là kết cấu cơ khí gồm các khâu liên kết với nhau bằng các khớp động để có thể tạo nên những chuyển động cơ bản của robot.

Nguồn động lực là các động cơ điện (một chiều hoặc động cơ bước), các hệ thống xy lanh khí nén, thuỷ lực để tạo động lực cho tay máy hoạt động.

Dụng cụ thao tác được gắn trên khâu cuối của robot, dụng cụ của robot có thể có nhiều kiểu khác nhau như : dạng bàn tay để nắm bắt đối tượng hoặc các công cụ làm việc như mỏ hàn, đá mài, đầu phun sơn ...

Thiết bị dạy-hoc (Teach-Pendant) dùng để dạy cho robot các thao tác cần thiết theo yêu cầu của quá trình làm việc, sau đó robot tự lặp lại các động tác đã được dạy để làm việc (phương pháp lập trình kiểu dạy học).

Các phần mềm để lập trình và các chương trình điều khiển robot được cài đặt trên máy tính, dùng điều khiển robot thông qua bộ điều khiển (Controller). Bộ điều khiển còn được gọi là Mođun điều khiển (hay Unit, Driver), nó thường được kết nối với máy tính. Một mođun điều khiển có thể còn có các cổng Vào - Ra (I/O port) để làm việc với nhiều thiết bị khác nhau như các cảm biến giúp robot nhận biết trạng thái của bản thân, xác định vị trí của đối tượng làm việc hoặc các dò tìm khác; điều khiển các băng tải hoặc cơ cấu cấp phôi hoạt động phối hợp với robot ...

1.4.2. Kết cấu của tay máy :

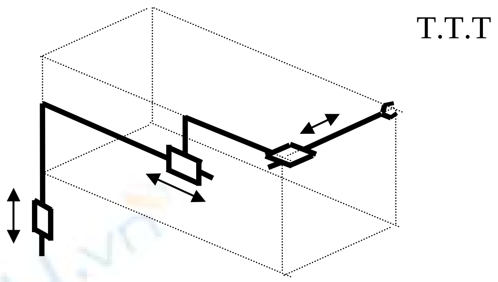
Như đã nói trên, tay máy là thành phần quan trọng, nó quyết định khả năng làm việc của robot. Các kết cấu của nhiều tay máy được phỏng theo cấu tạo và chức năng của tay người; tuy nhiên ngày nay, tay máy được thiết kế rất đa dạng, nhiều cánh tay robot có hình dáng rất khác xa cánh tay người. Trong thiết kế và sử dụng tay máy, chúng ta cần quan tâm đến các thông số hình - động học, là những thông số liên quan đến khả năng làm việc của robot như : tầm với (hay trường công tác), số bậc tự do (thể hiện sự khéo léo linh hoạt của robot), độ cứng vững, tải trọng vật nâng, lực kẹp . . .

Các khâu của robot thường thực hiện hai chuyển động cơ bản :

- Chuyển động tịnh tiến theo hướng x,y,z trong không gian Descarde, thông thường tạo nên các hình khối, các chuyển động nầy thường ký hiệu là T (Translation) hoặc P (Prismatic).
- Chuyển động quay quanh các trục x,y,z ký hiệu là R (Roatation).

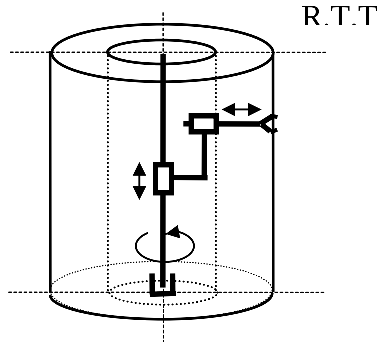
Tuỳ thuộc vào số khâu và sự tổ hợp các chuyển động (R và T) mà tay máy có các kết cấu khác nhau với vùng làm việc khác nhau. Các kết cấu thường gặp của là Robot là robot kiểu toạ độ Đề các, toạ độ trụ, toạ độ cầu, robot kiểu SCARA, hệ toạ độ góc (phỏng sinh) ...

Robot kiểu toạ độ Đề các : là tay máy có 3 chuyển động cơ bản tịnh tiến theo phương của các trục hệ toạ độ gốc (cấu hình T.T.T). Trường công tác có dạng khối chữ nhật. Do kết cấu đơn giản, loại tay máy nầy có độ cứng vững cao, độ chính xác cơ khí dễ đảm bảo vì vậy nó thường dùng để vận chuyển phôi liệu, lắp ráp, hàn trong mặt phẳng ...



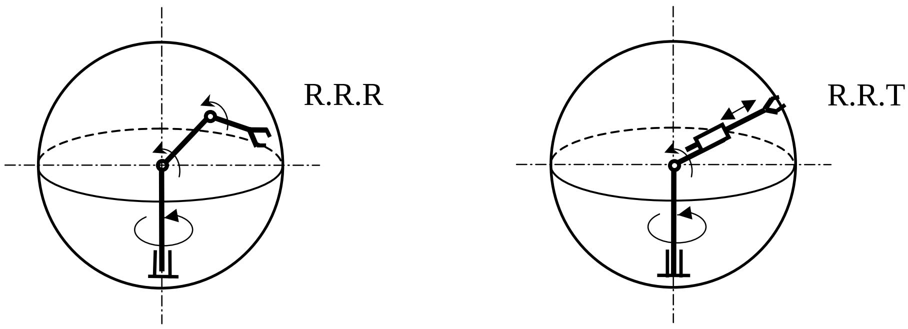
Hình 1.5 : Robot kiểu toạ độ Đề các

Robot kiểu toạ độ trụ : Vùng làm việc của robot có dạng hình trụ rỗng. Thường khớp thứ nhất chuyển động quay. Ví dụ robot 3 bậc tự do, cấu hình R.T.T như hình vẽ 1.6. Có nhiều robot kiểu toạ độ trụ như : robot Versatran của hãng AMF (Hoa Kỳ).



Hình 1.6 : Robot kiểu toạ độ trụ

Robot kiểu toạ độ cầu : Vùng làm việc của robot có dạng hình cầu. thường độ cứng vững của loại robot nầy thấp hơn so với hai loại trên. Ví dụ robot 3 bậc tự do, cấu hình R.R.R hoặc R.R.T làm việc theo kiểu toạ độ cầu (hình 1.7).

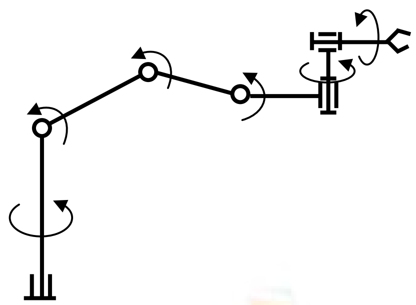


Hình 1.7 : Robot kiểu toạ độ cầu

Robot kiểu toạ độ góc (Hệ toạ độ phỏng sinh) : Đây là kiểu robot được dùng nhiều hơn cả. Ba chuyển động đầu tiên là các chuyển động quay, trục quay thứ nhất vuông góc với hai trục kia. Các chuyển động định hướng khác cũng là các chuyển động quay. Vùng làm việc của tay máy nầy gần giống một phần khối cầu. Tất cả các khâu đều nằm trong mặt phẳng thẳng đứng nên các tính toán cơ bản là bài toán phẳng. Ưu điểm nổi bật của các loại robot hoạt động theo hệ toạ độ góc là gọn nhẹ, tức là có vùng làm việc tương đối lớn so với kích cở của bản thân robot, độ linh hoạt cao.

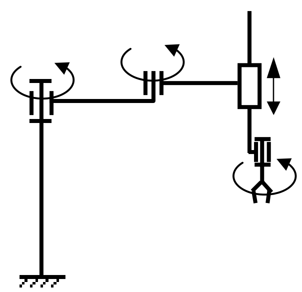
Các robot hoạt động theo hệ toạ độ góc như : Robot PUMA của hãng Unimation - Nokia (Hoa Kỳ - Phần Lan), IRb-6, IRb-60 (Thuỵ Điển), Toshiba, Mitsubishi, Mazak (Nhật Bản) .V.V...

Ví dụ một robot hoạt động theo hệ toạ độ góc (Hệ toạ độ phỏng sinh), có cấu hình RRR.RRR :



Hình 1.8 : Robot hoạt động theo hệ toạ độ góc.

Robot kiểu SCARA : Robot SCARA ra đời vào năm 1979 tại trường đại học Yamanashi (Nhật Bản) là một kiểu robot mới nhằm đáp ứng sự đa dạng của các quá trình sản xuất. Tên gọi SCARA là viết tắt của "Selective Compliant Articulated Robot Arm" : Tay máy mềm dẽo tuỳ ý. Loại robot nầy thường dùng trong công việc lắp ráp nên SCARA đôi khi được giải thích là từ viết tắt của "Selective Compliance Assembly Robot Arm". Ba khớp đầu tiên của kiểu Robot nầy có cấu hình R.R.T, các trục khớp đều theo phương thẳng đứng. Sơ đồ của robot SCARA như hình 1.9.



Hình 1.9 : Robot kiểu SCARA

1.5. Phân loại Robot công nghiệp :

Robot công nghiệp rất phong phú đa dạng, có thể được phân loại theo các cách sau :

1.4.1. Phân loại theo kết cấu :

Theo kết cấu của tay máy người ta phân thành robot kiểu toạ độ Đề các, Kiểu toạ độ trụ, kiểu toạ độ cầu, kiểu toạ độ góc, robot kiểu SCARA như đã trình bày ở trên.

1.4.2. Phân loại theo hệ thống truyền động :

Có các dạng truyền động phổ biến là :

Hệ truyền động điện : Thường dùng các động cơ điện 1 chiều (DC : Direct Current) hoặc các động cơ bước (step motor). Loại truyền động nầy dễ điều khiển, kết cấu gọn.

Hệ truyền động thuỷ lực : có thể đạt được công suất cao, đáp ứng những điều kiện làm việc nặng. Tuy nhiên hệ thống thuỷ lực thường có kết cấu cồng kềnh, tồn tại độ phi tuyến lớn khó xử lý khi điều khiển.

Hệ truyền động khí nén : có kết cấu gọn nhẹ hơn do không cần dẫn ngược nhưng lại phải gắn liền với trung tâm tạo ra khí nén. Hệ nầy làm việc với công suất trung bình và nhỏ, kém chính xác, thường chỉ thích hợp với các robot hoạt động theo chương trình định sẳn với các thao tác đơn giản “nhấc lên - đặt xuống” (Pick and Place or PTP : Point To Point).

1.4.3. Phân loại theo ứng dụng :

Dựa vào ứng dụng của robot trong sản xuất có Robot sơn, robot hàn, robot lắp ráp, robot chuyển phôi .v.v...

1.4.4. Phân loại theo cách thức và đặc trưng của phương pháp điều khiển :

Có robot điều khiển hở (mạch điều khiển không có các quan hệ phản hồi), Robot điều khiển kín (hay điều khiển servo) : sử dụng cảm biến, mạch phản hồi để tăng độ chính xác và mức độ linh hoạt khi điều khiển.

Ngoài ra còn có thể có các cách phân loại khác tuỳ theo quan điểm và mục đích nghiên cứu

----

CHƯƠNG II

CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI THUẦN NHẤT
(Homogeneous Transformation)

Khi xem xét, nghiên cứu mối quan hệ giữa robot và vật thể ta không những cần quan tâm đến *vị trí* (Position) tuyệt đối của điểm, đường, mặt của vật thể so với điểm tác động cuối (End effector) của robot mà còn cần quan tâm đến vấn đề *định hướng* (Orientation) của khâu chấp hành cuối khi vận động hoặc định vị tại một vị trí.

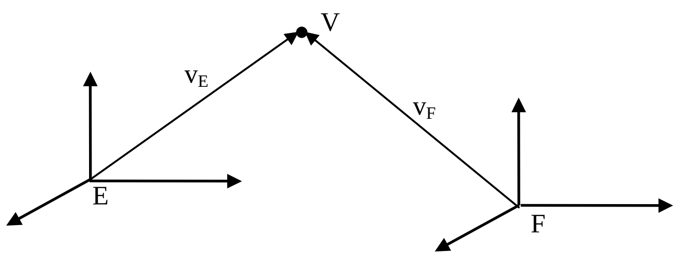
Để mô tả quan hệ về vị trí và hướng giữa robot và vật thể ta phải dùng đến các phép biến đổi thuần nhất.

Chương nầy cung cấp những hiểu biết cần thiết trước khi đi vào giải quyết các vấn đề liên quan tới động học và động lực học robot.

2.1. Hệ tọa độ thuần nhất :

Để biểu diễn một điểm trong không gian ba chiều, người ta dùng Vectơ điểm (*Point vector).* Vectơ điểm thường được ký hiệu bằng các chữ viết thường như u, v, x_1 . . . để mô tả vị trí của điểm U, V, X_1 ,. . .

Tùy thuộc vào hệ qui chiếu được chọn, trong không gian 3 chiều, một điểm V có thể được biểu diễn bằng nhiều vectơ điểm khác nhau :



Hình 2.2 : Biểu diễn 1 điểm trong không gian

v_E và v_F là hai vectơ khác nhau mặc dù cả hai vectơ cùng mô tả điểm V. Nếu i, j, k là các vec tơ đơn vị của một hệ toạ độ nào đó, chẳng hạn trong E, ta có :

$$\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

với a, b, c là toạ độ vị trí của điểm V trong hệ đó.

Nếu quan tâm đồng thời vấn đề định vị và định hướng, ***ta phải biểu diễn vectơ v trong không gian bốn chiều*** với suất vectơ là một ma trận cột :

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \qquad \text{Trong đó} \qquad \begin{matrix} x/w = a \\ y/w = b \\ z/w = c \end{matrix}$$

với w là một hằng số thực nào đó.

w còn được gọi là *hệ số tỉ lệ*, biểu thị cho chiều thứ tư ngầm định, Nếu w = 1 dễ thấy :

$$\frac{x}{w} = \frac{x}{1} = x = a \; ; \quad \frac{y}{w} = \frac{y}{1} = y = b \; ; \quad \frac{z}{w} = \frac{z}{1} = z = a$$

Trong trường hợp nầy thì các toạ độ biểu diễn bằng với toạ độ vật lý của điểm trong không gian 3 chiều, hệ toạ độ sử dụng w=1 được gọi là ***hệ toạ độ thuần nhất***.

Với w = 0 ta có : $\frac{x}{w} = \frac{y}{w} = \frac{z}{w} = \infty$

Giới hạn ∞ thể hiện ***hướng*** của các trục toạ độ.

Nếu w là một hằng số nào đó ≠ 0 và 1 thì việc biểu diễn điểm trong không gian tương ứng với hệ số tỉ lệ w :

Ví dụ : $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$

với w = 1 (trường hợp thuần nhất) :

$$v = [3\ \ 4\ \ 5\ \ 1]^T$$

với w=-10 biểu diễn tương ứng sẽ là :

$$v = [-30\ \ -40\ \ -50\ \ -10]^T$$

Ký hiệu $[\ .\ .\ .\ .\ ]^T$ (Chữ T viết cao lên trên để chỉ phép chuyển đổi vectơ hàng thành vectơ cột).

Theo cách biểu diễn trên đây, ta qui ước :

$[0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^T$ là vectơ không xác định
$[0\ \ 0\ \ 0\ \ n]^T$ với n ≠ 0 là vectơ không, trùng với gốc toạ độ
$[x\ \ y\ \ z\ \ 0]^T$ là vectơ chỉ hướng
$[x\ \ y\ \ z\ \ 1]^T$ là vectơ điểm trong hệ toạ độ thuần nhất.

2.2. Nhắc lại các phép tính về vectơ và ma trận :

2.2.1. Phép nhân véctơ :

Cho hai vectơ : $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$

$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$$

Ta có tích vô hướng $a.b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

Và tích vectơ :

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$$

2.2.2. Các phép tính về ma trận :

a/ Phép cộng, trừ ma trận :

Cộng (trừ) các ma trận A và B cùng bậc sẽ có ma trận C cùng bậc, với các phần tử c_{ij} bằng tổng (hiệu) của các phần tử a_{ij} và b_{ij} (với mọi i, j).

A + B = C Với $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
A - B = C Với $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

Phép cộng, trừ ma trận có các tính chất giống phép cộng số thực.

b/ *Tích của hai ma trận* : Tích của ma trận A (kích thước m x n) với ma trận B (kích thước n x p) là ma trận C có kích thước m x p.

Ví dụ : cho hai ma trận :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Ta có :

$$C = A.B = \begin{bmatrix} 1.1+2.3+3.5 & 1.2+2.4+3.6 \\ 4.1+5.3+6.5 & 4.2+5.4+6.6 \\ 7.1+8.3+9.5 & 7.2+8.4+9.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \\ 76 & 100 \end{bmatrix}$$

Phép nhân hai ma trận không có tính giao hoán, nghĩa là : $A . B \neq B . A$
Ma trận đơn vị I (Indentity Matrix) giao hoán được với bất kỳ ma trận nào : I.A = A.I
Phép nhân ma trận tuân theo các qui tắc sau :

1. (k.A).B = k.(A.B) = A.(k.B)
2. A.(B.C) = (A.B).C
3. (A + B).C = A.C + B.C
4. C.(A + B) = C.A + C.B

c/ *Ma trận nghịch đảo của ma trận thuần nhất :*
Một ma trận thuần nhất là ma trận 4 x 4 có dạng :

$$T = \begin{bmatrix} n_x & O_x & a_x & p_x \\ n_y & O_y & a_y & p_y \\ n_z & O_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ma trận nghịch đảo của T ký hiệu là T^{-1} :

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & -p.n \\ O_x & O_y & O_z & -p.O \\ a_x & a_y & a_z & -p.a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}1)$$

Trong đó p.n là tích vô hướng của vectơ p và n. nghĩa là :

$$p.n = p_x n_x + p_y n_y + p_z n_z$$

tương tự : $p.O = p_x O_x + p_y O_y + p_z O_z$

và $p.a = p_x a_x + p_y a_y + p_z a_z$

Ví dụ : tìm ma trận nghịch đảo của ma trận biến đổi thuần nhất :

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Giải : áp dụng công thức (2-1), ta có :

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Chúng ta kiểm chứng rằng đây chính là ma trận nghịch đảo bằng các nhân ma trận H với H^{-1} :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Phương pháp tính ma trận nghịch đảo nầy nhanh hơn nhiều so với phương pháp chung; tuy nhiên nó không áp dụng được cho ma trận 4x4 bất kỳ mà kết quả chỉ đúng với ma trận thuần nhất.

d/ Vết của ma trận :

Vết của ma trận vuông bậc n là tổng các phần tử trên đường chéo :

$$\text{Trace}(A)\ \textit{hay}\ \text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Một số tính chất quan trọng của vết ma trận :

1/ $Tr(A) = Tr(A^T)$
2/ $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$
3/ $Tr(A.B) = Tr(B.A)$
4/ $Tr(ABC^T) = Tr(CB^TA^T)$

e/ Đạo hàm và tích phân ma trận :

Nếu các phần tử của ma trận A là hàm nhiều biến, thì các phần tử của ma trận đạo hàm bằng đạo hàm riêng của các phần tử ma trận A theo biến tương ứng.

Ví dụ : cho
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

thì :
$$dA = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}}{\partial t} & \frac{\partial a_{12}}{\partial t} & \frac{\partial a_{13}}{\partial t} & \frac{\partial a_{14}}{\partial t} \\ \frac{\partial a_{21}}{\partial t} & \frac{\partial a_{22}}{\partial t} & \frac{\partial a_{23}}{\partial t} & \frac{\partial a_{24}}{\partial t} \\ \frac{\partial a_{31}}{\partial t} & \frac{\partial a_{32}}{\partial t} & \frac{\partial a_{33}}{\partial t} & \frac{\partial a_{34}}{\partial t} \\ \frac{\partial a_{41}}{\partial t} & \frac{\partial a_{42}}{\partial t} & \frac{\partial a_{43}}{\partial t} & \frac{\partial a_{44}}{\partial t} \end{bmatrix} dt$$

Tương tự, phép tích phân của ma trận A là một ma trận, có :

$$\int A(t)dt = \{\int a_{ij}(t)dt\}$$

2.3. Các phép biến đổi

Cho u là vectơ điểm biểu diễn điểm cần biến đổi, h là vectơ dẫn được biểu diễn bằng một ma trận H gọi là ma trận chuyển đổi . Ta có :

$$v = H.u$$

v là vectơ biểu diễn điểm sau khi đã biến đổi.

2.3.1. Phép biến đổi tịnh tiến (Translation) :

Giả sử cần tịnh tiến một điểm hoặc một vật thể theo vectơ dẫn $\vec{h} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$. Trước hết ta có định nghĩa của ma trận chuyển đổi H :

$$H = \text{Trans}(a,b,c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.2)$$

Gọi u là vectơ biểu diễn điểm cần tịnh tiến : $u = [x\ \ y\ \ z\ \ w]^T$

Thì v là vectơ biểu diễn điểm đã biến đổi tịnh tiến được xác định bởi :

$$v = H.u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+aw \\ y+bw \\ z+cw \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x/w+a \\ y/w+b \\ z/w+c \\ 1 \end{bmatrix}$$

Như vậy bản chất của phép biến đổi tịnh tiến là phép cộng vectơ giữa vectơ biểu diễn điểm cần chuyển đổi và vectơ dẫn.

Ví dụ :

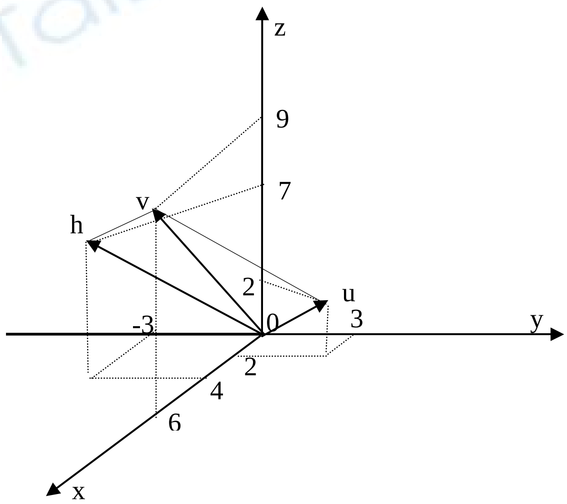
$$\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{h} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 7\vec{k}$$

Thì

$$v = Hu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+4 \\ 3-3 \\ 2+7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

và viết là : $v = \mathrm{Trans}(a,b,c)\ u$



Hình 2..4: Phép biến đổi tịnh tiến trong không gian

2.3.2. Phép quay (Rotation) quanh các trục toạ độ :

Giả sử ta cần quay một điểm hoặc một vật thể xung quanh trục toạ độ nào đó với góc quay θ^o, ta lần lượt có các ma trận chuyển đổi như sau :

$$\mathrm{Rot}(x, \theta^o) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.3)$$

$$\mathrm{Rot}(y, \theta^o) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.4)$$

$$\text{Rot}(z, \theta^o) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.5)$$

Ví dụ : Cho điểm U biểu diễn bởi $\vec{u} = 7\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ quay xung quanh z một góc $\theta = 90^o$ (hình 2.5). Ta có

$$v = \text{Rot}(z, 90^o)u = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nếu cho điểm đã biến đổi tiếp tục quay xung quanh y một góc 90^o ta có :

$$w = \text{Rot}(y, 90^o)v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Và có thể biểu diễn :

$$w = \text{Rot}(y, 90^o).\ \text{Rot}(z, 90^o)\ .\ u = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

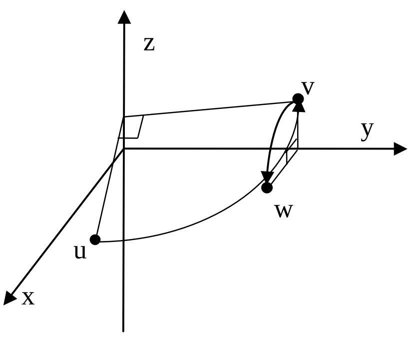
<u>Chú ý</u> : Nếu đổi thứ tự quay ta sẽ được $w' \neq w$ (hình 2.6), cụ thể : cho U quay quanh y trước 1 góc 90^0, ta có :

$$v' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix} = \text{Rot}(y, 90^o).u$$

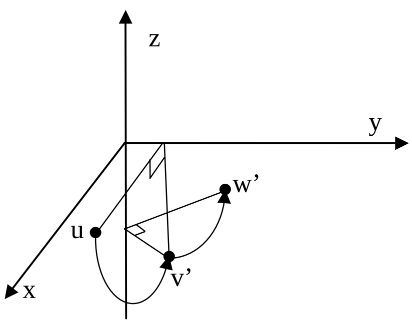
Sau đó cho điểm vừa biến đổi quay quanh z một góc 90^0, ta được :

$$w' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix} = \text{Rot}(z, 90^o).\text{Rot}(y,90^0)u$$

Rõ ràng : $\text{Rot}(y, 90^o).\text{Rot}(z,90^0)u \neq \text{Rot}(z,90^0).\text{Rot}(y, 90^o)u$



Hình 2.5
w = Rot(y, 90°). Rot(z, 90°)u



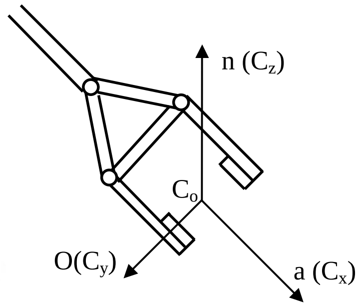
Hình 2.6
w' = Rot(z, 90°). Rot(y, 90°)u

2.3.3. Phép quay tổng quát :

Trong mục trên, ta vừa nghiên cứu các phép quay cơ bản xung quanh các trục toạ độ x,y,z của hệ toạ độ chuẩn O(x,y,z). Trong phần nầy, ta nghiên cứu phép quay quanh một vectơ k bất kỳ một góc θ. Ràng buộc duy nhất là vectơ k phải trùng với gốc của một hệ toạ độ xác định trước.

Ta hãy khảo sát một hệ toạ độ C, gắn lên điểm tác động cuối (bàn tay) của robot, hệ C được biểu diễn bởi :

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C_x & C_y & C_z & C_o \end{array} \\ \begin{bmatrix} n_x & O_x & a_z & 0 \\ n_y & O_y & a_y & 0 \\ n_z & O_z & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$



Hình 2.7 : Hệ toạ độ gắn trên khâu chấp hành cuối (bàn tay)

Khi gắn hệ toạ độ nầy lên bàn tay robot (hình 2.7), các vectơ đơn vị được biểu thị như sau :

a : là vectơ có hướng tiếp cận với đối tượng (approach);

O: là vectơ có hướng mà theo đó các ngón tay nắm vào khi cầm nắm đối tượng (Occupation);

n : Vectơ pháp tuyến với (O,a) (Normal).

Bây giờ ta hãy coi vectơ bất kỳ k (mà ta cần thực hiện phép quay quanh nó một góc θ) là một trong các vectơ đơn vị của hệ C.

Chẳng hạn : $\vec{k} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$

Lúc đó, phép quay Rot(k,θ) sẽ trở thành phép quay Rot(C_z,θ).

Nếu ta có T mô tả trong hệ gốc trong đó k là vectơ bất kỳ, thì ta có X mô tả trong hệ C với k là một trong các vectơ đơn vị. Từ điều kiện biến đổi thuần nhất, T và X có liên hệ :

$T = C.X$

hay $X = C^{-1}.T$

Lúc đó các phép quay dưới đây là đồng nhất :

$Rot(k,\theta) = Rot(C_z,\theta)$

hay là $Rot(k,\theta).T = C.Rot(z,\theta).X = C.Rot(z,\theta).C^{-1}.T$

Vậy $Rot(k,\theta) = C.Rot(z,\theta).C^{-1}$ (2.6)

Trong đó Rot(z,θ) là phép quay cơ bản quanh trục z một góc θ, có thể sử dụng công thức (2.5) như đã trình bày.

C^{-1} là ma trận nghịch đảo của ma trận C. Ta có :

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & 0 \\ O_x & O_y & O_z & 0 \\ a_x & a_y & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Thay các ma trận vào vế phải của phương trình (2.6) :

$$Rot(k,\theta) = \begin{bmatrix} n_x & O_x & a_x & 0 \\ n_y & O_y & a_y & 0 \\ n_z & O_z & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & 0 \\ O_x & O_y & O_z & 0 \\ a_x & a_y & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nhân 3 ma trận nầy với nhau ta được :

$$Rot(k,\theta) = \left[\begin{matrix} n_xn_x\cos\theta - n_xO_x\sin\theta + n_xO_x\sin\theta + O_xO_x\cos\theta + a_xa_x \\ n_xn_y\cos\theta - n_yO_x\sin\theta + n_xO_y\sin\theta + O_xO_y\cos\theta + a_ya_x \\ n_xn_z\cos\theta - n_zO_x\sin\theta + n_xO_z\sin\theta + O_xO_z\cos\theta + a_za_x \\ 0 \end{matrix}\right.$$

$$\begin{matrix} n_xn_y\cos\theta - n_xO_y\sin\theta + n_yO_x\sin\theta + O_xO_y\cos\theta + a_xa_y \\ n_yn_y\cos\theta - n_yO_y\sin\theta + n_yO_y\sin\theta + O_yO_y\cos\theta + a_ya_y \\ n_zn_y\cos\theta - n_zO_y\sin\theta + n_yO_z\sin\theta + O_zO_y\cos\theta + a_za_y \\ 0 \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} n_xn_z\cos\theta - n_xO_z\sin\theta + n_zO_x\sin\theta + O_xO_z\cos\theta + a_xa_z & 0 \\ n_yn_z\cos\theta - n_yO_z\sin\theta + n_zO_y\sin\theta + O_yO_z\cos\theta + a_ya_z & 0 \\ n_zn_z\cos\theta - n_zO_z\sin\theta + n_zO_z\sin\theta + O_zO_z\cos\theta + a_za_z & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right] \quad (2.7)$$

Để đơn giản cách biểu thị ma trận, ta xét các mối quan hệ sau :

- Tích vô hướng của bất kỳ hàng hay cột nào của C với bất kỳ hàng hay cột nào khác đều bằng 0 vì các vectơ là trực giao.
- Tích vô hướng của bất kỳ hàng hay cột nào của C với chính nó đều bằng 1 vì là vectơ đơn vị.
- Vectơ đơn vị z bằng tích vectơ của x và y, hay là : $\vec{a} = \vec{n} \times \vec{O}$

Trong đó : $a_x = n_yO_z - n_zO_y$
$a_y = n_xO_z - n_zO_x$
$a_x = n_xO_y - n_yO_x$

Khi cho k trùng với một trong số các vectơ đơn vị của C ta đã chọn :
$k_z = a_x$; $k_y = a_y$; $k_z = a_z$

Ta ký hiệu Versθ = 1 - cosθ (Versin θ).
Biểu thức (2.6) được rút gọn thành :

$$Rot(k,\theta) = \begin{bmatrix} k_xk_x vers\theta + \cos\theta & k_yk_x vers\theta - k_z\sin\theta & k_zk_x vers\theta + k_y\sin\theta & 0 \\ k_xk_y vers\theta + k_z\sin\theta & k_yk_y vers\theta + \cos\theta & k_zk_y vers\theta - k_x\sin\theta & 0 \\ k_xk_z vers\theta + k_y\sin\theta & k_yk_z vers\theta + k_x\sin\theta & k_zk_z vers\theta + \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Đây là biểu thức của phép quay tổng quát quanh một vectơ bất kỳ k. Từ phép quay tổng quát có thể suy ra các phép quay cơ bản quanh các trục toạ độ.

2.3.4. Bài toán ngược : tìm góc quay và trục quay tương đương :

Trên đây ta đã nghiên cứu các bài toán thuận, nghĩa là chỉ định trục quay và góc quay trước- xem xét kết quả biến đổi theo các phép quay đã chỉ định.

Ngược lại với bài toán trên, giả sử ta đã biết kết quả của một phép biến đổi nào đó, ta phải đi tìm trục quay k và góc quay θ tương ứng. Giả sử kết quả của phép biến đổi thuần nhất R=Rot(k, θ), xác định bởi :

$$R = \begin{bmatrix} n_x & O_x & a_x & 0 \\ n_y & O_y & a_y & 0 \\ n_z & O_z & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ta cần xác định trục quay k và góc quay θ. Ta đã biết Rot(k, θ) được định nghĩa bởi ma trận (2.6) , nên :

$$\begin{bmatrix} n_x & O_x & a_x & 0 \\ n_y & O_y & a_y & 0 \\ n_z & O_z & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_xk_x\text{vers}\theta+\cos\theta & k_yk_x\text{vers}\theta-k_z\sin\theta & k_zk_x\text{vers}\theta+k_y\sin\theta & 0 \\ k_xk_y\text{vers}\theta+k_z\sin\theta & k_yk_y\text{vers}\theta+\cos\theta & k_zk_y\text{vers}\theta-k_x\sin\theta & 0 \\ k_xk_z\text{vers}\theta+k_y\sin\theta & k_yk_z\text{vers}\theta+k_z\sin\theta & k_zk_z\text{vers}\theta+\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Bước 1 : Xác định góc quay θ.

* Cộng đường chéo của hai ma trận ở hai vế ta có :

$$\begin{aligned} n_x + O_y + a_z + 1 &= k_x^2\text{vers}\theta + \cos\theta + k_y^2\text{vers}\theta + \cos\theta + k_z^2\text{vers}\theta + \cos\theta + 1 \\ &= (1 - \text{coss}\theta)(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) + 3\cos\theta + 1 \\ &= 1 - \cos\theta + 3\cos\theta + 1 \\ &= 2(1 + \cos\theta) \\ \Rightarrow \quad \cos\theta &= (n_x + O_y + a_z - 1)/2 \end{aligned}$$

* Tính hiệu các phần tử tương đương của hai ma trận, chẳng hạn :

$$\left.\begin{aligned} O_z - a_y &= 2k_x\sin\theta \\ a_x - n_z &= 2k_y\sin\theta \\ n_y - O_x &= 2k_z\sin\theta \end{aligned}\right\} \quad (2.10)$$

Bình phương hai vế của các phương trình trên rồi cọng lại ta có :

$$(O_z - a_y)^2 + (a_x - n_z)^2 + (n_y - O_x)^2 = 4\sin^2\theta$$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(O_z - a_y)^2 + (a_x - n_z)^2 + (n_y - O_x)^2}$$

Với $0 \le \theta \le 180^0$:

$$tg\theta = \frac{\sqrt{(O_z - a_y)^2 + (a_x - n_z)^2 + (n_y - O_x)^2}}{(n_x + O_y + a_z - 1)}$$

Và trục k được định nghĩa bởi :

$$k_x = \frac{O_z - a_y}{2\sin\theta}; \quad k_y = \frac{a_x - n_z}{2\sin\theta}; \quad k_x = \frac{n_y - O_z}{2\sin\theta} \quad (2.11)$$

Để ý rằng với các công thức (2.8) :

- Nếu θ = 0^0 thì k_x, k_y, k_z có dạng $\frac{0}{0}$. Lúc nầy phải chuẩn hoá k sao cho $|k| = 1$

- Nếu $\theta = 180^0$ thì k_x, k_y, k_z có dạng $\frac{a \neq 0}{0}$. Lúc nầy k không xác định được, ta phải dùng cách tính khác cho trường hợp nầy :

Xét các phần tử tương đương của hai ma trận (2.9) :

$$n_x = k_x^2 \text{vers}\theta + \cos\theta$$
$$O_y = k_y^2 \text{vers}\theta + \cos\theta$$
$$a_z = k_z^2 \text{vers}\theta + \cos\theta$$

Từ đây ta suy ra :

$$k_x = \pm\sqrt{\frac{n_x - \cos\theta}{\text{vers}\theta}} = \pm\sqrt{\frac{n_x - \cos\theta}{1 - \cos\theta}}$$
$$k_y = \pm\sqrt{\frac{O_y - \cos\theta}{\text{vers}\theta}} = \pm\sqrt{\frac{O_y - \cos\theta}{1 - \cos\theta}}$$
$$k_z = \pm\sqrt{\frac{a_z - \cos\theta}{\text{vers}\theta}} = \pm\sqrt{\frac{a_z - \cos\theta}{1 - \cos\theta}}$$

Trong khoảng $90^0 \leq \theta \leq 180^0$ $\sin\theta$ luôn luôn dương

Dựa vào hệ phương trình (2.10) ta thấy k_x, k_y, k_z luôn có cùng dấu với vế trái. Ta dùng hàm Sgn(x) để biểu diễn quan hệ "cùng dấu với x", như vậy :

$$\left.\begin{aligned} k_x &= \text{Sgn}(O_z - a_y)\sqrt{\frac{n_x - \cos\theta}{1 - \cos\theta}} \\ k_y &= \text{Sgn}(a_x - n_z)\sqrt{\frac{O_y - \cos\theta}{1 - \cos\theta}} \\ k_z &= \text{Sgn}(n_y - O_x)\sqrt{\frac{a_z - \cos\theta}{1 - \cos\theta}} \end{aligned}\right\} \qquad (2.12)$$

Hệ phương trình (2.12) chỉ dùng để xác định xem trong các k_x, k_y, k_z thành phần nào có giá trị lớn nhất. Các thành phần còn lại nên tính theo thành phần có giá trị lớn nhất để xác định k được thuận tiện. Lúc đó dùng phương pháp cộng các cặp còn lại của các phần tử đối xứng qua đường chéo ma trận chuyển đổi (2.9) :

$$\begin{aligned} n_y + O_x &= 2k_xk_y\text{vers}\theta = 2k_xk_y(1 - \cos\theta) \\ O_z + a_y &= 2k_yk_z\text{vers}\theta = 2k_yk_z(1 - \cos\theta) \qquad (2.13) \\ a_x + n_z &= 2k_zk_x\text{vers}\theta = 2k_zk_x(1 - \cos\theta) \end{aligned}$$

Giả sử theo hệ (2.12) ta có k_x là lớn nhất, lúc đó k_y, k_z sẽ tính theo k_x bằng hệ (2.13); cụ thể là :

$$k_y = \frac{n_y + O_x}{2k_x(1 - \cos\theta)}$$
$$k_z = \frac{a_x + n_z}{2k_x(1 - \cos\theta)}$$

__Ví dụ__ : Cho $R = \text{Rot}[y,90^0]\text{Rot}[z,90^0]$. Hãy xác định k và θ để $R = \text{Rot}[k,\theta]$. Ta đã biết :

$$R = \text{Rot}(y,90^0).\text{Rot}(z,90^0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ta có $\cos\theta = (n_x + O_y + a_z - 1) / 2 = (0 + 0 + 0 - 1) / 2 = -1 / 2$

$$\sin\theta = \frac{1}{2}\sqrt{(O_z - a_y)^2 + (a_x - n_z)^2 + (n_y - O_x)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2 + (1-0)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

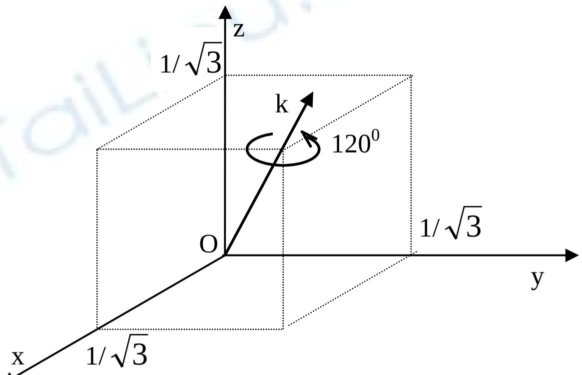
$$\Rightarrow \quad tg\theta = -\sqrt{3} \quad \text{và} \quad \theta = 120^0$$

Theo (2.12), ta có :

$$k_x = k_y = k_z = +\sqrt{\frac{0+1/2}{1+1/2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Vậy : $R = Rot(y,90^0).Rot(z,90^0) = Rot(k, 120^0)$; với :

$$\vec{k} = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k}$$

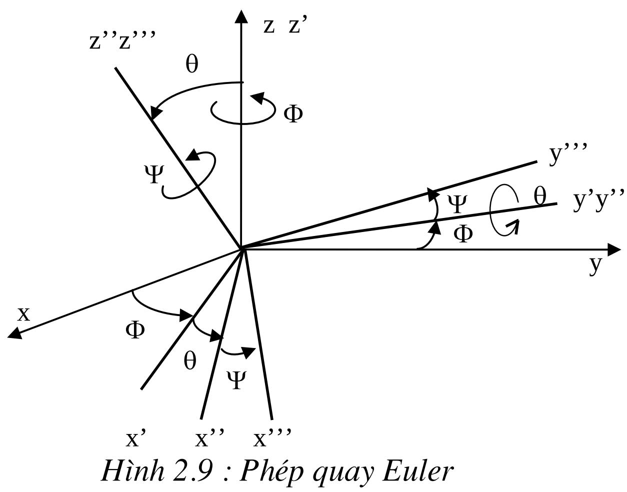


Hình 2.8 : Tìm góc quay và trục quay tương đương

2.3.5. Phép quay Euler :

Trên thực tế, việc định hướng thường là kết quả của phép quay xung quanh các trục x, y, z . Phép quay Euler mô tả khả năng định hướng bằng cách :

- Quay một góc Φ xung quanh trục z,
- Quay tiếp một góc θ xung quanh trục y mới, đó là y',
- cuối cùng quay một góc ψ quanh trục z mới, đó là z'' (Hình 2.9).



Hình 2.9 : Phép quay Euler

Ta biểu diễn phép quay Euler bằng cách nhân ba ma trận quay với nhau :

$$Euler(\Phi,\theta,\psi) = Rot(z, \Phi)\, Rot(y, \theta)\, Rot(z, \psi) \qquad (2.14)$$

Nói chung, kết quả của phép quay phụ thuộc chặt chẻ vào thứ tự quay, tuy nhiên , ở phép quay Euler, nếu thực hiện theo thứ tự ngược lại, nghĩa là quay góc ψ quanh z rồi tiếp đến quay góc θ quanh y và cuối cùng quay góc Φ quanh z cũng đưa đến kết quả tương tự (Xét trong cùng hệ qui chiếu).

$$\text{Euler}(\Phi,\theta,\psi) = \text{Rot}(z,\Phi)\begin{bmatrix} \text{Cos}\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \text{Cos}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

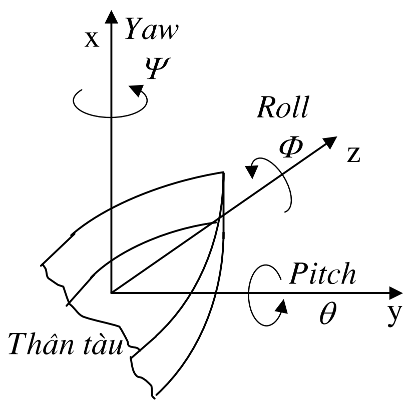
$$= \begin{bmatrix} \cos\Phi & -\sin\Phi & 0 & 0 \\ \sin\Phi & \cos\Phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \text{Cos}\theta\cos\psi & -\text{Cos}\theta\sin\psi & \sin\theta & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 & 0 \\ -\sin\theta\cos\psi & \sin\theta\sin\psi & \text{Cos}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\Phi\text{Cos}\theta\cos\psi - \sin\Phi\sin\psi & -\cos\Phi\text{Cos}\theta\sin\psi - \sin\Phi\cos\psi & \cos\Phi\sin\theta & 0 \\ \sin\Phi\text{Cos}\theta\cos\psi + \cos\Phi\sin\psi & -\sin\Phi\text{Cos}\theta\sin\psi + \cos\Phi\cos\psi & \sin\Phi\sin\theta & 0 \\ -\sin\theta\cos\psi & \sin\theta\sin\psi & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

2.3.6. Phép quay Roll-Pitch-Yaw :

Một phép quay định hướng khác cũng thường được sử dụng là phép quay Roll-Pitch và Yaw.

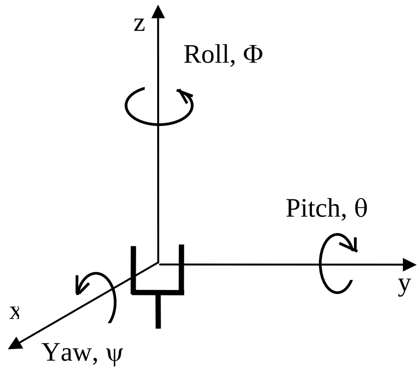
Ta tưởng tượng, gắn hệ toạ độ xyz lên thân một con tàu. Dọc theo thân tàu là trục z, Roll là chuyển động lắc của thân tàu, tương đương với việc quay thân tàu một góc Φ quanh trục z. Pitch là sự bồng bềnh, tương đương với quay một góc θ xung quanh trục y và Yaw là sự lệch hướng, tương đương với phép quay một góc ψ xung quanh trục x (Hình 2.10)



Hình 2.10: Phép quay Roll-Pitch-Yaw

Các phép quay áp dụng cho khâu chấp hành cuối của robot như hình 2.11. Ta xác định thứ tự quay và biểu diễn phép quay như sau :

$$\text{RPY}(\Phi,\theta,\psi)=\text{Rot}(z,\Phi)\text{Rot}(y,\theta)\text{Rot}(x,\psi) \quad (2.16)$$



Hình 2.11 : Các góc quay Roll-Pitch và Yaw của bàn tay Robot.

nghĩa là, quay một góc ψ quanh trục x, tiếp theo là quay một góc θ quanh trục y và sau đó quay một góc Φ quanh truc z.